

FORSCHUNGSZENTRUM  
ROSSENDORF e.V.

FZR

---

Archiv-Ex.:

FZR-75

März 1995

*André Peshier*

Das Quark-Gluon-Plasma mit  
thermischen Partonenmassen  
und Konsequenzen des Modells für  
die thermische Dileptonenemission

**Forschungszentrum Rossendorf e.V.**  
**Postfach 51 01 19 · D-01314 Dresden**  
**Bundesrepublik Deutschland**  
**Telefon (0351) 591 3258**  
**Telefax (0351) 591 3700**  
**E-Mail [kaempfer@gamma.fz-rossendorf.de](mailto:kaempfer@gamma.fz-rossendorf.de)**

**Das Quark-Gluon-Plasma mit  
thermischen Partonenmassen  
und Konsequenzen des Modells für  
die thermische Dileptonenemission**

Diplomarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Physiker

vorgelegt von

André Peshier

geboren in Mittweida

Institut für Theoretische Physik  
Fachrichtung Physik  
Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften  
der Technischen Universität Dresden  
1994

eingereicht am 24. November 1994

Gutachter: Prof. Dr. Gerhard Soff

Dr. Burkhard Kämpfer

## Kurzfassung

Es wird gezeigt, daß die reinen SU(3)-Eichfeldtheorie-Gitterdaten mit einem Quasiteilchenmodell nicht-wechselwirkender Gluonen, die eine effektive thermische Masse  $m^2(T) = \Gamma^{-1} g^2(T) T^2$  tragen, reproduzierbar sind. Wir finden mit  $g^2 = 16\pi^2 \left[ 11 \ln \left\{ (T + T_s)/T_c \right\}^2 \right]^{-1}$  aus einem Fit der Gitterdaten für das Gluonengas  $\Gamma = 3.3$  und  $T_s = 0.023 T_c$ . Dieses Modell von Quasiteilchen mit thermischen Massen wird auf das Quark-Gluon-Plasma (QGP) ausgedehnt. Wir erhalten eine neue phänomenologische Zustandsgleichung für das QGP mit einer im Vergleich zu der bekannten Bag-Modell-Zustandsgleichung reduzierten latenten Wärme. Als Konsequenz dieser Zustandsgleichung finden wir im Bjorken-Bild eine langsamere Abkühlung der zentralen Region in Schwerionenstößen sowie eine verkürzte Lebensdauer der Mischphase. Da die Quarks eine thermische Masse in der Größenordnung von 500 MeV erhalten, wird die  $M_T$ -Skalierungseigenschaft des Dileptonenspektrums  $dN/dM^2 dQ_T^2 dY$  in typischer Weise verletzt, was ein mögliches Signal zur Detektierung des QGP in Schwerionenstößen darstellt.

## Abstract

The pure SU(3)-gauge field lattice data are shown to be reproducible by a quasi-particle model of non-interacting gluons with an effective thermal mass  $m^2(T) = \Gamma^{-1} g^2(T) T^2$ . Using  $g^2 = 16\pi^2 \left[ 11 \ln \left\{ (T + T_s)/T_c \right\}^2 \right]^{-1}$  we find  $\Gamma = 3.3$  and  $T_s = 0.023 T_c$  by a fit to the numerical data for the gluon gas. This concept of quasi particles with thermal masses is then generalized to the quark-gluon plasma (QGP). We obtain a new phenomenological equation of state for the QGP with a reduced latent heat as compared to the well known bag-model equation of state. In the Bjorken-picture of heavy-ion collisions this equation of state results in a modified cooling behavior of the central QGP region as well as in a shorter life of the mixed phase. The effective thermal quark masses which have the order of magnitude of 500 MeV violate the  $M_T$ -scaling property of the  $dN/dM^2 dQ_T^2 dY$  dilepton spectrum which seems to provide a typical signal for the detection of the QGP in heavy-ion collisions.

# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Einige Einheiten und Konventionen . . . . .	4
<b>1 Thermodynamische Modelle</b>	<b>5</b>
1.1 Thermodynamik . . . . .	5
1.1.1 Allgemeine Beziehungen . . . . .	5
1.1.2 Zwei wichtige Grenzfälle . . . . .	8
1.2 Das Bag-Modell . . . . .	12
1.2.1 Das Bag-Modell für Hadronen . . . . .	12
1.2.2 Das Bag-Modell des QGP . . . . .	13
1.2.3 Der Phasenübergang im Bag-Modell . . . . .	17
1.3 Das Gluonengas . . . . .	23
1.3.1 Allgemeines zur Thermodynamik von Eichfeldern . . . . .	23
1.3.2 Gibt es einen gluonischen Phasenübergang? . . . . .	24
1.3.3 Die Übertragung des Bag-Modells auf das Gluonengas . . . . .	27
1.3.4 Gitter-Daten und ihre Interpretation . . . . .	29
1.4 Gluonen mit thermischer Masse . . . . .	34
1.4.1 Die Dispersionsrelation der Quasi-Gluonen . . . . .	34
1.4.2 Thermische Masse für Gluonen . . . . .	36
1.5 Das QGP mit thermischen Massen . . . . .	41
<b>2 Ein dynamisches Modell für Schwerionenstöße</b>	<b>49</b>
2.1 Die Bjorken-Gleichung . . . . .	49
2.2 Die Dynamik des Phasenüberganges . . . . .	56
2.3 Die Kühlung mit thermischen Massen . . . . .	60
<b>3 Thermische Emission von Dileptonen</b>	<b>63</b>
3.1 Thermische Leptonen als QGP-Proben . . . . .	63
3.2 Der Wirkungsquerschnitt der Reaktion $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$ . . . . .	64
3.3 Thermische Raten $q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}$ . . . . .	67
3.4 Leptonenemission in Schwerionenstößen . . . . .	71
3.5 Der Fall $T(\tau) \sim \tau^{-1/3}$ , $m_q = 0$ . . . . .	76
3.6 Konsequenzen der thermischen Masse in Schwerionenstößen . . . . .	79
<b>4 Resumé</b>	<b>85</b>

<b>A</b>	<b>Mathematische Nachträge</b>	<b>86</b>
A.1	Relativistische Bose- und Fermi-Integrale . . . . .	86
A.1.1	Stefan-Boltzmann-Integrale . . . . .	86
A.1.2	Die Hochtemperaturentwicklung der Bose- und Fermi-Integrale . .	86
A.2	Zur relativistischen Hydrodynamik . . . . .	90
A.3	Anhang zum Kapitel 3 . . . . .	92
A.3.1	Zur Streutheorie . . . . .	92
A.3.2	Auswertung der Spinsumme . . . . .	96
A.3.3	Auswertung des Integrals $\mathcal{I}$ . . . . .	98

# Einleitung

Nach heutigen Vorstellungen besteht Materie aus den elementaren Leptonen sowie aus Hadronen, d.h., Mesonen und Baryonen. Die Wechselwirkung zwischen den Bausteinen der Materie wird ohne Widerspruch zu bisherigen Experimenten durch Quanten-Eichfeldtheorien beschrieben (nur die Gravitation ist vorerst nur als klassische Theorie verstanden, ihre Quantisierung scheint jedoch nicht unmöglich zu sein). Die Eichtheorie der elektromagnetischen Erscheinungen, die Quantenelektrodynamik (QED), gilt als die am genauesten bestätigte physikalische Theorie überhaupt. Die QED stand auch Pate bei der Entwicklung der Theorie der starken Wechselwirkung, die anfangs hauptsächlich durch die Suche nach einer Erklärung des 'Periodensystems' der Hadronen motiviert war.

In den 60er Jahren wurde von Gell-Mann, Zweig, Ne'eman u.a. unter Annahme elementarer Bausteine der Hadronen, der Quarks, ein Schema vorgeschlagen, in das sich nicht nur alle damals bekannten Hadronen einordnen ließen, sondern welches auch die Vorhersage eines neuen Teilchens  $\Omega$  erlaubte, das bald darauf gefunden wurde. Der Einwand, daß Quarks nie frei beobachtet wurden, stellte sich später als Argument zugunsten der heute etablierten Theorie der starken Wechselwirkung, der Quantenchromodynamik (QCD), heraus. Es konnte nämlich gezeigt werden, daß eine nicht-Abelsche Eichtheorie vom Yang-Mills-Typ renormierbar ist und eine mit wachsendem Abstand zunehmende Anziehung zwischen Quarks vorhersagt, so daß zwei Quarks nicht beliebig weit separiert werden können. Andererseits verhalten sich Quarks nach dieser Theorie bei hohen Energien wie fast freie (punktförmige) Teilchen, was experimentell in tief-inelastischen Elektron-Kern-Stößen bestätigt wurde. Diese Eigenschaft der *asymptotischen Freiheit* ist eine direkte Folge der Tatsache, daß die Eichbosonen der nicht-Abelschen QCD, die Gluonen, selbst eine Ladung tragen und somit direkt miteinander wechselwirken können. Dies stellt eine wesentliche Verkomplizierung der Theorie im Vergleich zu Abelschen Eichfeldtheorien wie der QED dar und ist der Grund dafür, daß man bis heute bei der analytischen Behandlung der QCD fast ausschließlich auf das perturbative Regime beschränkt, bzw. außerhalb dessen auf phänomenologische Modelle oder numerische Simulationen angewiesen ist.

