

---

**FWSM - 1/93**

**Archiv-Ex.:**

**INSTITUT FÜR SICHERHEITSFORSCHUNG**

**G. Grunwald und E. Altstadt**

**Analytische und experimentelle Untersuchungen  
zur Modellierung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung  
in einem 2D-Ringspalt**

Forschungszentrum  
Rossendorf e.V.  
- Zentralbibliothek -  
Postfach 510119  
01314 Dresden

Januar 1993

# Inhalt

	Seite
1. Einleitung	1
2. Modellvoraussetzungen	2
3. Grundlagen der analytischen Modellierung	3
4. Experimentelle und analytische Modellierung	6
4.1. Experimentelles Modell	6
4.2. Potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung im Ringspalt	8
4.2.1. Achsparallele ebene Verschiebung des Kreiszylinders	8
4.2.2. Ebene Pendelbewegung	10
4.2.3. Überlagerung verschiedener Zylinderbewegungen	11
4.3. Analytische Bestimmung der instationären Druckverteilung bei der Pendelbewegung im Ringspalt	12
4.4. Ansätze für die Fluidreibung	13
4.5. Schwingungsgleichung für ebene Pendelbewegungen des Zylinders	15
4.6. Einfluß der Randbedingungen	18
4.7. Experimentelle Ergebnisse am Pendelmodell	22
4.8. Vergleich zwischen experimentellen und analytischen Ergebnissen	26
4.8.1. Pendelschwingungen an der Luft	26
4.8.2. Pendelschwingungen im ruhenden Fluid	26
4.8.3. Pendelschwingungen im laminar und turbulent strömenden Fluid	26
5. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	29
6. Literatur	30

## Kurzfassung

Ausgehend von den Grundgleichungen der Strömungsmechanik wird eine Modellierung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung im 2D-Ringspalt kreiszylindrischer Strukturen vorgenommen. Dazu wird das mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung potentialtheoretisch ermittelte Geschwindigkeitsfeld, welches durch die Strukturbewegung erzeugt wird und mit einer Grundströmung überlagert werden kann, mittels eines Parameters so variiert, daß die Geschwindigkeits- und Druckverteilungen im Ringspalt den geforderten Randbedingungen näherungsweise genügen. Die Druckverteilung im Ringspalt folgt dabei durch Integration eines linearisierten 2D-Systems der Navier-Stokesschen Gleichungen mit einem einfachen Ansatz für die laminare bzw. turbulente Fluidreibung und dient der Bestimmung der Fluidkräfte für die Bewegungsgleichung der Struktur.

Meßergebnisse für die Frequenz und Dämpfung eines ausschlagenden Pendels im ruhenden und strömenden Fluid werden mit den theoretischen Resultaten verglichen. Dabei liegen trotz der einfachen Modellierung, die auch auf kompliziertere Strukturbewegungen erweitert werden kann, im Vergleich zum Experiment gute Ergebnisse vor.

## 2. Modellvoraussetzungen

Im Bild 1 sind die hier betrachteten Modelle für die Parallelverschiebung (a) und Pendelbewegung (b) eines Kreiszyinders in einem Fluidstrom schematisch dargestellt.

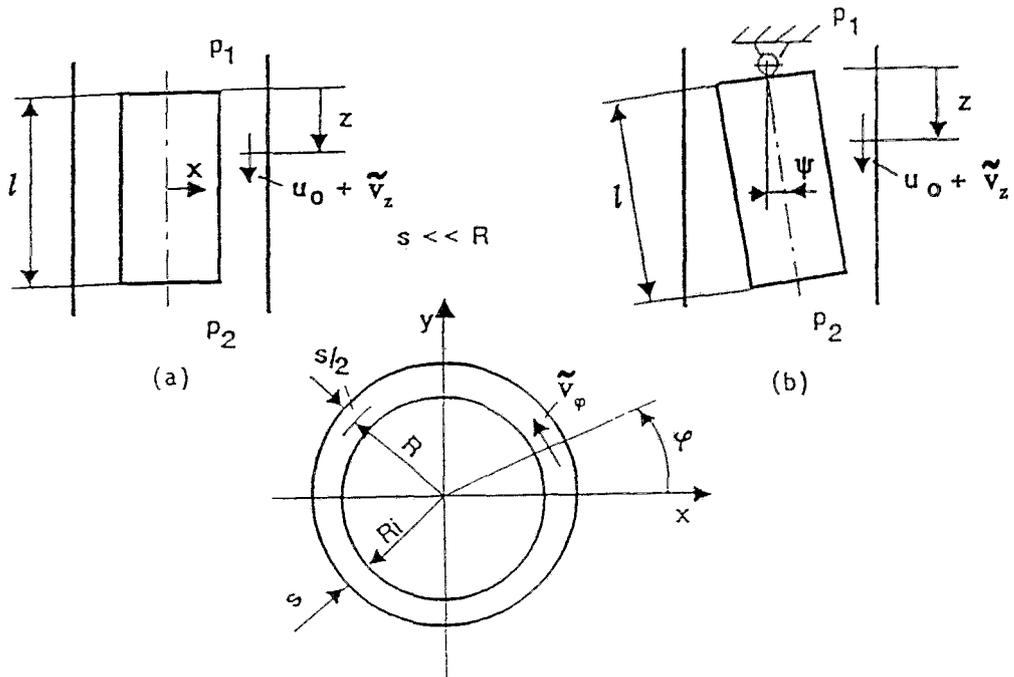


Bild 1 Parallelverschiebung (a) und Pendelbewegung (b) eines Zylinders in einer Fluidströmung

Die Druckdifferenz  $p_1 - p_2 \geq 0$  erzeugt eine stationäre Grundströmung mit der mittleren Geschwindigkeit  $u_0$  im Ringspalt.

Durch die Zylinderbewegung entstehen im Ringspalt Geschwindigkeitsschwankungen  $\tilde{v}_z(z, \varphi, t)$  und  $\tilde{v}_\varphi(z, \varphi, t)$ , die der Grundströmung überlagert sind.

Um das Problem analytisch lösbar zu machen, wird folgendes vorausgesetzt:

- das Fluid ist inkompressibel,
- die Spaltweite des Fluidraumes ist klein gegen den Radius,
- die Verformung der mechanischen Struktur (Verschiebungen bzw. Pendelausschläge) sind wiederum klein gegen die Spaltweite.

Unter diesen Voraussetzungen ist eine Linearisierung der Navier-Stokesschen Gleichungen im Rahmen des hier betrachteten 2D-Ringspalt (ebene Strömung um den Kreiszyylinder) möglich.

### 3. Grundlagen der analytischen Modellierung

Die allgemeinen Gleichungen zur Beschreibung eines inkompressiblen Fluids sind zum einen die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \bar{v} = 0 \quad (3.1)$$

und zum anderen die Navier-Stokesschen Gleichungen

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \nabla) \bar{v} = \frac{\eta}{\rho} \Delta \bar{v} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3.2)$$

Dabei ist  $\bar{v}$  das Geschwindigkeitsfeld,  $\rho$  die Dichte,  $\eta$  die Zähigkeit und  $p$  der statische Druck. Das Besondere bei der Fluid-Struktur-Wechselwirkung ist, daß das Gebiet dieser Gleichungen aufgrund der Strukturbewegung zeitlich veränderlich ist.

Die näherungsweise Lösung der gekoppelten räumlichen Gleichungen (3.1) und (3.2) erfolgt durch Überführung in 2D-Gleichungen. Dabei wird zunächst Gl. (3.1) ohne Rücksicht auf Gl. (3.2) betrachtet und das resultierende Geschwindigkeitsfeld in Gl. (3.2) eingesetzt. Das führt später zu Einschränkungen bei den erfüllbaren Randbedingungen von Gl. (3.2).

Da im vorliegenden Fall ein Ringspaltgebiet betrachtet wird, erfolgt die Beschreibung in Zylinderkoordinaten, so daß Gl. (3.1) folgendes Aussehen hat:

$$\nabla \bar{v} = \frac{1}{r} [r v_r]_{,r} + \frac{1}{r} v_{\varphi, \varphi} + v_{z,z} = 0 \quad (3.3)$$

Nun wird angenommen, daß die Fluidgeschwindigkeit in r-Richtung aufgrund der kleinen Spaltweite  $s$  (siehe Bild 1) durch die Bewegung der Spaltraummittelfläche bestimmt wird, d. h. durch die Bewegung der Strukturoberflächen, die das Fluid umgeben. Dieser Zusammenhang läßt sich allgemein formulieren:

$$v_r(r, z, \varphi, t) = \underline{h}^T(r, z, \varphi) \dot{q}(t) \quad (3.4)$$

Dabei enthält der Vektor  $q(t)$  die generalisierten Koordinaten der Struktur. Darüberhinaus wird angenommen, daß  $v_\varphi$  und  $v_z$  nicht von  $r$  abhängig sind, was ebenfalls durch die kleine Spaltweite gerechtfertigt ist. Mit diesen Annahmen ist man in der Lage, die Kontinuitätsgleichung (3.1) in eine 2D-Gleichung zu überführen, indem man sie über die Spaltweite mittelt:

$$\int_{R-s/2}^{R+s/2} \nabla \bar{v} \, dr = 0 \quad (3.5)$$

Mit Gl. (3.3) folgt daraus

$$v_{z,z} + \frac{1}{R} v_{\varphi,\varphi} = -\frac{1}{s} \left[ \frac{r}{R} v_r \right]_{R-s/2}^{R+s/2} = -\frac{1}{s} \bar{v}_r . \quad (3.6)$$

Im inhomogenen Teil dieser Differentialgleichung ist der Einfluß der Strukturbewegung (also die zeitabhängige Geometrie) enthalten.

Damit erhält man aus Gl. (3.4)

$$\bar{v}_r = \bar{h}^T(z, \varphi) \dot{q}(t) . \quad (3.7)$$

Die Abhängigkeit von  $z$  kann dabei höchstens linear sein, da die Strukturdeformationen entsprechend Abschnitt 2. als klein vorausgesetzt werden:

$$\bar{v}_r(z, \varphi, t) = h_0^T(\varphi) \dot{q} + z h_1^T(\varphi) \dot{q} \quad (3.8)$$

Definiert man ein Geschwindigkeitspotential  $\Phi(z, \varphi, t)$  mit

$$\Phi_{,z} = v_z ; \quad \frac{1}{R} \Phi_{,\varphi} = v_\varphi , \quad (3.9)$$

so folgt aus Gl. (3.6)

$$\Phi_{,zz} + \frac{1}{R^2} \Phi_{,\varphi\varphi} = -\frac{1}{s} \bar{v}_r . \quad (3.10)$$

Als homogene Lösung ergibt sich mit dem Separationsansatz

$$\phi(z, \varphi) = F(z) \cdot G(\varphi) \quad (3.11)$$

aus Gl. (3.10) unter Berücksichtigung einer noch möglichen Konstante und lineare Glieder:

$$\begin{aligned} \Phi_{hom}(z, \varphi) &= \Phi_0 + K_1 z + L_1 \varphi + \\ &+ \sum_{\varepsilon=1}^n \left[ A_\varepsilon ch\left(\frac{\varepsilon z}{R}\right) \cos(\varepsilon \varphi) + B_\varepsilon ch\left(\frac{\varepsilon z}{R}\right) \sin(\varepsilon \varphi) + \right. \\ &\left. + C_\varepsilon sh\left(\frac{\varepsilon z}{R}\right) \cos(\varepsilon \varphi) + D_\varepsilon sh\left(\frac{\varepsilon z}{R}\right) \sin(\varepsilon \varphi) \right] . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Wegen  $\bar{v}_{r,zz} = 0$  entspr. Gl. (3.8) erhält man für die Partikularlösung:

$$\Phi_{part}(z, \varphi, t) = -\frac{R^2}{S} \int \left[ \int \bar{v}_r d\varphi \right] d\varphi . \quad (3.13)$$

Die Periodizitätsbedingung  $\Phi(z, \varphi) = \Phi(z, \varphi + 2\pi)$  für Zylinderstrukturen führt zu  $L_1 = 0$ , so daß sich schließlich für das gesuchte Geschwindigkeitspotential  $\Phi = \Phi_{hom} + \Phi_{part}$  ergibt:

$$\begin{aligned} \Phi(z, \varphi, t) &= \Phi_0 + K_1 z + \sum_{\varepsilon=1}^n \left[ A_\varepsilon ch\left(\frac{\varepsilon z}{R}\right) \cos(\varepsilon \varphi) + \right. \\ &+ B_\varepsilon ch\left(\frac{\varepsilon z}{R}\right) \sin(\varepsilon \varphi) + C_\varepsilon sh\left(\frac{\varepsilon z}{R}\right) \cos(\varepsilon \varphi) + \\ &\left. + D_\varepsilon sh\left(\frac{\varepsilon z}{R}\right) \sin(\varepsilon \varphi) \right] - \frac{R^2}{S} \int \left[ \int \bar{v}_r d\varphi \right] d\varphi . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Berechnung der instationären Druckverteilung im Ringspalt als Grundlage zur Bestimmung der auf die Struktur wirkenden Fluidkräfte erfolgt unter Beachtung der realen Randbedingungen mit den aus Gl. (3.2) resultierenden Differentialgleichungen für eine 2D-Strömung:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} p_{,z} &= v_{z,t} + v_z v_{z,z} + v_\varphi \frac{v_{z,\varphi}}{R} + \frac{\lambda}{4S} u_o v_z = f(z, \varphi, t) , \\ -\frac{1}{\rho R} p_{,\varphi} &= v_{\varphi,t} + v_z v_{\varphi,z} + v_\varphi \frac{v_{\varphi,\varphi}}{R} + \frac{\lambda}{4S} u_o v_\varphi = g(z, \varphi, t) . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Diese 2D-Form der Navier-Stokesschen Gleichung stellt einen Kompromiß dar. Einerseits nimmt man zur Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes Potentialströmung an ( $\bar{v} = \text{grad } \Phi$ ), was natürlich  $\eta \Delta \bar{v} = 0$  bedeutet, andererseits möchte man trotzdem die Reibung im Fluid berücksichtigen.

Das Gleichungssystem (3.15) enthält eine Näherung für die Reibungsglieder, wobei  $\lambda$  einen dimensionslosen Reibungskoeffizienten für eine ebene Spaltströmung bedeutet, der bei Vernachlässigung instationärer Einflüsse nur von der Reynoldszahl und der Oberflächenrauigkeit der durchströmten Struktur abhängt.

Wie man durch Nachrechnen überprüfen kann, ist die Integrabilitätsbedingung für das Gleichungssystem (3.15)

$$\frac{1}{R} f_{,\varphi}(z, \varphi, t) = g_{,z}(z, \varphi, t) \quad (3.16)$$

erfüllt.

Für die vorliegende Geometrie erhält man eine Lösung des Systems (3.15) durch Integration der ersten Gleichung nach  $z$ :

$$-\frac{1}{\varrho} p(z, \varphi, t) = \int f(z, \varphi, t) dz + K(\varphi, t) \quad , \quad (3.17)$$

wobei  $K(\varphi, t)$  aus der Randbedingung

$$p(z, \varphi, t) \Big|_{z=l} = p_l(\varphi, t)$$

bestimmt wird.

Dabei sind nur solche Randbedingungen zulässig, die die zweite Gleichung des Systems (3.15) am Rand  $z = l$  erfüllen:

$$p_{l,\varphi}(\varphi, t) = p_{,\varphi}(z=l, \varphi, t) = -\varrho R g(z=l, \varphi, t) \quad . \quad (3.18)$$

Das heißt, durch die Vorgabe eines bestimmten Geschwindigkeitsfeldes (Lösung von  $\text{div } \vec{v} = 0$ ) wird die Menge der erfüllbaren Randbedingungen bei den Druckgleichungen eingeschränkt.

## 4. Experimentelle und analytische Modellierung

### 4.1. Experimentelles Modell

Eine Prinzipskizze des experimentellen Zylindermodells und die Pendelraten sind im Bild 2 dargestellt.

Der kreiszylindrische Pendelkörper aus Aluminium ist in einem Glaszylinder angeordnet, wobei der Ringspalt mit einer mittleren Weite  $s = 3,1$  mm sowohl laminar als auch turbulent mit Wasser durchströmt werden konnte.

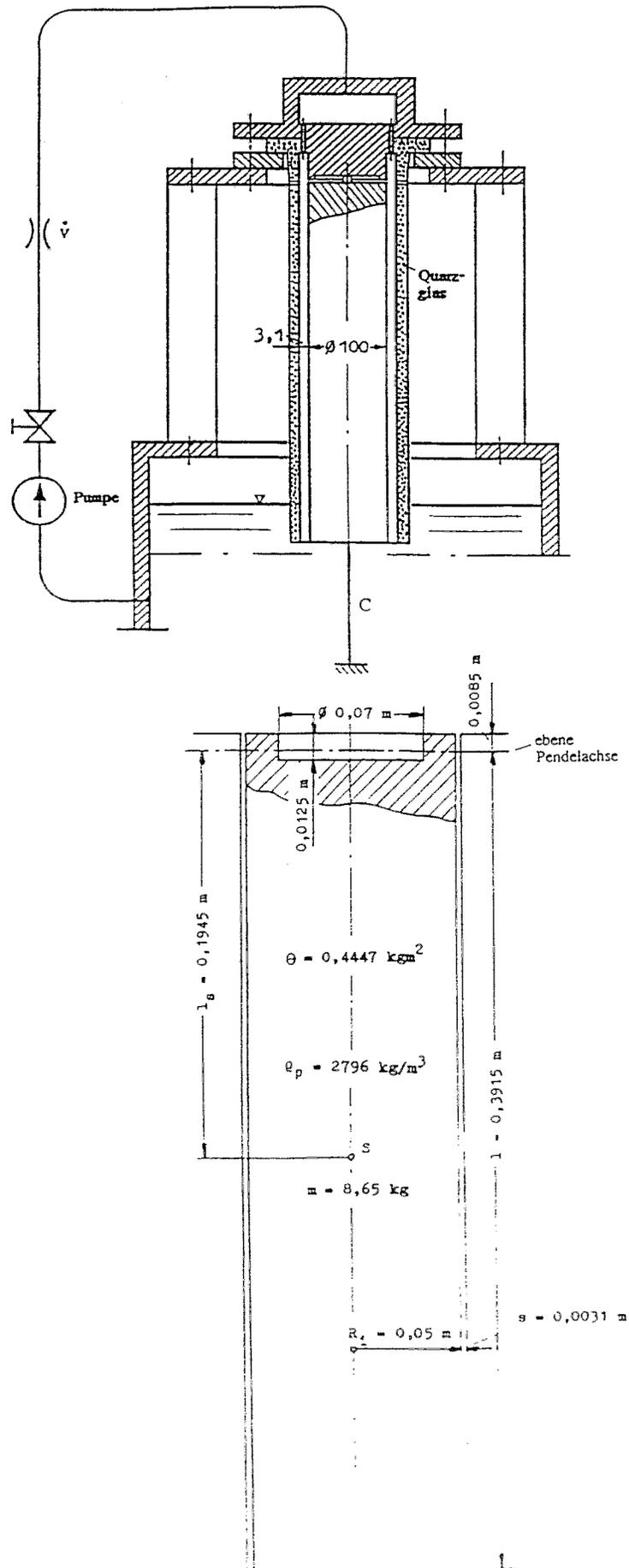


Bild 2 Prinzipskizze des exp. Zylindermodells und Pendeldaten

Dazu ist dieser Versuchsaufbau in einem Kreislauf bei Umgebungsdruck und -temperatur mit Pumpe und Durchflußmeßtechnik angeordnet. Es wurde eine max. Fluidgeschwindigkeit  $u_0 = 2,5 \text{ m/s}$  entsprechend  $Re = 1,55 \cdot 10^4$  im Ringspalt erreicht.

Die Pendelausschläge wurden mittels Hall-Detektoren auf der Pendelunterseite gemessen.

Zur Erhöhung der Pendeleigenfrequenz wurde an der unteren Pendelstirnseite eine axial angeordnete Biegefeder variabler Länge vorgesehen. Die Bestimmung ihrer Steifigkeit erfolgte durch Messung des Ausschwingvorganges des Pendels an Luft.

## 4.2. Potentialtheoretische Geschwindigkeitsverteilung im Ringspalt

### 4.2.1. Achsparallele ebene Verschiebung des Kreiszylinders

Bei einer achsparallelen Bewegung des Zylinders in  $x$ -Richtung nach Bild 1a ergibt sich unter den angegebenen Modellbedingungen für die Fluidgeschwindigkeit in  $r$ -Richtung entsprechend Gl. (3.4)

$$v_r(r, z, \varphi, t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{r-R}{s} \right) \dot{x} \cos \varphi \quad . \quad (4.1)$$

Für  $r = R-s/2$  beschreibt Gl. (4.1) die Geschwindigkeit der Zylinder-Oberfläche in  $r$ -Richtung und für  $r = R+s/2$  ist  $v_r = 0$ .

Mit Gl. (4.1) folgt aus Gl. (3.6)

$$\bar{v}_r = - \left( 1 - \frac{s}{2R} \right) \dot{x} \cos \varphi \quad (4.2)$$

und man erhält wegen  $s/2R \ll 1$  für den partikulären Summanden in Gl. (3.14) entsprechend Gl. (3.13)

$$\frac{R^2}{s} \int \left[ \int \bar{v}_r d\varphi \right] d\varphi \cong \frac{R^2}{s} \dot{x} \cos \varphi \quad . \quad (4.3)$$

Als ein geeigneter Ansatz für das Geschwindigkeitspotential  $\Phi_z$  der achsparallelen Zylinderbewegung erweist sich entsprechend Gl. (3.14) mit Gl. (4.3),  $\Phi_0 = 0$  und  $K_1 = u_0$

$$\Phi_z(z, \varphi, t) = u_0 z + A_1 ch\left(\frac{z}{R}\right) \cos \varphi + C_1 sh\left(\frac{z}{R}\right) \cos \varphi - \frac{R^2}{s} \dot{x} \cos \varphi \quad , \quad (4.4)$$

da mit ihm die zunächst willkürlichen, aber plausiblen Randbedingungen

$$v_{\varphi} = 0 \text{ für } z = 0 \text{ und } z = l \quad (4.5)$$

realisierbar sind.

$A_1$  und  $C_1$  folgen aus Gl. (4.4) unter Berücksichtigung von Gl. (3.9) und Gl. (4.5).

Man erhält, wenn noch  $A_1$  und  $C_1$  zwecks späterer Variation der Randbedingungen mit den prinzipiell beliebigen Faktoren  $\alpha$  und  $\beta$  ( $0 < \alpha, \beta \leq 1$ ) erweitert werden:

$$\begin{aligned} A_1 &= \alpha \frac{R^2}{s} \dot{x} \quad , \\ C_1 &= -\beta \frac{R^2}{s} \dot{x} \frac{ch(\frac{l}{R}) - 1}{sh(\frac{l}{R})} . \end{aligned} \quad (4.6)$$

Da nur Wertepaare  $\alpha = \beta$  physikalisch sinnvoll sind (sonst ergeben sich für  $u_0 = 0$  unsymmetrische Geschwindigkeitsverteilungen am Spaltein- und -austritt des Zylinders) erhält man mit Gl. (4.6) für Gl. (4.4)

$$\phi_a(z, \varphi, t) = u_0 z + \frac{R^2}{s} \dot{x} \left\{ \beta \left[ ch\left(\frac{z}{R}\right) - \frac{ch(\frac{l}{R}) - 1}{sh(\frac{l}{R})} sh\left(\frac{z}{R}\right) \right] - 1 \right\} \cos \varphi \quad (4.7)$$

und daraus nach Gl. (3.9) die Fluid-Geschwindigkeitskomponenten

$$v_z = u_0 + \beta \frac{R}{s} \dot{x} \left[ sh\left(\frac{z}{R}\right) - \frac{ch(\frac{l}{R}) - 1}{sh(\frac{l}{R})} ch\left(\frac{z}{R}\right) \right] \cos \varphi \quad , \quad (4.8)$$

$$v_{\varphi} = \frac{R}{s} \dot{x} \left\{ 1 + \beta \left[ \frac{ch(\frac{l}{R}) - 1}{sh(\frac{l}{R})} sh(\frac{z}{R}) - ch(\frac{z}{R}) \right] \right\} \sin \varphi \quad (4.9)$$

Für  $\beta = 1$  erfüllt Gl. (4.9) die Randbedingungen Gl. (4.5) und z. B. für  $\beta = 0,5$  ergibt sich für  $u_0 = 0$ ,  $z = 0$  und  $l$  sowie für  $R \ll l$

$$v_z^2 + v_{\varphi}^2 \cong \left( \frac{R}{2s} \dot{x} \right)^2, \quad (4.10)$$

d.h. eine von  $\varphi$  unabhängige resultierende Fluidgeschwindigkeit am Spaltein- und austritt.

#### 4.2.2. Ebene Pendelbewegung

Für das ebene Pendel nach Bild 1b ist die Vorgehensweise zur Ermittlung des Geschwindigkeitspotentials  $\Phi_p$  bzw. der Fluid-Geschwindigkeitskomponenten  $v_z$  und  $v_{\varphi}$  im Ringspalt analog zu der im Abschnitt 4.2.1.