Während auf großen Längenskalen die Hadronen als 'elementar' (d.h., ohne innere Struktur) angesehen werden können, sollten bei hohen Baryonendichten  $n_B$  die ausgedehnten Hadronen einander überlappen und ihre inneren Strukturen daher wesentlich werden. Aufgrund der asymptotischen Freiheit erwartet man, daß sich die Quarks bei derart kleinen Abständen wie quasi-freie Partikel verhalten, was einer Zunahme der Zahl der Freiheitsgrade entspricht. Diese Überlegung stellt ein einfaches Argument für die Annahme dar, daß bei hohen Teilchendichten ein Übergang der stark wechselwirkenden Hadronenmaterie in einen Zustand mit neuen Eigenschaften stattfindet, in dem auch die in Hadronen in einem Kondensatzustand vorliegenden Gluonen thermisch angeregt sind. Dieser Zustand wird als *Quark-Gluon-Plasma* (QGP) bezeichnet.

Betrachtet man z.B. ein Modell-System der leichtesten Hadronen, der Pionen, so stellt sich im thermodynamischen Gleichgewicht bei einer Temperatur  $T$  eine Pionendichte<sup>1</sup>

$$n(T) = \frac{N}{V} = \frac{3\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \approx 0.37 \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3$$

ein. Demnach würde bei einer Temperatur von  $T \sim 200$  MeV das gesamte Volumen von Pionen, welche eine Ladungsradius von etwa 0.8 fm besitzen, ausgefüllt sein. Auch bei kleinen Temperaturen, aber großen Drücken, d.h., wenn die Baryondichte die Größenordnung der 10fachen Kerndichte  $n_0$  erreicht, ist es denkbar, daß die Hadronen ihre Individualität verlieren und in Quarks und Gluonen dissoziieren.

Qualitativ hat man von dem Übergang von Hadronen zu Quarks und Gluonen eine Vorstellung, wie in der Abbildung 0.1 dargestellt. Der Einfachheit halber wird im folgen-

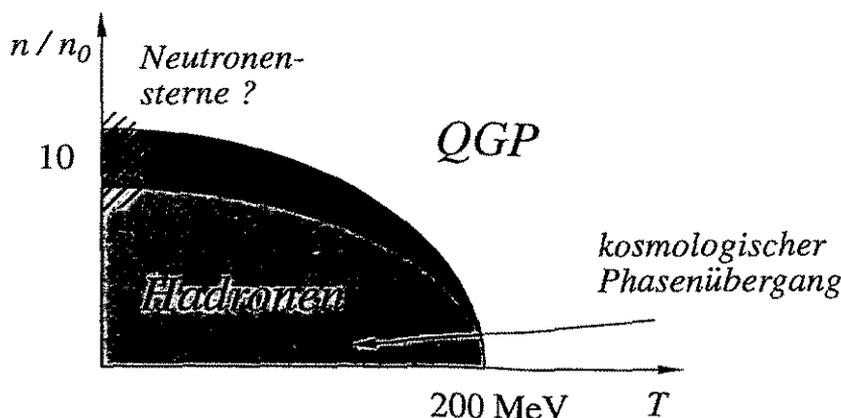


Abbildung 0.1: Schematisches Phasendiagramm stark wechselwirkender Materie; die kritische Baryondichte ist von der Größenordnung der 10fachen Kerndichte  $n_0$  und die kritische Temperatur beträgt etwa 200 MeV. Jenseits der Grenzlinie liegt die stark wechselwirkende Materie als QGP vor.

den die Grenze zwischen Hadronenmaterie und dem QGP als Phasengrenze bezeichnet, obwohl noch unklar ist, ob es sich um einen Übergang erster oder zweiter Ordnung, bzw. überhaupt um einen Phasenübergang im thermodynamischen Sinne handelt. Diese Grenze liegt weit außerhalb dessen, was alltäglicher Erfahrung vertraut ist. Es gibt jedoch Abschätzungen, daß im Inneren kompakter Neutronensterne derart extreme Bedingungen herrschen könnten, daß die Materie als kaltes QGP oder Quarkmaterie vorliegt. Weiter deuten viele Tatsachen darauf hin, daß das Universum in den ersten Mikrosekunden der Evolution nach dem Urknall einen Phasenübergang  $QGP \rightarrow$  Hadronen durchlaufen hat. In manchen Modellen, wie z.B. zur primordialen Elementsynthese oder zu dem Problem dunkler seltsamer Materie im All, scheint die Annahme einer QGP-Phase und eines kosmologischen Phasenüberganges sogar notwendig zu sein, um gewisse astrophysikalische Beobachtungen zu erklären.

<sup>1</sup>Die Pionen werden hier als freie Teilchen idealisiert; für Temperaturen  $T \geq m_\pi$  kann in einer guten Approximation auch die Pionenmasse vernachlässigt werden.

Die einzige Möglichkeit, das QGP unter Laborbedingungen direkt zu studieren, scheint durch Kollision von schweren und hochenergetischen Atomkernen in großen Beschleunigeranlagen, wie AGS in Brookhaven und SPS am CERN, gegeben zu sein. Auch die geplanten Anlagen RHIC (Brookhaven) und LHC (CERN) mit Schwerpunktsenergien von 100 GeV bzw. 3 TeV pro Nukleon sollen der Suche nach Anzeichen des QGP sowie der Erforschung seiner Eigenschaften dienen. Diese Experimente werden die einzigartige Möglichkeit bieten, Materie unter Bedingungen ähnlich denen des heißen frühen Universums zu untersuchen und dadurch eine Reihe von Prozessen zu verstehen, deren Konsequenzen heute nur noch indirekt zu beobachten sind. Ebenso wie in der QED, wo hochgenaue Beobachtungen die Entwicklung der Theorie stimulieren, erhofft man auch durch die RHIC- und LHC-Experimente Hinweise für die Entwicklung neuer theoretischer Konzepte der QCD und einen Beitrag zum Verständnis dessen, 'was die Welt im Innersten zusammenhält'.

Beim jetzigen Stand der Erkenntnis sind zum einen Modelle zur Beschreibung des QGP auszuarbeiten und andererseits Methoden zu finden, die einen eindeutigen Nachweis einer kurzzeitigen Existenz des QGP in Schwerionenstößen durch sogenannte QGP-Signale erlauben. Die vorliegende Arbeit nimmt Bezug auf beide Fragestellungen und ist wie folgt gegliedert.

1) Im ersten Kapitel wird zunächst das Fundament der Gleichgewichtsthermodynamik abgesteckt, auf dem die folgenden Betrachtungen beruhen. Im Vergleich mit numerischen Ergebnissen zeigt es sich, daß das Gluonenplasma durch eine einfache Bag-Modell-Zustandsgleichung bzw. durch eine Störungstheorie niedrigster Ordnung nicht adäquat beschreibbar ist. Wir finden jedoch, daß ein Quasiteilchenmodell mit thermischen Gluonenmassen,  $m \sim g(T)T$  ( $g(T)$  ist die temperaturabhängige Colorladung) die Gitterdaten reproduziert. Das Konzept der thermischen Masse auf Quarks erweiternd, erhalten wir eine neue phänomenologische Zustandsgleichung für das QGP.

2) Im Kapitel 2 wird die Dynamik zentraler Schwerionenstöße im Bjorken-Bild (d.h., in der Näherung der eindimensionalen Hydrodynamik) dargestellt. Es werden die Abkühlung eines Plasma-Schlauches mit der hier vorgeschlagenen Zustandsgleichung bei longitudinaler Expansion untersucht und Unterschiede zur bekannten Bag-Kühlung  $T(\tau) \sim \tau^{-1/3}$  ( $\tau$  ist die Eigenzeit) diskutiert.

3) Im dritten Kapitel wird die Emission von Leptonen aus dem QGP am Beispiel des Prozesses  $q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}$ , d.h., der Umwandlung eines Quark-Antiquark-Paares in ein Leptonenpaar, in niedrigster Ordnung der starken Kopplungskonstanten berechnet. Mit dem vorgeschlagenen Modell der thermischen Partonenmassen erhalten wir ein thermisches Spektrum, welches sich von bisherigen Voraussagen in charakteristischer Weise unterscheidet. Die in diesem Spektrum zum Ausdruck kommenden nicht-perturbativen Eigenschaften des QGP werden als mögliches Signal zur Detektierung dieses Materiezustandes in hochenergetischen Schwerionen-Stoßprozessen diskutiert.

4) In dem kurzen Kapitel 4 werden die in der vorliegenden Arbeit gefundenen Ergebnisse in einem Resumé zusammengefaßt.

A) Im Anhang sind einige Ableitungen erläutert.

Einige der in dieser Arbeit gefundenen Ergebnisse sind in [Pe1], [Pe2] und [Pe3] publiziert.