Man erhält anstelle der Gleichungen (4.1) bis (4.3)

$$v_r(r, z, \varphi, t) = \left( \frac{1}{2} - \frac{r-R}{s} \right) z \dot{\psi} \cos \varphi, \quad (4.11)$$

$$\bar{v}_r = - \left( 1 - \frac{s}{2R} \right) z \dot{\psi} \cos \varphi, \quad (4.12)$$

$$\frac{R^2}{s} \int [\int \bar{v}_r d\varphi] d\varphi \cong \frac{R^2}{s} z \dot{\psi} \cos \varphi \quad (4.13)$$

und als Ansatz für das Geschwindigkeitspotential bietet sich aus Gl. (3.14) mit Rücksicht auf die Randbedingungen (4.5)

$$\phi_p(z, \varphi, t) = u_0 z + C_2 sh\left(\frac{z}{R}\right) \cos \varphi - \frac{R^2}{s} z \dot{\psi} \cos \varphi \quad (4.14)$$

an.

Mit Gl. (3.9) und (4.5) erhält man, wenn noch  $C_2$  mit einem Faktor  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ) erweitert wird,

$$C_2 = \alpha \frac{R^2 l \dot{\psi}}{s \cdot \operatorname{sh}\left(\frac{l}{R}\right)} . \quad (4.15)$$

Somit folgt

$$\phi_p(z, \varphi, t) = u_0 z + \frac{R^2}{s} l \dot{\psi} \left[ \alpha \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{z}{R}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{l}{R}\right)} - \frac{z}{l} \right] \cos \varphi , \quad (4.16)$$

mit den Geschwindigkeitskomponenten entspr. Gl. (3.9)

$$v_z = u_0 + \frac{R}{s} l \dot{\psi} \left[ \alpha \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{z}{R}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{l}{R}\right)} - \frac{R}{l} \right] \cos \varphi , \quad (4.17)$$

$$v_\varphi = \frac{R}{s} l \dot{\psi} \left[ \frac{z}{l} - \alpha \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{z}{R}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{l}{R}\right)} \right] \sin \varphi . \quad (4.18)$$

Dabei bedeutet  $l \dot{\psi}$  die Fußpunktgeschwindigkeit des Pendels.

Für  $\alpha = 1$  erfüllt Gl. (4.18) die Randbedingungen (4.5) und für  $\alpha = 0,5$  wird für  $u_0 = 0$ ,  $z = l$  und  $R \ll l$  das Quadrat der resultierenden Austrittsgeschwindigkeit wegen

$$v_z^2 + v_\varphi^2 \cong \left( \frac{R}{2s} l \dot{\psi} \right)^2 , \quad (4.19)$$

wieder unabhängig von  $\varphi$ .

#### 4.2.3. Überlagerung verschiedener Zylinderbewegungen

Aufgrund der Linearität der Gleichungen für das Geschwindigkeitspotential  $\Phi$  und die Fluidgeschwindigkeitskomponenten  $v_z$  und  $v_\varphi$  ist unter den Modellvoraussetzungen nach Abschnitt 2. eine Superposition bei der Überlagerung verschiedener Zylinderbewegungen statthaft.

Als Beispiel sei ein räumliches Pendel durch die Pendelausschläge  $\psi(t)$  in x- und  $\chi(t)$  in y-Richtung gegeben, wobei den resultierenden Fluid-Geschwindigkeitsfluktuationen wieder eine Grundströmung mit der stationären Geschwindigkeit  $u_0$  überlagert sein soll.

Auf der Grundlage der Ergebnisse im Abschnitt 4.2.2. erhält man dann

$$v_z = u_0 + \frac{R}{s} l \left[ \alpha \frac{ch\left(\frac{z}{l}\right)}{ch\left(\frac{l}{R}\right)} - \frac{R}{l} \right] (\dot{\psi} \cos\varphi + \dot{\chi} \sin\varphi) , \quad (4.20)$$

$$v_\varphi = \frac{R}{s} l \left[ \frac{z}{R} - \alpha \frac{sh\left(\frac{z}{R}\right)}{sh\left(\frac{l}{R}\right)} \right] (\dot{\psi} \sin\varphi - \dot{\chi} \cos\varphi) . \quad (4.21)$$

Für  $\dot{\chi} = 0$  folgen aus den Gleichungen (4.20) und (4.21) die Gleichungen (4.17) und (4.18).

### 4.3. Analytische Bestimmung der instationären Druckverteilung bei der Pendelbewegung im Ringspalt

Hier und im folgenden wird nur die Pendelbewegung des Kreiszyinders betrachtet, da zum Vergleich zwischen analytischen und experimentellen Ergebnissen der Versuchsaufbau (Bild 2) des Pendelmodells (Bild 1b) vorlag. Eine sinngemäße Anwendung auf andere Bewegungsarten ist unproblematisch.

Ausgangspunkt für die Berechnung der instationären Druckverteilung im Ringspalt ist das Gleichungssystem (3.15), in das die Fluid-Geschwindigkeitskomponenten  $v_z$  und  $v_\varphi$  nach Gl. (4.17) und (4.18) eingeführt werden.

Man erhält schließlich für die Druckverteilung  $p(z, \varphi, t)$  bei Vernachlässigung aller nicht-linearen Glieder mit  $p_1 = p(l, 0, t)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} [p(z, \varphi, t) - p_l] &= \alpha AR \left[ sh\left(\frac{l}{R}\right) - sh\left(\frac{z}{R}\right) \cos\varphi \right] \ddot{\psi} \\
- Bz(1 - \cos\varphi) \ddot{\psi} - B(l - z) \ddot{\psi} + u_0 \alpha A \left[ ch\left(\frac{l}{R}\right) \right. \\
- ch\left(\frac{z}{R}\right) \cos\varphi \right] \dot{\psi} - u_0 B(1 - \cos\varphi) \dot{\psi} + u_0 \Lambda \alpha AR \left[ sh\left(\frac{l}{R}\right) \right. \\
- sh\left(\frac{z}{R}\right) \cos\varphi \right] \dot{\psi} - u_0 \Lambda Bz(1 - \cos\varphi) \dot{\psi} - u_0 \Lambda B(l - z) \dot{\psi} + \Lambda u_0^2 (l - z) .
\end{aligned} \tag{4.22}$$

In Gl. (4.22) bedeuten die Abkürzungen A, B und  $\Lambda$ :

$$A = \frac{Rl}{s \cdot sh\left(\frac{l}{R}\right)}, \quad B = \frac{R^2}{s} \quad \text{und} \quad \Lambda = \frac{\lambda}{4s} . \tag{4.23}$$

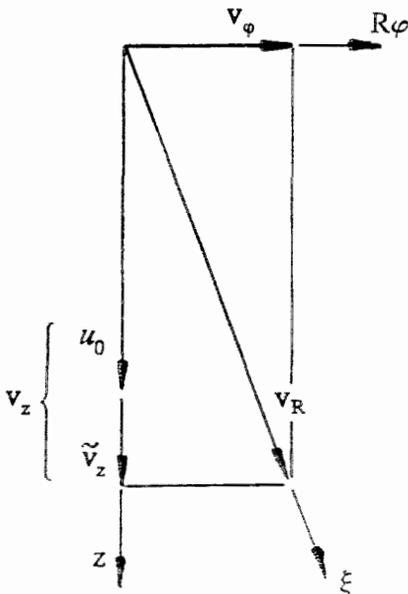
Gl. (4.22) erfüllt beide Gleichungen des Systems (3.15).

#### 4.4. Ansätze für die Fluidreibung

Die Reibungsglieder im Gleichungssystem (3.15) stellen lineare Näherungen für den Reibungsdruckabfall in z- und  $\varphi$ -Richtung dar, wobei in Analogie zu einer eindimensionalen stationären Strömung in einem Spalt mit der Weite s der Gradient des Reibungsdruckabfalles in die momentane Richtung  $\xi$  (vergl. Skizze) durch

$$-p_{R,\xi} = \lambda \cdot \frac{1}{2s} \cdot \frac{\rho}{2} v_R^2 \tag{4.24}$$

gegeben ist [4].



In Gl. (4.24) ist  $2s$  der hydraulische oder gleichwertige Druckmesser des Spaltes.

Die Zerlegung dieses Reibungsdruckgradienten in die Richtungen  $z$  und  $R\varphi$  führt zu den Näherungsgliedern in Gl. (3.15)

$$-\frac{1}{\rho} p_{R,z} = \frac{\lambda}{4s} u_0 v_z \quad (4.25)$$

und

$$-\frac{1}{\rho R} p_{R,\varphi} = \frac{\lambda}{4s} u_0 v_\varphi \quad (4.26)$$

Die Brauchbarkeit dieser Ansätze kann nur durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen entschieden werden. Dies gilt auch für die folgenden verwendeten Beziehungen für den dimensionslosen Reibungskoeffizienten  $\lambda$ , der für eine stationäre laminare Strömung in einem ebenen Spalt ( $Re < 2300$ ) lautet [5]

$$\lambda_l = \frac{96}{Re} = \frac{96}{\frac{u_0 \cdot 2s}{\nu}} = \frac{48 \nu}{u_0 s} \quad (4.27)$$

mit  $\nu = \eta/\rho$  als kinematische Zähigkeit des Fluids.

Für den Reibungskoeffizienten bei turbulenter Spaltströmung gilt bis etwa  $Re = 1 \cdot 10^4$

$$\lambda_t = \frac{0,325}{Re^{0,22}} \quad (4.28)$$

als eine Näherung aus der modifizierten Beziehung von Colebrook und White speziell für glatte und raue ebene Spalte [4]

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,57 - 2,0 \cdot \lg \left( \frac{k_s}{s} + \frac{18,6}{Re\sqrt{\lambda}} \right) \quad (4.29)$$

hier mit dem Rauigkeitsverhältnis  $\frac{k_s}{s} \approx \frac{1}{100}$

$\lambda_l$  und  $\lambda_t$  in Abhängigkeit von  $Re$  und  $u_0$  sind im Bild 3 graphisch dargestellt. Dabei wurde als Fluid Wasser ( $t = 20^\circ\text{C}$ ,  $\nu \cong 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) entsprechend den Versuchsbedingungen zugrundegelegt.

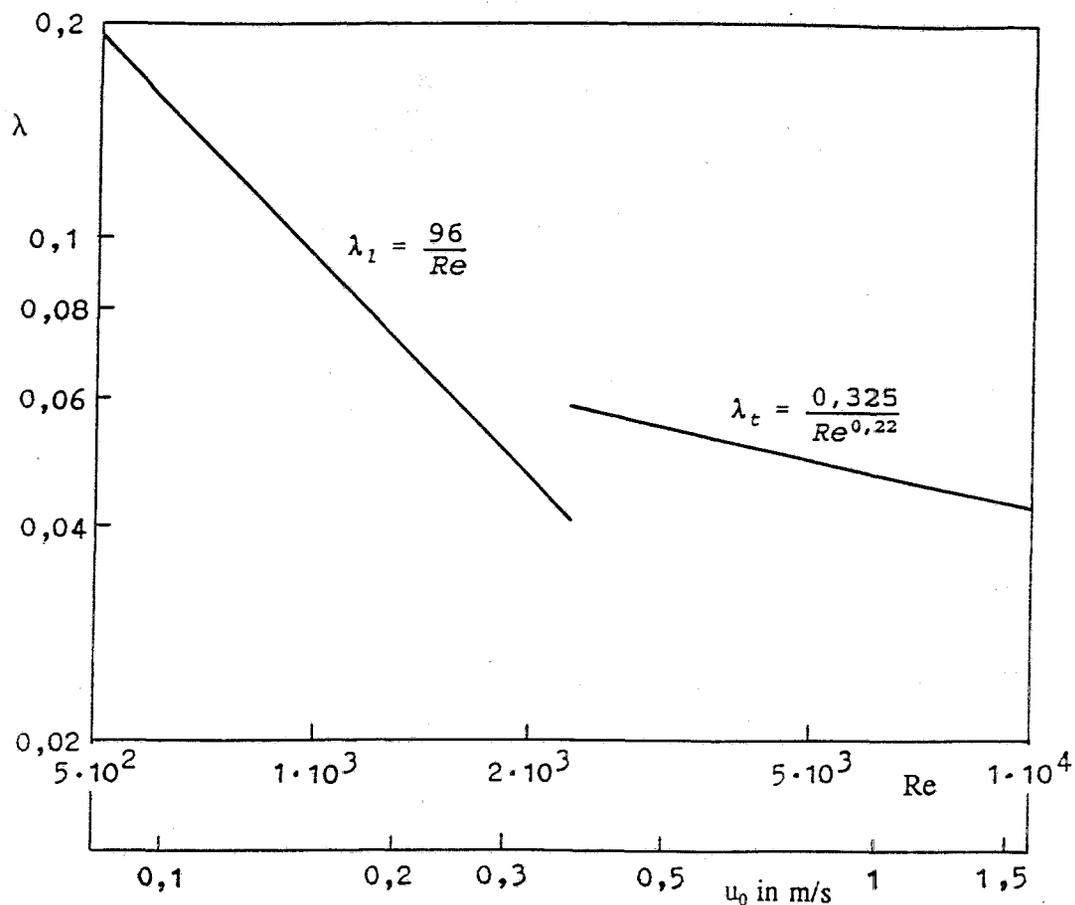


Bild 3 Reibungskoeffizient  $\lambda$  in Abhängigkeit von  $Re$  bzw.  $u_0$

Der Näherungscharakter der Gleichungen (4.25) bis (4.29) für die vorliegende Anwendung wird insbesondere für  $u_0 \rightarrow 0$  deutlich, auch da dort noch die instationären Strömungsvorgänge bei der Zylinderbewegung im Ringspalt dominieren. In der Praxis ist jedoch der Fall der turbulenten Strömung mit  $u_0 \gg \tilde{v}_z$  häufiger und damit der interessantere.