## Einige Einheiten und Konventionen

Die angepaßte Einheit der Länge ist in der hadronischen Physik

$$1 \text{ fm} = 1 \text{ Fermi} = 10^{-15} \text{ Meter.}$$

Als charakteristische Zeitskala ergibt sich bei relativistischen Geschwindigkeiten  $v \sim c$

$$\frac{1 \text{ fm}}{c} = \frac{1}{2.99792458} 10^{-23} \text{ Sekunden.}$$

Die Energie wird zweckmäßig in Einheiten von

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \cdot 1.60218 \cdot 10^{-19} \text{ AsV} = 1.60218 \cdot 10^{-13} \text{ Nm}$$

gemessen. In allen thermodynamischen Beziehungen ist die Boltzmann-Konstante

$$k_B \equiv 1$$

gesetzt. Damit erhält die Temperatur die Dimension der Energie,

$$1 \text{ MeV} = \frac{1 \text{ MeV}}{k_B} = \frac{1.60218 \cdot 10^{-13} \text{ Nm}}{1.38066 \cdot 10^{-23} \text{ Nm/K}} = 1.16044 \cdot 10^{10} \text{ K.}$$

Auch die Lichtgeschwindigkeit wird im weiteren

$$c \equiv 1$$

gesetzt. Das Wirkungsquantum ist in diesen 'Energie-Länge'-Einheiten

$$\hbar = 1.05457 \cdot 10^{-34} \text{ Nms} \frac{1 \text{ MeV}}{1.60218 \cdot 10^{-13} \text{ Nm}} \frac{1 \text{ fm}/c}{10^{-15} \text{ m}/c} = 197.327 \text{ MeV fm.}$$

In dem Gauß'schen Maßsystem der Elektrodynamik gilt für die Dielektrizitätskonstante  $4\pi \epsilon_0 \equiv 1$ .

Die Komponenten von 4-Vektoren werden mit griechischen Buchstaben indiziert, während (3-) Vektoren durch lateinische Indizes gekennzeichnet werden. Es ist somit zu unterscheiden zwischen dem Ortsvektor  $x_i = (x_1, x_2, x_3) = x^i$  und dem (kontravarianten) 4-Vektor  $x^\alpha = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, x_1, x_2, x_3)$ . Der kovariante metrische Tensor des Minkowskischen Raumes ist diagonal,

$$g_{\mu\nu} := \text{Diag}(1, -1, -1, -1) = (g^{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu},$$

und zu sich selbst invers und damit gleich dem zugehörigen kontravarianten metrischen Tensor  $g^{\mu\nu}$ .  $g_{\mu\nu}$  transformiert kontravariante 4-Vektoren in die kovariante Darstellung,

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\nu.$$

Durch die Einsteinsche Konvention, über zwei gleiche obere und untere Indizes automatisch zu summieren, werden Kontraktionen wie die obige und Produkte in kurzer Schreibweise dargestellt,

$$ab := a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu.$$

Die partielle Ableitung einer Größe  $\phi$  nach  $x^\mu$  wird wie folgt bezeichnet

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi =: \partial_\mu \phi =: \phi_{,\mu} = g_{\mu\nu} \partial^\nu \phi.$$

# 1. Thermodynamische Modelle

## 1.1 Thermodynamik

Der Apparat der Thermodynamik von Systemen im thermodynamischen Gleichgewicht wird wiederholt und der Begriff der Zustandsgleichung eingeführt. Die Zustandsgleichung freier Teilchen wird angegeben, und es werden die Grenzfälle leichter und schwerer Teilchen untersucht.

### 1.1.1 Allgemeine Beziehungen

Es wird ein Gas von Teilchen im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (thermisch, chemisch, mechanisch) betrachtet. Ein solches System läßt sich durch die Angabe eines thermodynamischen Potentials beschreiben. Zur Behandlung von Systemen mit variabler Teilchenzahl und gegebener Temperatur ist es günstig, als Potential die Gibbs'sche Freie Energie  $J$  zu wählen. Dieses Potential wird auch oft als großkanonisches Potential  $\Omega$  bezeichnet; in vielen Abhandlungen über Thermodynamik findet auch die Bezeichnung Landau-Potential Verwendung.  $J$  steht im Zusammenhang mit der inneren Energie  $E$ , der Entropie  $S$  sowie der Teilchenzahl  $N$  des Systems; die unabhängigen Größen sind das Volumen  $V$ , die Temperatur  $T$  und das chemische Potential  $\mu$ ,