Bemerkenswert ist aber in diesem Zusammenhang, daß gerade für den Sonderfall  $u_0 = 0$  (Zylinderbewegungen im "ruhenden Fluid") die beste Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment vorliegt.

#### 4.5. Schwingungsgleichung für ebene Pendelbewegungen des Zylinders

Für das Pendelmodell (Bilder 1b, 2) ohne Erregung gilt die Schwingungsgleichung

$$\Theta \ddot{\psi} + (m'g l_s + C) \psi + R_i \int_0^l \int_0^{2\pi} p(z, \varphi, t) z \cos \varphi d\varphi dz = 0 \quad (4.30)$$

In Gl. (4.30) bedeuten (man vergl. Bild 2):

$\Theta$  - Massenträgheitsmoment des Pendels,

$m^*g$  - um den Auftrieb im Fluid vermindertes Pendelgewicht,

$m^*g = mg = 84,86 \text{ N}$  falls Pendelschwingungen an Luft,

$m^*g = m \frac{\rho_p - \rho}{\rho_p} g = 54,5 \text{ N}$  falls Schwingungen im Wasser ( $\rho_p =$  Dichte des Pendelmaterials),

$l_s$  - Schwerpunktabstand des Pendels,

$C$  - Federkonstante einer äußeren Feder am Pendel zur Erhöhung der Eigenfrequenz.

Führt man Gl. (4.22) in Gl. (4.30) ein, so erhält man eine Schwingungsgleichung, die sich in der folgenden Form darstellen läßt:

$$(\Theta + \Theta_F) \ddot{\psi} + (d_0 + d_R + d_D) \dot{\psi} + (m^*g l_s + C) \psi = 0 \quad (4.31)$$

Es ergibt sich für  $\Theta_F$  ein durch das Fluid verursachtes zusätzliches Massenträgheitsmoment (Einfluß der sogenannten mitschwingenden Fluidmasse):

$$\Theta_F = \pi \rho R^2 l^3 \frac{Ri}{s} \left\{ \frac{1}{3} - \alpha \frac{R}{l} \left[ \frac{ch\left(\frac{l}{R}\right) - 1}{sh\left(\frac{l}{R}\right)} - \frac{R}{l} \right] \right\}, \quad (4.32)$$

weiter eine Dämpfung  $d_0$ , die auch bei reibungsfreier Strömung existiert:

$$d_0 = u_0 \pi \rho R^2 l^2 \frac{Ri}{s} \left\{ \frac{1}{2} - \alpha \left[ 1 - \frac{R}{l} \frac{ch\left(\frac{l}{R}\right) - 1}{sh\left(\frac{l}{R}\right)} \right] \right\} \quad (4.33)$$

und eine durch die Fluidreibung verursachte Dämpfung:

$$d_R = u_0 \lambda \pi \varrho R_i l \left( \frac{Rl}{2s} \right)^2 \left\{ \frac{1}{3} - \alpha \frac{R}{l} \left[ \frac{ch\left(\frac{l}{R}\right) - 1}{sh\left(\frac{l}{R}\right)} - \frac{R}{l} \right] \right\} \quad (4.34)$$

Diese Dämpfungsglieder werden hier noch durch  $d_L$  ergänzt (Dämpfung durch Reibung im Pendel-Auflager).

Für das vorliegende experimentelle Pendelmodell wurde mittels Ausschwingversuchen  $d_L \cong 0,05 \text{ kgm}^2/\text{s}$  gefunden, wobei  $d_L \ll d_R$  ist.

Entsprechend Gl. (4.31) läßt sich eine dimensionslose Gesamtdämpfung

$$D = \frac{d_0 + d_R + d_L}{2\sqrt{(\Theta + \Theta_F)(m^*gl_s + C)}} \quad (4.35)$$

schreiben [6].

Bei gedämpften Schwingungen liegt  $D$  im Bereich  $0 < D \leq 1$ , wobei  $D = 1$  den aperiodischen Grenzfall kennzeichnet.

Die Berechnung der Schwingungsfrequenz erfolgte nach Gl. (4.31) entsprechend

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m^*gl_s + C}{\Theta + \Theta_F}} \cdot \sqrt{1 - D^2} \quad , \quad (4.36)$$

mit  $D$  nach Gl. (4.35) [6].

Aus den Meßergebnissen wurde  $D = D_{\text{exp}}$  mit Hilfe von

$$\ln \frac{A_k}{A_{k+2}} = \delta = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \quad (4.37)$$

bestimmt, wobei  $A_k$  und  $A_{k+2}$  zwei aufeinanderfolgende Schwingungsamplituden gleichen Vorzeichens bedeuten.

Aus Gl. (4.37) folgt

$$D = D_{\text{exp}} = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (4.38)$$

Wie aus Gl. (4.33) ersichtlich wird für  $\alpha = 1$   $d_0$  stets negativ und ein Vergleich mit Messungen am Pendelmodell ergab hierfür zu kleine theoretische Gesamtdämpfungen  $D$ .

Der physikalische Hintergrund der daher erforderlichen Variation von  $\alpha$  steht mit der Wahl geeigneter Randbedingungen, insbesondere hinsichtlich der Druckverhältnisse am Ringspalt-Austritt, im Zusammenhang und wird im folgenden näher untersucht.

#### 4.6. Einfluß der Randbedingungen

In einer ersten Studie [7] zur vorliegenden Problematik wurde der Fluideinfluß auf das Schwingungsverhalten eines einfachen Reaktor - Doppelpendelmodells mit einer eindimensionalen Strömungsführung theoretisch behandelt. Zur Vereinfachung wirken in diesem Modell die durch die Komponentenbewegung verursachten Fluidfluktuationen nur stromabwärts, beeinflussen also nicht die Eintrittsgeschwindigkeit des Fluids in den Spalt.

Das analytische Schwingungsmodell auf dieser Grundlage ist insbesondere durch eine zusätzliche strömungsabhängige Steifigkeit  $\sim u_0^2$  gekennzeichnet, die bei der hier vorgenommenen modifizierten Modellierung verschwindet. Außerdem verringert sich dabei die strömungsabhängige Dämpfung zu kleineren Werten gegenüber dem erstgenannten Modell [7].

In den auf [7] folgenden Arbeiten [8,9] wurde das eingangs beschriebene einfache Modell, in dem auch der Faktor  $\alpha$  noch nicht eingeführt war (das ist gleichbedeutend mit  $\alpha = 1$ ) näherungsweise auf eine strömungsmechanisch zweidimensional behandelte Ringspaltgeometrie übertragen, wobei wieder die o. g. strömungsabhängige Steifigkeit auftrat. Letztere konnte mit dem vorliegenden experimentellen Pendelmodell nicht bestätigt werden. Außerdem erwiesen sich die in [8] bzw. [9] berechneten Dämpfungen als zu hoch.

Als eine wesentliche Ursache für diese hohen Dämpfungen ist die Berechnung der Druckverteilung mit Hilfe der Gleichungen (4.17) und (4.18) - hier also mit  $\alpha = 1$  - aus dem System (3.15) anzusehen, wobei die Randbedingung  $p = \text{konst.}$  am Spaltaustritt nur die Erfüllung der 1. Gleichung dieses Systems ermöglichte.

Dagegen erfüllt hier Gl. (4.22) das Gesamtsystem (3.15), ergibt aber für  $\alpha = 1$  eine ungleichmäßige Druckverteilung am Austritt entgegen der Lehrmeinung "Druck am Spaltaustritt = Umgebungsdruck", und, im Gegensatz zu den Modellen [7] bis [9], zu niedrige Gesamtdämpfungen  $D$ .

Die einzige Möglichkeit, aus diesem Dilemma herauszukommen, erscheint in einer begründeten Variation von  $\alpha$ , da mit diesem Faktor das Geschwindigkeitspotential nicht in Frage gestellt wird.

Zur Untersuchung des Einflusses von  $\alpha$  auf diesen Sachverhalt sind im Bild 4 prinzipielle Druckdifferenzen zwischen zwei gegenüberliegenden Positionen im Ringspalt in der Schwingungsebene beim "Nulldurchgang" des Pendels dargestellt, wobei für  $\alpha$ -Werte nahe 1 durchaus auch pendelgeometrie- und strömungsabhängige negative Gesamtdämpfungen  $D < 1$  auftreten können.

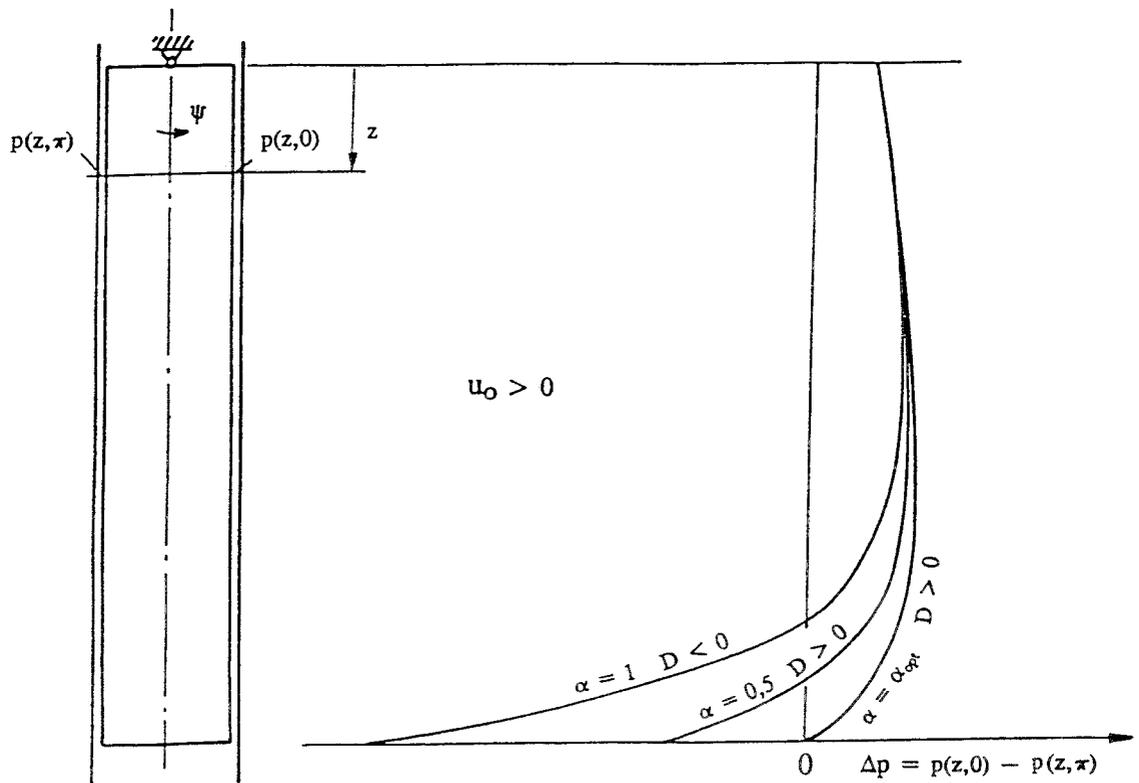


Bild 4 Druckdifferenzen am Pendelmodell für verschiedene  $\alpha$ -Werte bei  $\Psi = 0$

Bemerkenswert ist aber, daß in der Regel für  $\alpha = \alpha_{opt} < 0,5$  diese Druckdifferenz im Spalt zu Null wird, d.h. es liegt dann ein konstanter Druck im Spaltaustritt vor.

Das gilt zwar nicht für jede Pendelstellung, wie Bild 5 demonstriert. Aber zumindest sind für  $\alpha = \alpha_{opt}$  die Druckunterschiede minimiert. Damit wird die Randbedingung  $p = \text{konst.}$  am Ringspaltaustritt wenigstens näherungsweise erfüllt.

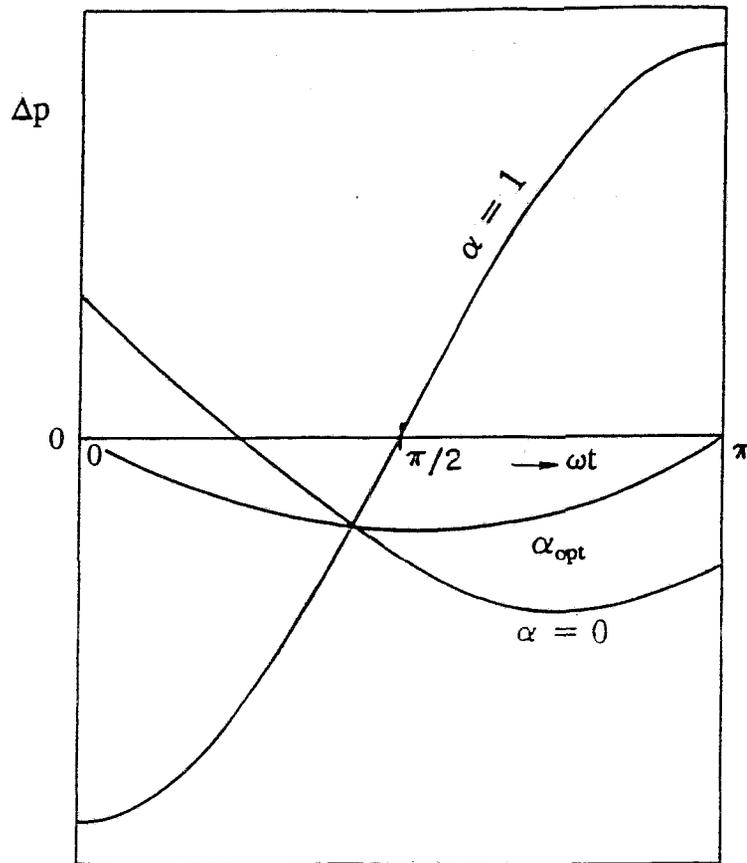


Bild 5 Druckdifferenzen am Pendelmodell bei  $z = l$  für verschiedene  $\alpha$ -Werte in Abhängigkeit vom Pendelausschlag

Entsprechend der Bedingung  $\Delta p = p(l, 0) - p(l, \pi) = 0$  für  $\psi = 0$  und  $\ddot{\psi} = 0$  bietet sich Gl. (4.22) zur Bestimmung von  $\alpha = \alpha_{opt}$  an.

Für  $u_0 = 0$  kommen aber nur die aus den Geschwindigkeitsschwankungen  $v_z$  und  $v_\varphi$  nach Gl. (4.17) und (4.18) resultierenden Druckschwankungen in Betracht. Für die vorliegende Pendelgeometrie ist bei  $\alpha \cong 0,566$   $v_z^2 + v_\varphi^2 = \text{konst.}$ , unabhängig von  $\varphi$ . Folglich ist hier auch der Druck am Ringspaltaustritt konstant, d.h.  $\Delta p = 0$ .

Für laminare Strömung folgt  $\alpha_{opt}$  aus Gl. (4.22) in Verbindung mit Gl. (4.27)

$$\alpha_{opt_1} = \frac{u_0 + \frac{12\nu}{s^2}l}{u_0 \frac{l}{R} + \frac{12\nu}{s^2}l}, \quad (4.39)$$

wobei hier formal für  $u_0 = 0$   $\alpha_{opt} = 1$  wird. Da das aber im Widerspruch zum oben Gesagten steht, wird  $\alpha_{opt}$  entsprechend Bild 6 ausgehend von  $\alpha_0 = 0,566$  bei  $u_0 = 0$  in die Abhängigkeit (4.39) approximiert.

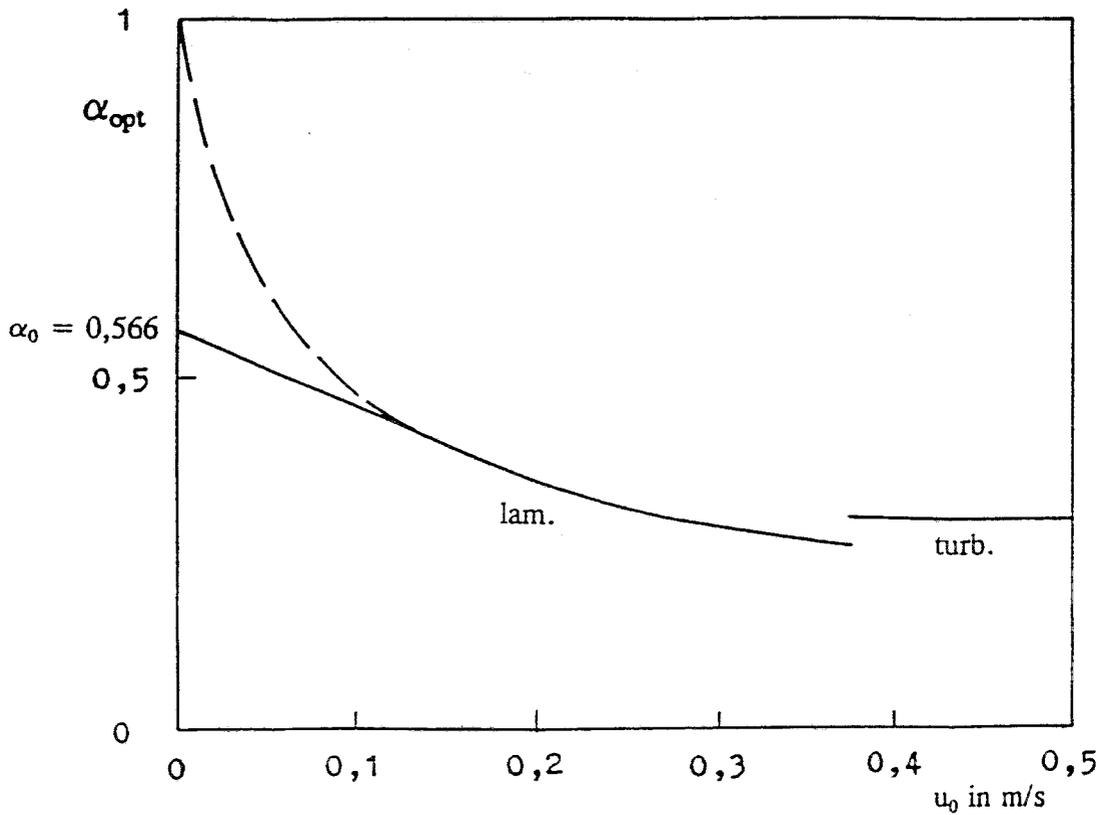


Bild 6  $\alpha_{opt}$  in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit  $u_0$

Schließlich ergibt sich für den turbulenten Strömungsbereich mit  $\lambda_t$  nach Gl. (4.28)

$$\alpha_{opt,t} = \frac{1 + \frac{0,08125 \cdot l}{Re^{0,22} \cdot s}}{\frac{l}{R} + \frac{0,08125 \cdot l}{Re^{0,22} \cdot s}} \quad (4.40)$$

für Reynoldszahlen  $> 2300$ .

#### 4.7. Experimentelle Ergebnisse am Pendelmodell

Die Parametervariationen und Meßergebnisse von insgesamt 24 Ausschwingversuchen am Pendelmodell sind in der Tab. 1 zusammengefaßt.

Versuch-Nr.	Fluid	C [kgm <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]	u <sub>0</sub> [m/s]	Re [-]	f <sub>exp</sub> [Hz]	D <sub>exp</sub> [-]	Bild
1	Luft	0	0	0	1,01	0,005	
2	"	94	0	0	2,5	0,01	7
3	"	388	0	0	4,8	0,02	
4	Wasser	0	0	0	0,33	0,23	8
5	"	94	0	0	1,02	0,087	9
6	"	94	0	0	1,03	0,083	
7	"	388	0	0	2,14	0,05	
8	"	94	0,06	372	1,04	0,11	
9	"	94	0,09	558	1,06	0,11	
10	"	94	0,13	806	1,05	0,133	
11	"	94	0,17	1054	1,04	0,155	
12	"	94	0,18	1116	1,08	0,14	
13	"	94	0,23	1426	1,10	0,146	
14	"	94	0,23	1426	1,06	0,16	10
15	"	94	0,29	1798	1,03	0,179	
16	"	94	0,30	1860	1,07	0,195	
17	"	94	0,34	2108	1,10	0,20	
18	"	94	0,34	2108	1,06	0,22	
19	"	94	0,36	2232	1,09	0,19	
20	"	94	0,37	2294	1,05	0,205	
21	"	94	0,39	2418	1,07	0,23	11
22	"	94	0,41	2542	1,07	0,21	
23	"	94	0,46	2852	1,08	0,24	
24	"	94	2,50	1,55 · 10 <sup>4</sup>	1,10	-	12

Tab. 1 Zusammenfassung der Meßergebnisse

Die Versuche 1-3 erfolgten an Luft bzw. die Messungen 1-7 im ruhenden Medium ( $u_0 = 0$ ). Die Ergebnisse der Versuche 2, 4, 5, 14, 21 und 24 liegen in den Bildern 7-12 vor.

Bis auf Versuch 24 wurde im Zeitbereich ausgewertet. Das war aber wegen der starken turbulenten Einflüsse im Versuch 24 bei  $u_0 = 2,5$  m/s bzw.  $Re = 1,55 \cdot 10^4$  nicht mehr möglich, daher ist hier das Autospektrum der Pendelschwingungen dargestellt.

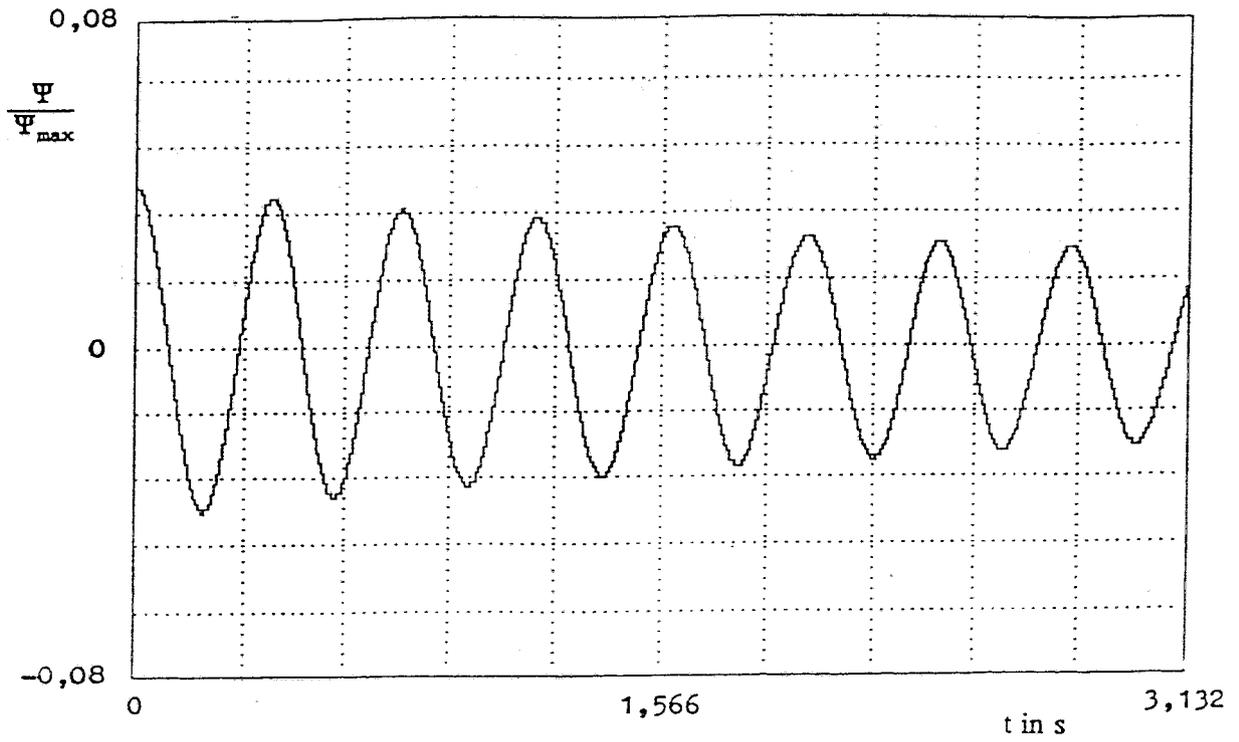


Bild 7 Pendelschwingungen an Luft, mit Feder  $C = 94 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$