$$J(V, T, \mu) := E(V, T, \mu) - S(V, T, \mu)T - N(V, T, \mu)\mu. \quad (1.1)$$

Das vollständige Differential von  $J$  lautet

$$dJ = (\delta Q - p dV + \mu dN) - (T dS + S dT) - (N d\mu + \mu dN).$$

Die innere Energie  $E$  kann sich durch die Zufuhr von Wärme, durch Verrichtung von Arbeit gegen den inneren Druck  $p$  und schließlich durch Hinzufügen von weiteren Teilchen zum System ändern. Weil reversible Entropieänderungen durch die zugeführte Wärme  $\delta Q$  bestimmt werden,  $dS = \delta Q/T$ , erhält man

$$dJ(V, T, \mu) = -p(V, T, \mu) dV - S(V, T, \mu) dT - N(V, T, \mu) d\mu. \quad (1.2)$$

Handelt es sich bei den betrachteten Teilchen um Photonen (allgemein um Teilchen, die beliebig erzeugt und vernichtet werden können, d.h., deren Teilchenzahl  $N$  keine erhaltene Größe ist), muß das chemische Potential  $\mu$  im Gleichgewicht Null sein, denn sind Volumen  $V$  und Temperatur  $T$  vorgegeben, so ist  $J$  nur von  $N$  allein abhängig:  $J = J(N)$ ; die Extremalforderung  $J \rightarrow \text{Extremum}$  liest sich dann  $-\mu = \partial J / \partial N \stackrel{!}{=} 0$ . Der Allgemeinheit halber schreibe ich jedoch weiter  $\mu$  und setze gegebenenfalls  $\mu = 0$ . Kennt man die Einteilchenzustände eines wechselwirkungsfreien Systems, so kann man

$J$  leicht aufschreiben; es ist zwischen Bosonen und Fermionen zu unterscheiden (oberes Vorzeichen für Bosonen, unteres für Fermionen),

$$J(V, T, \mu) = \pm T \sum_i \ln \left[ 1 \mp \exp \left\{ \frac{\mu - \epsilon_i}{T} \right\} \right]. \quad (1.3)$$

Hier wird über alle Einteilchenzustände des Systems summiert;  $\epsilon_i$  bezeichnet die Energie eines Teilchens im Zustand  $i$ . Durch das chemische Potential  $\mu$  wird eine konstante Verschiebung aller Energieniveaus beschrieben.

Ein Quantenzustand  $i$  nimmt im klassischen Phasenraum  $\Gamma$  das Volumen  $(2\pi\hbar)^3$  ein; geht man daher von der diskreten Verteilung der Zustände zu einer kontinuierlichen über (thermodynamischer Limes), so entspricht dies der Ersetzung

$$\sum_i \longrightarrow \frac{g}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\Gamma} d\Gamma,$$

wobei  $d\Gamma$  das Phasenraumvolumen  $d^3q d^3p$  ist und der Faktor  $g$  die Entartung des Systems (Spin, ...) angibt. Unter der Voraussetzung 'wechselwirkungsfrei' ist die Energie  $\epsilon_i$  eines relativistischen Teilchens allein eine Funktion des Impulsquadrates,

$$\epsilon_i \longrightarrow \epsilon(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}.$$

Die Ortsintegration  $\int_V d^3q$  läßt sich für homogene Systeme allgemein ausführen und ergibt einen Faktor  $V$ . Die Winkelanteile der Impulsintegration in Kugelkoordinaten liefern für isotrope Verteilungen noch einen Faktor  $4\pi$  und man kann ersetzen

$$\sum_i \longrightarrow g \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^\infty dp p^2.$$

Aus dem jeweiligen Kontext heraus wird immer klar, ob  $p$  den Impulsbetrag  $|\vec{p}|$  oder den Druck  $p(V, T, \mu)$  bezeichnet. Die Gibbs'sche Freie Energie läßt sich somit schreiben als

$$J(V, T, \mu) = \pm g \frac{V}{2\pi^2\hbar^3} T \int_0^\infty dp p^2 \ln \left[ 1 \mp \exp \left\{ \frac{\mu - \sqrt{m^2 + p^2}}{T} \right\} \right]. \quad (1.4)$$

Aus der Gleichung (1.2) für das vollständige Differential von  $J$  ist ersichtlich, daß

$$p(V, T, \mu) = - \left. \frac{\partial J(V, T, \mu)}{\partial V} \right|_{T, \mu}$$

gilt. Die Abhängigkeit  $p(V, T, \mu)$  des Druckes von dem Volumen, der Temperatur und dem chemischen Potential heißt *Zustandsgleichung*. Aufgrund der vorausgesetzten Wechselwirkungsfreiheit der Teilchen ist  $J$  im thermodynamischen Limes jedoch eine extensive Größe,  $J \sim V$ , und man kann ebensogut schreiben

$$p(T, \mu) = - \frac{J(V, T, \mu)}{V},$$

$$J(V, T, \mu) = -p(T, \mu) V. \quad (1.5)$$

Die Zustandsgleichung ist unter den gemachten Voraussetzungen volumenunabhängig,  $p = p(T, \mu)$ , und stellt gleichzeitig ein thermodynamisches Potential dar: Alle relevanten