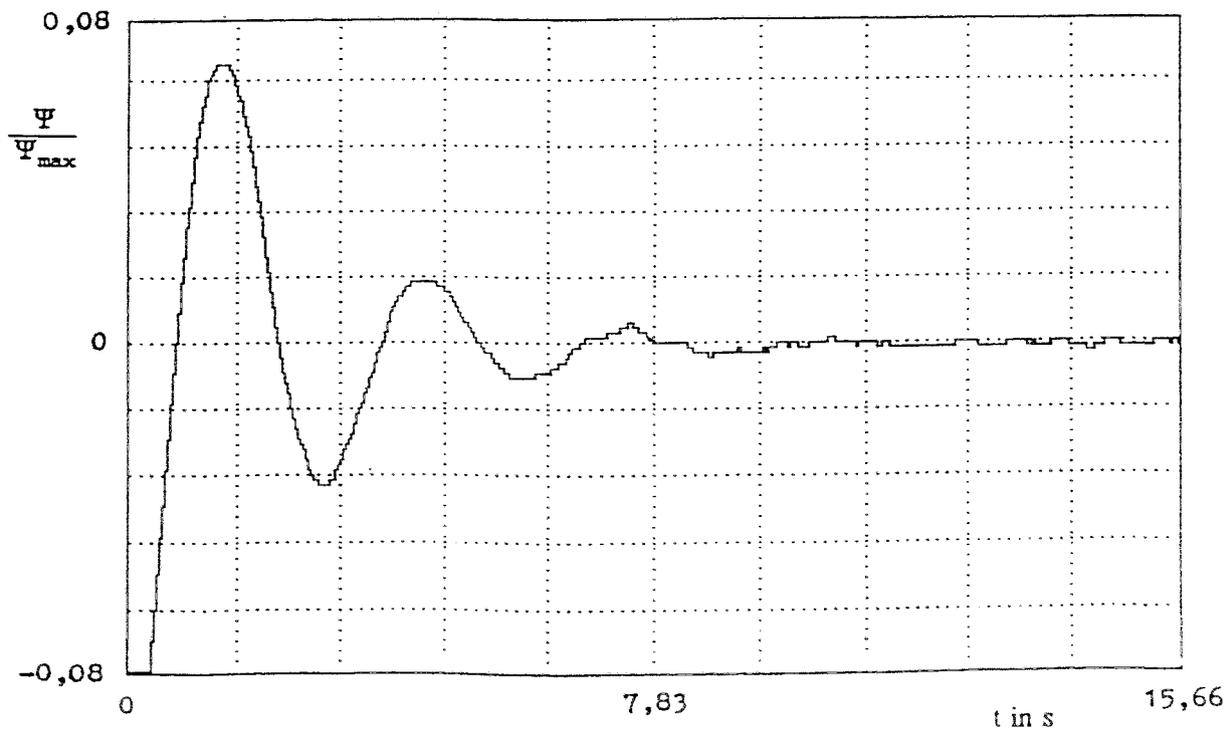


Bild 8 Pendelschwingungen im ruhenden Wasser, ohne Feder ( $C = 0$ )

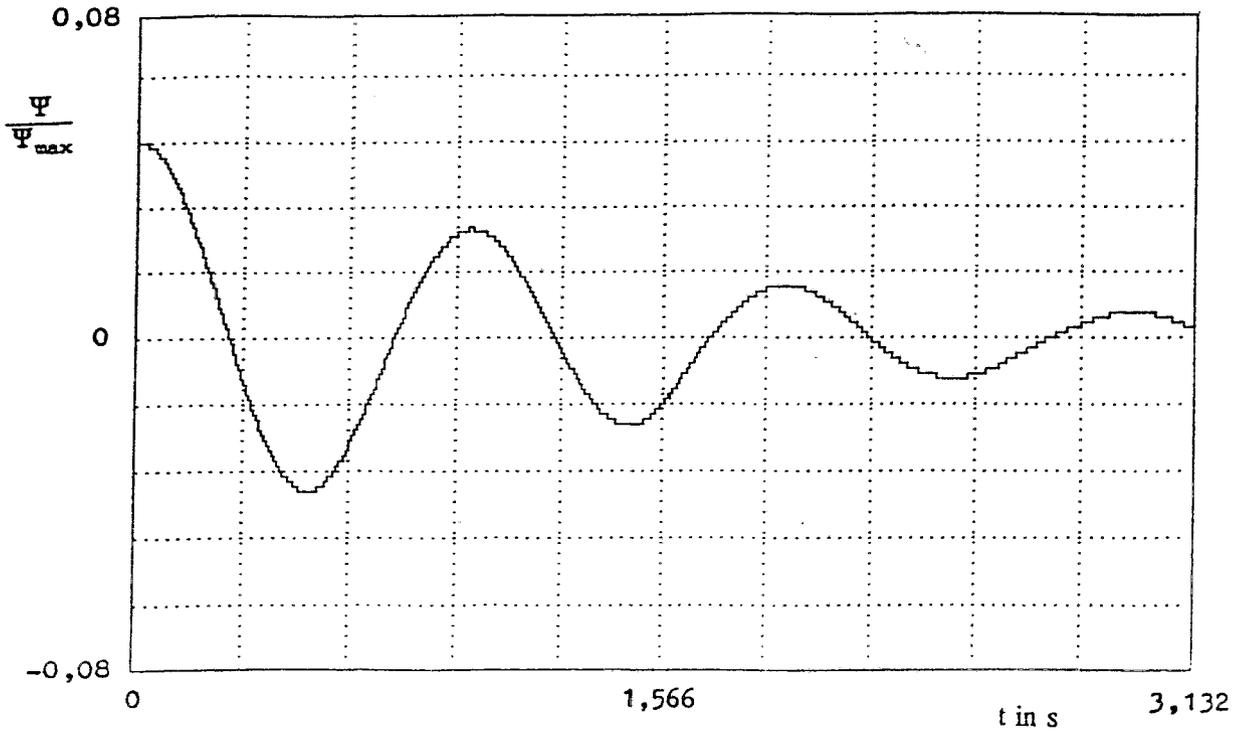


Bild 9 Pendelschwingungen im ruhenden Wasser,  
mit Feder  $C = 94 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$

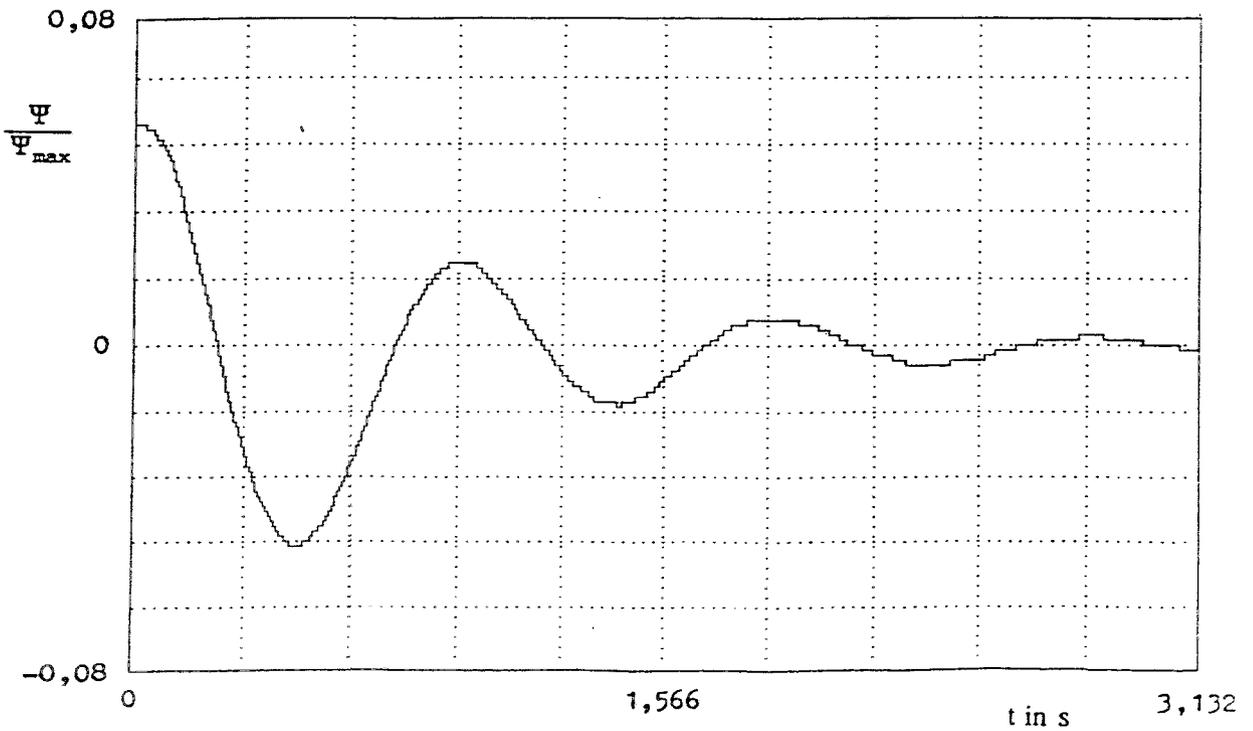


Bild 10 Pendelschwingungen im strömenden Wasser,  
mit Feder  $C = 94 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ ,  $u_0 = 0,23 \text{ m/s}$

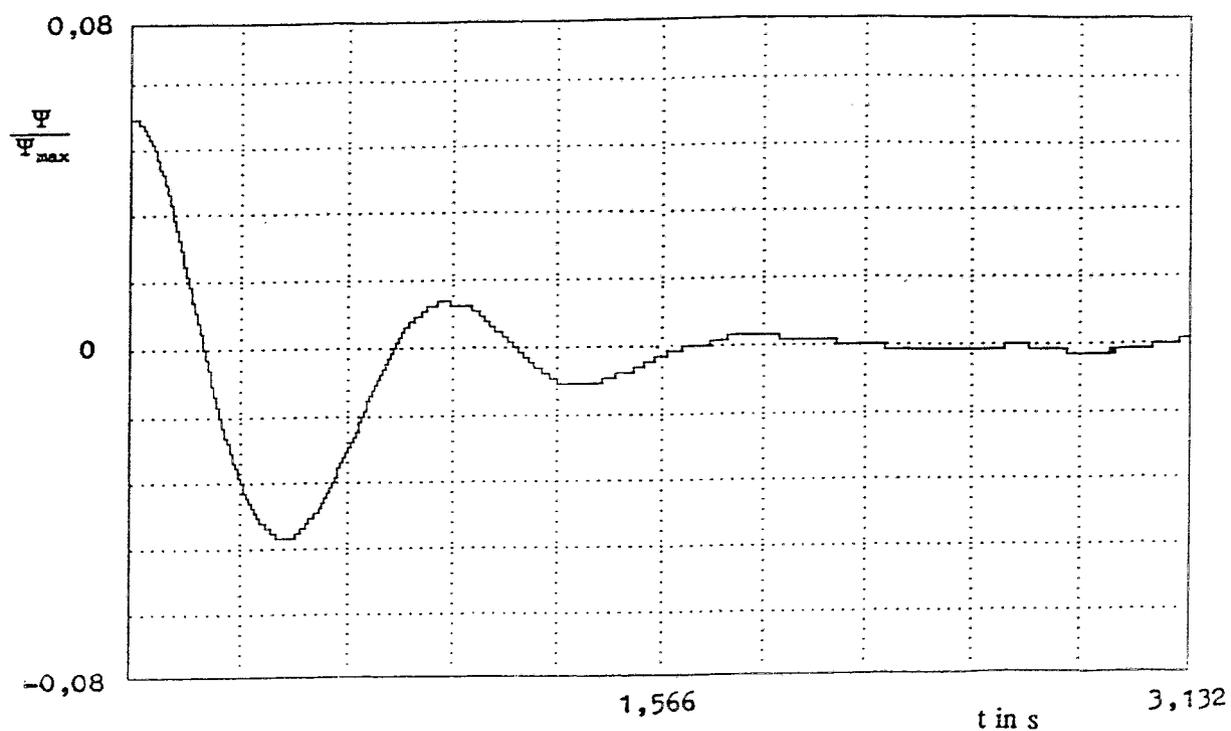


Bild 11 Pendelschwingungen im strömenden Wasser,  
mit Feder  $C = 94 \text{ kg m}^2/\text{s}^2$ ,  $u_0 = 0,39 \text{ m/s}$