Größen können aus  $p(T, \mu)$  abgeleitet werden. Explizit lautet die Formel für den Druck mit der Ersetzung  $x := p/T$  und der Abkürzung  $a := m/T$

$$\begin{aligned} p(T, \mu) &= \mp \frac{g}{2\pi^2 \hbar^3} T \int_0^\infty dp p^2 \ln \left[ 1 \mp \exp \left\{ \frac{\mu - \sqrt{m^2 + p^2}}{T} \right\} \right] \\ &= \mp \frac{g}{2\pi^2} \frac{T^4}{\hbar^3} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left[ 1 \mp \exp \left\{ \frac{\mu}{T} - \sqrt{a^2 + x^2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$= \frac{g}{6\pi^2} \frac{T^4}{\hbar^3} \int dx \frac{x^4}{A} \frac{1}{\exp \left\{ A - \frac{\mu}{T} \right\} \mp 1}. \quad (1.7)$$

Bei der zweiten Umformung wurde partiell integriert (die Integrationsgrenzen sind hier und im folgenden weggelassen); außerdem wurde die Abkürzung

$$A := \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{mit } a = m/T \quad (1.8)$$

eingeführt.

Die Entropie  $S$  ist die negative Temperaturableitung der Gibbs'schen Freien Energie; die Entropiedichte  $s := S/V$  erhält man wegen  $J = -p(T, \mu)V$  als Ableitung des Druckes,

$$s(T, \mu) = \frac{S(V, T, \mu)}{V} = \left. \frac{\partial p(T, \mu)}{\partial T} \right|_\mu.$$

Aus der Gleichung (1.6) für den Druck ergibt sich

$$\begin{aligned} s(T, \mu) &= \frac{4}{T} p(T, \mu) - \frac{g}{2\pi^2} \frac{T^4}{\hbar^3} \int dx \frac{x^2}{\exp(A - \mu/T) \mp 1} \left( \frac{a}{A} \frac{\partial a}{\partial T} + \frac{\mu}{T^2} \right) \\ &= \frac{g}{2\pi^2} \frac{T^3}{\hbar^3} \int dx \frac{x^2}{A} \left( \frac{4}{3} x^2 - m \frac{\partial a}{\partial T} - \frac{A\mu}{T} \right) \frac{1}{\exp \left\{ A - \frac{\mu}{T} \right\} \mp 1}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Im zweiten Schritt wurde  $p(T, \mu)$  nach Gleichung (1.7) und  $a$  laut Definition eingesetzt.

Neben dem Druck  $p$  und der Entropiedichte  $s$  ist die Energie  $E$  des Systems oder als intensive, d.h., vom Volumen unabhängige Größe, die Energiedichte  $e$  von Interesse.

$$\begin{aligned} e(T, \mu) &:= \frac{E}{V} = \frac{J + ST + N\mu}{V} = \frac{1}{V} \left( -pV + \left. \frac{\partial(pV)}{\partial T} \right|_{V, \mu} T + \left. \frac{\partial(pV)}{\partial \mu} \right|_{V, T} \mu \right) \\ &= -p + \left. \frac{\partial p}{\partial T} \right|_\mu T + \left. \frac{\partial p}{\partial \mu} \right|_T \mu = -p(T, \mu) + s(T, \mu) T + n(T, \mu) \mu. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Diese Relation ist als Gibbs'sche Fundamentalgleichung bekannt. Der letzte Term in der Gleichung (1.10), die Ableitung des Druckes nach dem chemischen Potential  $\mu$ , liefert, wie aus (1.2) und (1.5) hervorgeht, die Teilchendichte

$$\begin{aligned} n(T, \mu) &:= \frac{N}{V} = - \left. \frac{\partial J(V, T, \mu)}{\partial \mu} \right|_{T, V} \frac{1}{V} = \left. \frac{\partial p(T, \mu)}{\partial \mu} \right|_T \\ &= \frac{g}{2\pi^2} \frac{T^3}{\hbar^3} \int dx x^2 \frac{1}{\exp \left\{ A - \frac{\mu}{T} \right\} \mp 1}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