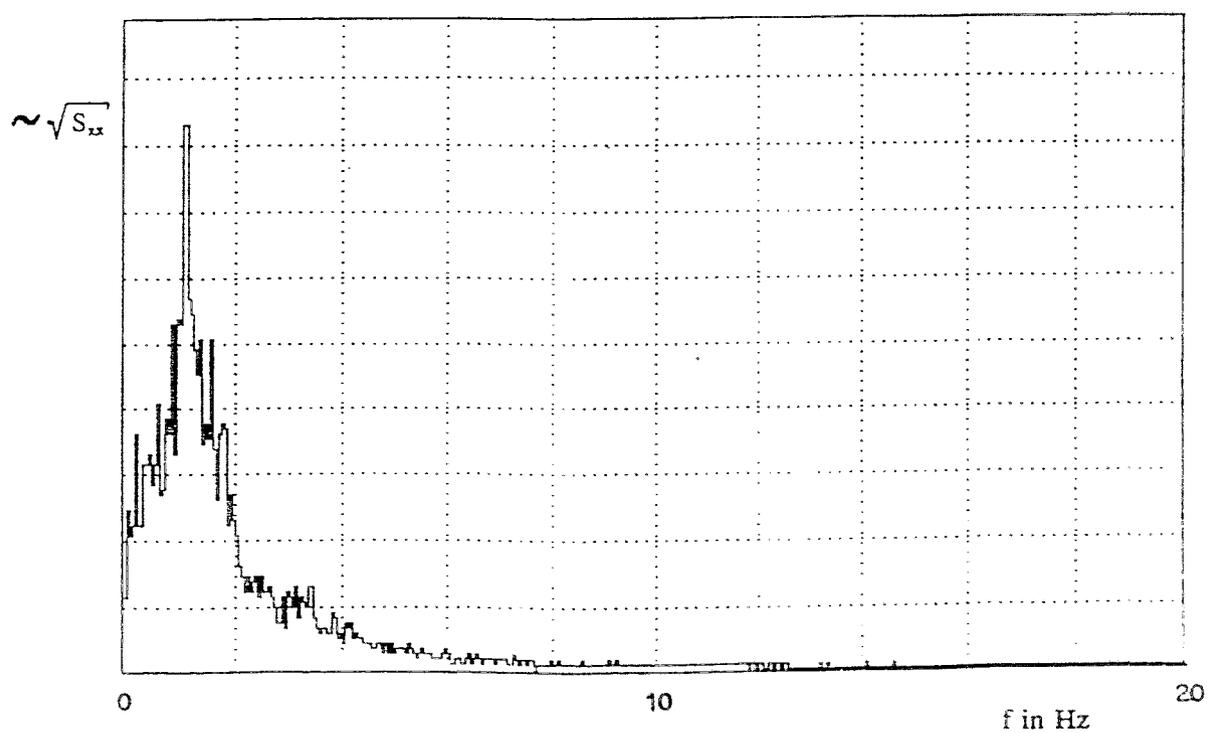


Bild 12 Autospektrum der Pendelschwingungen im  
strömenden Wasser, mit Feder  $C = 94 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$ ,  
 $u_0 = 2,5 \text{ m/s}$

## 4.8. Vergleich zwischen experimentellen und analytischen Ergebnissen

### 4.8.1. Pendelschwingungen an der Luft

Zum Vergleich mit dem experimentellen Ergebnis für die Eigenfrequenz  $f_{\text{exp}} = 1,01$  Hz entsprechend Versuch 1 nach Tab. 1 folgt mit  $m \cdot g = 84,86$  N,  $l_s = 0,1945$  m,  $\Theta = 0,4447$  kgm<sup>2</sup>,  $C = 0$ ,  $\Theta_F \cong 0$  und  $D \cong 0,005$  aus Gl. (4.36)  $f = 0,97$  Hz in befriedigender Übereinstimmung mit dem Experiment.

Die Versuche 2 und 3 dienen der Bestimmung der Federkonstanten  $C$  mit Hilfe der gemessenen Eigenfrequenzen.

### 4.8.2. Pendelschwingungen im ruhenden Fluid

Die Nachrechnung der Ergebnisse des Versuchs 4 entsprechend Bild 8 ergibt zunächst mit  $R_i = 0,05$  m,  $R = R_i + s/2 = 0,05155$  m,  $l = 0,3915$  m,  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup> und  $\alpha = \alpha_0 = 0,566$  nach Bild 6  $\Theta_F = 2,171$  kgm<sup>2</sup> (d.h.  $\Theta_F/\Theta \approx 4,9$ , was bedeutet, daß ein dominierender Fluideinfluß auf das Schwingungsverhalten vorliegt).

Weiter ist wegen  $u_0 = 0$  nach Gl. (4.33) auch  $d_0 = 0$  und nach Gl. (4.34) wird mit  $u_0 \lambda = 48$   $\nu$ /s entspr. Gl. (4.27) schließlich  $d_R = 2,711$  kgm<sup>2</sup>/s. Dabei war  $\nu = 1 \cdot 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s und mit  $d_L = 0,05$  kgm<sup>2</sup>/s wird  $D = 0,262$  aus Gl. (4.35), ein im Vergleich zum experimentellen Ergebnis  $D_{\text{exp}} = 0,23$  gutes Resultat.

Schließlich folgt für die Eigenfrequenz mit  $m \cdot g = 54,5$  N aus Gl. (4.36)  $f = 0,31$  Hz; eine ebenfalls gute Näherung an das experimentelle Ergebnis  $f_{\text{exp}} = 0,33$  Hz.

Eine Übersicht zu den Versuchen 4-7 mit Vergleich zwischen experimentellen und analytischen Ergebnissen ist in den Bildern 13 (Pendelfrequenz) und 14 (Dämpfung) dargestellt. Trotz erheblichen Vereinfachungen in der Theorie, insbesondere bezüglich des Reibungsansatzes, liegt ein recht gutes theoretisches Schwingungsmodell vor, das vor allem auch die experimentell ermittelten und im allgemeinen sehr diffizilen Dämpfungen richtig berechnet.

### 4.8.3. Pendelschwingungen im laminar und turbulent strömenden Fluid

Die analytische Bestimmung der Schwingungsdämpfung und der Pendelfrequenz erfolgte wieder mit den Gleichungen (4.35) und (4.36).

Für laminare Strömung ist  $u_0 \lambda = 48$   $\nu$ /s entsprechend Gl. (4.27) und  $\alpha$  ergibt sich aus Gl. (4.39).

Man erhält z. B. für Versuch 14 nach Bild 10 mit  $u_0 = 0,23$  m/s,  $\alpha = 0,322$ ,  $\Theta_F = 2,396$  kgm<sup>2</sup>,  $d_0 = 1,046$  kgm<sup>2</sup>/s und  $d_R = 2,992$  kgm<sup>2</sup>/s schließlich  $D = 0,12$  im Vergleich zu  $D_{\text{exp}} = 0,16$  und weiter  $f = 0,96$  Hz im Vergleich zu  $f_{\text{exp}} = 1,06$  Hz.

Für turbulente Strömung berechnet sich  $\lambda$  aus Gl. (4.28) und  $\alpha$  aus Gl. (4.40). Es ergibt sich z. B. für Versuch 21 nach Bild 11 mit  $u_0 = 0,39$  m/s  $\alpha = 0,3017$ ,  $\Theta_F = 2,415$  kgm<sup>2</sup>,

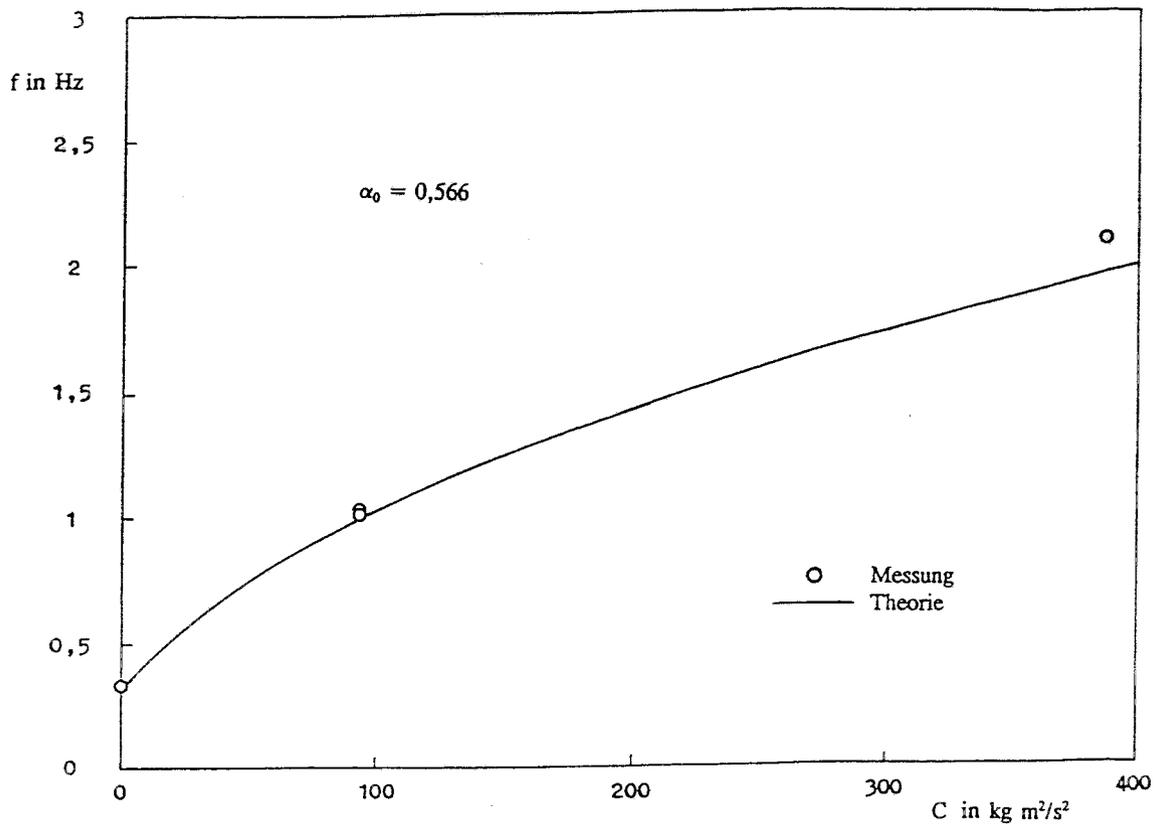


Bild 13 Pendelfrequenz im ruhenden Wasser in Abhängigkeit von C

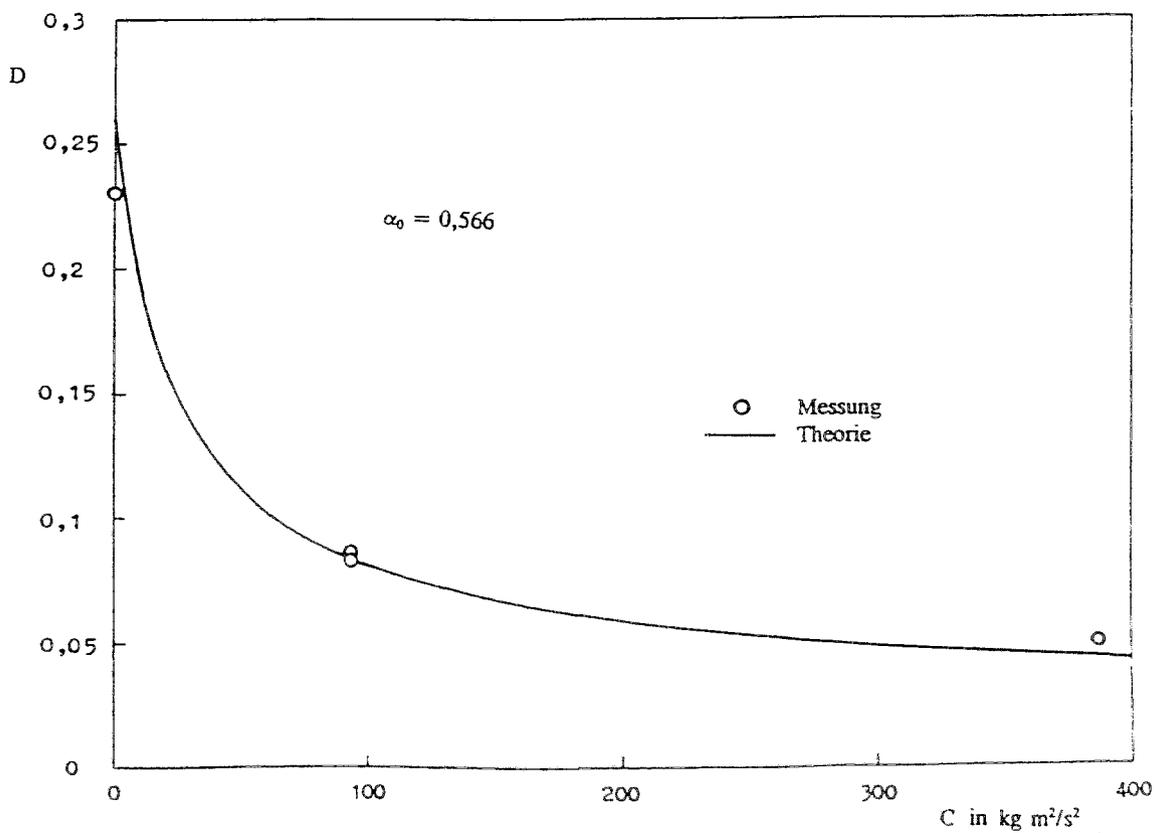


Bild 14 Schwingungsdämpfung im ruhenden Wasser in Abhängigkeit von C

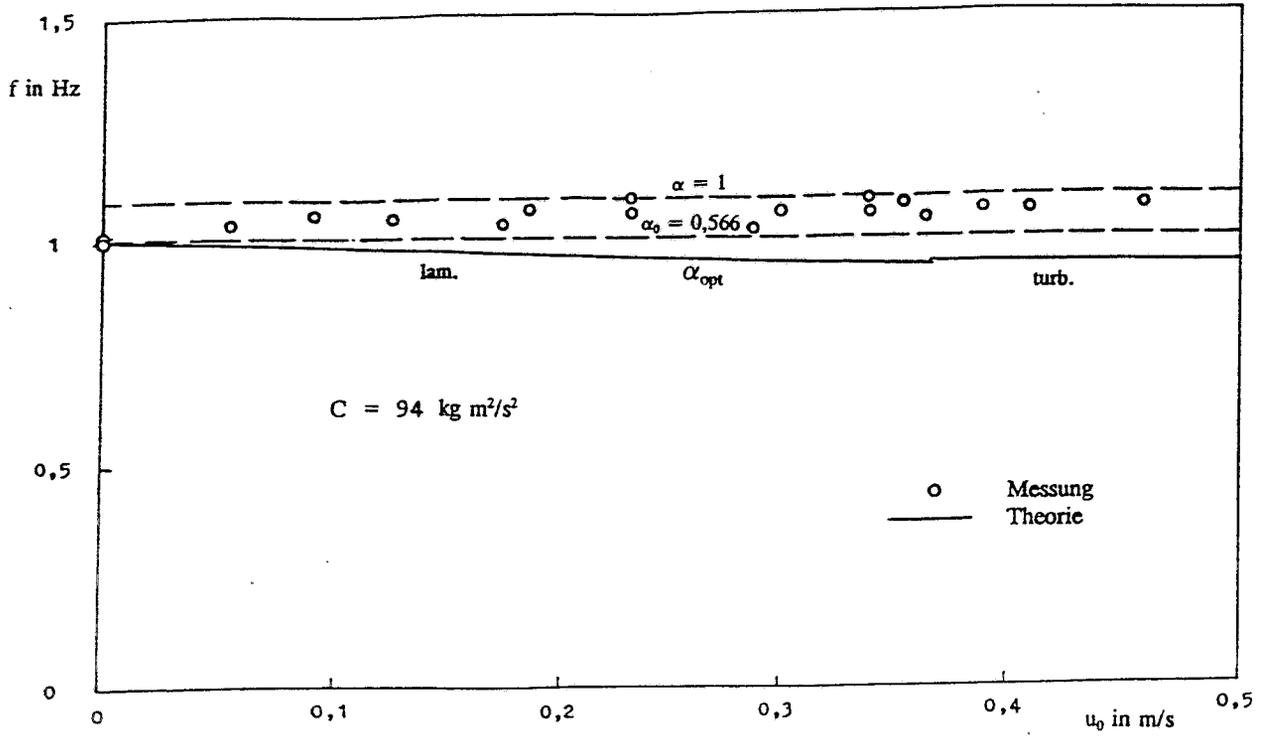


Bild 15 Pendelfrequenz im strömenden Wasser in Abhängigkeit von  $u_0$

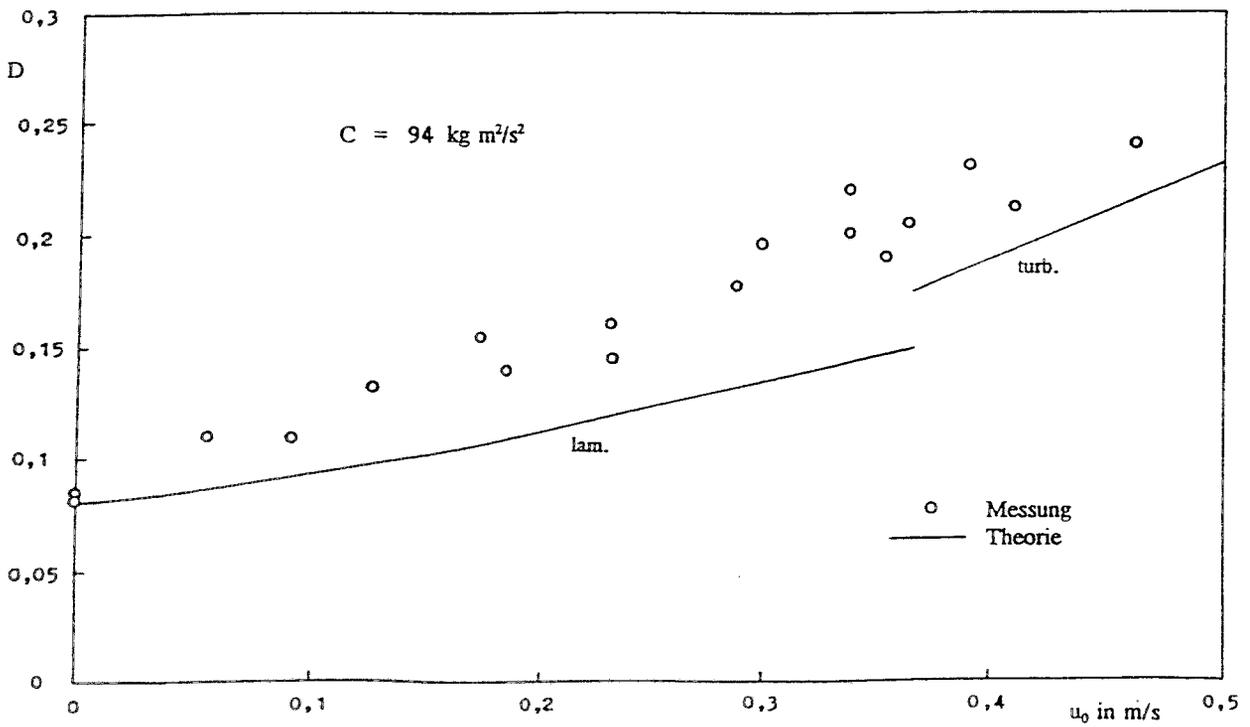


Bild 16 Schwingungsdämpfung im strömenden Wasser in Abhängigkeit von  $u_0$

$d_0 = 1,915 \text{ kgm}^2/\text{s}$  und  $d_R = 4,443 \text{ kgm}^2/\text{s}$  schließlich  $D = 0,185$  im Vergleich zu  $D_{\text{exp}} = 0,23$  und weiter  $f = 0,95 \text{ Hz}$  im Vergleich zu  $f_{\text{exp}} = 1,07 \text{ Hz}$ .

Die Ergebnisse der Versuche 8-23 im Vergleich mit den analytischen Resultaten sind in den Bildern 15 (Pendelfrequenz) und 16 (Dämpfung) übersichtlich dargestellt.

Mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit  $u_0$  vergrößern sich etwas die Abweichungen zwischen Messung und Theorie. Dabei liegen die theoretischen Werte für die Pendelfrequenz bei  $u_0 = 0,4 \text{ m/s}$  (Anfangsbereich der Turbulenz) im Mittel etwa 10% unter den experimentell ermittelten und die zugehörigen theoretischen Dämpfungen weichen im Mittel etwa 15% ab.

Die analytische Bestimmung der Pendelfrequenz ergibt mit  $\alpha = 1$  (bzw. mit Werten zwischen  $\alpha_0 = 0,566$  und 1) für nicht zu kleine Strömungsgeschwindigkeiten  $u_0$  die beste Übereinstimmung mit den Meßergebnissen. Aber für diese  $\alpha$ -Werte lassen sich die Dämpfungen nicht mehr bzw. nur noch sehr ungenau berechnen.

Eine Verbesserung der Theorie, vor allem hinsichtlich der Berechnung der Dämpfungen, erscheint einmal durch modifizierte Fluid-Reibungsansätze möglich, aber auch durch eine noch bessere Anpassung an die Druckrandbedingung  $\Delta p = 0$  am Spaltaustritt, die mit  $\alpha_{\text{opt}}$  entsprechend Bild 5 nur angenähert wird.

Ein Vergleich der Ergebnisse des vorliegenden analytischen Schwingungsmodells mit Meßergebnissen der Pendelschwingungen bei vollturbulenter Fluidströmung erfolgt nach Kompletierung der Meß- und Auswertetechnik am Pendelmodell.

## 5. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Die vorliegende Modellierung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung im 2D-Ringspalt kreiszylindrischer Strukturen baut auf den Grundgleichungen der Strömungsmechanik auf.

Dazu besteht die Möglichkeit, das mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung potentialtheoretisch ermittelte Geschwindigkeitsfeld, welches durch die Strukturbewegung erzeugt wird und mit einer Grundströmung überlagert werden kann, mit einem neuen Parameter  $\alpha$  so zu variieren, daß die Geschwindigkeits- und Druckverteilungen im Ringspalt den geforderten Randbedingungen näherungsweise genügen.

Die Druckverteilung folgt dabei durch Integration eines 2D-Systems der Navier-Stokeschen Gleichungen mit einem einfachen Ansatz für die laminare bzw. turbulente Fluidreibung bei konsequenter Linearisierung entsprechend den Modellvoraussetzungen: Relativ enge Ringspalte und kleine Bewegungsamplituden.

Die Grundlagen für die analytische Behandlung eines achsparallel verschiebbaren Zylinders und eines kreiszylindrischen Pendels werden aufgestellt.

Anhand eines experimentellen Pendelmodells erfolgt ein Vergleich von Meßergebnissen mit den theoretischen Resultaten für die Frequenz und Dämpfung von Pendel-Ausschwingvorgängen im ruhenden und strömenden Fluid.

Insbesondere für die Pendelschwingungen im ruhenden Wasser liegt eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie vor. Im strömenden Medium sind die Abweichungen in der Frequenz mit etwa 10% und für die Dämpfungen mit ca. 15% noch befriedigend.

Ein besonderer Vorteil dieses analytischen Verfahrens ist die Möglichkeit der Superposition verschiedener Bewegungsarten der zylindrischen Strukturen durch Überlagerung elementarer Geschwindigkeitsfelder, so daß auch kompliziertere bzw. räumliche Schwingungsvorgänge behandelt werden können.

Für eine weitere Verbesserung der theoretischen Ergebnisse erscheinen Modifikationen der benutzten Fluid-Reibungsbeziehungen, die strenggenommen nur für stationäre Strömungsvorgänge gelten, und der Ansätze für die Realisierung der Randbedingungen, die auch mit  $\alpha_{opt}$  nur näherungsweise erfüllt sind, wünschenswert.

Eine Anwendung dieser Grundlagen auf die Schwingungsmodellierung des Druckwasserreaktors WWER-440 ist vorgesehen.

Abschließend danken die Verfasser den Herren Ing. K. Richter, Ing. W. Zimmermann und M. Tamme für die Realisierung des Pendelmodells und ihre Unterstützung bei den Messungen.

## 6. Literatur

- [1] S.S. Chen, M.W. Wambsganss, J.A. Jendrzejczyk, Added Mass and Damping of a Vibrating Rod in Confined Viscous Fluids. *Journal of Applied Mechanics* 43 (1976), S. 325
- [2] P. Schulz, Theoretische und experimentelle Untersuchungen zur Fluid-Struktur-Wechselwirkung am Schwingungsmodell eines Druckwasserreaktors. Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 1982
- [3] M. Scheffler, FEM-Simulation von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen. Diplomarbeit am Institut für Festkörpermechanik der Technischen Universität Dresden, 1992
- [4] G. Grunwald, E. Müller, Berechnung von Regelstabschwingungen in einem hexagonalen Strömungskanal mittels der instationären Druckverteilung um die Stäbe. ZfK-507, August 1983
- [5] W. Albring, *Angewandte Strömungslehre*. Verlag Theodor Steinkopff, Dresden, 1970
- [6] H. Göldner, F. Holzweißig, *Leitfaden der Technischen Mechanik*. Fachbuch Verlag Leipzig, 1980
- [7] G. Grunwald, C. Pusch, Fluideinfluß auf das Schwingungsverhalten eines einfachen theoretischen Reaktor-Doppelpendelmodells. *Kernenergie* 32 (1989), S. 334

- [8] C. Pusch, G. Grunwald, Ein den Fluideinfluß im Ringspalt zwischen Kernbehälter und Druckgefäß berücksichtigendes Schwingungsmodell eines Druckwasserreaktors. Kernenergie 34 (1991), S. 198
- [9] C. Pusch, Schwingungsverhalten eines Druckwasserreaktors unter Berücksichtigung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung. Dissertation, TH Zittau, 1991

---

**FWSM - 1/93**

**Archiv-Ex.:**

**INSTITUT FÜR SICHERHEITSFORSCHUNG**

**G. Grunwald und E. Altstadt**

**Analytische und experimentelle Untersuchungen  
zur Modellierung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung  
in einem 2D-Ringspalt**

Forschungszentrum  
Rossendorf e.V.  
- Zentralbibliothek -  
Postfach 510119  
01314 Dresden

**Januar 1993**