$n(T, \mu)$  ist das Phasenraumintegral über die Bose- bzw. die Fermi-Verteilung

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\exp\{(\epsilon - \mu)/T\} \mp 1} \quad \text{für} \quad \begin{cases} \text{Bosonen} \\ \text{Fermionen.} \end{cases} \quad (1.12)$$

Mit zunehmender Teilchendichte  $n(T, \mu)$  wächst auch der Druck des Systems, es gilt  $p(T, \mu) \sim n(T, \mu) T$ , siehe Gleichung (1.7). Die Ausdrücke für den Druck, die Entropie- und die Teilchendichte in Gleichung (1.10) eingesetzt, ergeben die Energiedichte

$$e(T, \mu) = \frac{g}{2\pi^2} \frac{T^4}{\hbar^3} \int dx \frac{x^2}{A} \left( x^2 - m \frac{\partial a}{\partial T} \right) \frac{1}{\exp\left\{A - \frac{\mu}{T}\right\} \mp 1}. \quad (1.13)$$

Der Zusammenhang  $e(T, \mu)$  wird manchmal auch als kalorische Zustandsgleichung bezeichnet; es sei aber darauf hingewiesen, daß  $e(T, \mu)$  kein thermodynamisches Potential darstellt, da daraus nicht alle thermodynamischen Größen eindeutig abgeleitet werden können.

**Bemerkung:** Für masselose Teilchen ist die Energiedichte  $e$  gleich dem dreifachen Druck des Systems. Dies ist eine Folge der Energie-Impuls-Relation  $\epsilon(\vec{p}) = |\vec{p}|$ :  $1/2 \cdot 1/3$  aller Teilchen bewegen sich in Richtung einer gedachten Wand und übertragen bei einem elastischen Stoß auf diese Wand ihren doppelten Impuls. Allgemein wird für alle thermodynamischen Systeme (unabhängig von der zugrunde liegenden Wechselwirkung) der Zusammenhang

$$3p \leq e$$

vermutet [LL5, §27]. Nach dieser Hypothese muß daher

$$\frac{\partial a}{\partial T} < 0 \quad \text{mit} \quad a = \frac{m}{T}$$

gelten; dies ist insbesondere im Fall konstanter Teilchenmasse erfüllt.

### 1.1.2 Zwei wichtige Grenzfälle

Die abgeleiteten thermodynamischen Beziehungen sollen hier für die zwei wichtigen Spezialfälle diskutiert werden, daß zum einen die Teilchenmasse sehr klein und zum anderen sehr groß ist; die physikalische Skala ist dabei die betrachtete Temperatur. In diesen Betrachtungen ist natürlich der Fall verschwindender Masse (Stefan-Boltzmann-Gas) eingeschlossen. Der Einfachheit halber wird in diesem Abschnitt  $\mu = 0$  gesetzt.

Im Falle eines verschwindenden chemischen Potentials ist der Druck nach den Gleichungen (1.6, 1.7) bis auf einen dimensionsbehafteten Faktor durch das Integral

$$\begin{aligned} f_{\mp}(a) &:= \mp \int_0^{\infty} dx \, x \ln \left( 1 \mp \exp \left\{ -\sqrt{x^2 + a^2} \right\} \right) \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} dx \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + a^2}} \frac{1}{\exp\{\sqrt{x^2 + a^2}\} \mp 1} \end{aligned}$$

gegeben. Durch das obere Vorzeichen werden Bosonen beschrieben und durch das untere Fermionen.  $f_{\mp}(a)$  kann in den Grenzfällen kleiner bzw. großer  $a$  ausgewertet werden.

(1)  $a = m/T$  klein (**Hochtemperatur-Näherung**): Die Entwicklung der Funktion  $f_-(a)$  für Bosonen nach kleinen Argumenten, siehe Anhang A.1.2,

$$f_-(a) = \frac{\pi^4}{45} - \frac{\pi^2}{12} a^2 + \frac{\pi}{6} a^3 + \left[ \ln \left( \frac{a}{4\pi} \right)^2 - \frac{3}{2} + 2C \right] \frac{a^4}{32} + \dots, \quad (1.14)$$

enthält einen nicht-trivialen Term der Ordnung  $\mathcal{O}(a^3)$ , während man in einer naiven Taylor-Entwicklung von  $f_-(a)$  nur Potenzen von  $(a^2)$  erwarten würde, vergleiche Definition von  $f_-(a)$ .  $C = 0.5772\dots$  ist die Eulersche Konstante.

Die Entwicklung der Fermionenfunktion  $f_+(a)$  enthält keinen derartigen nicht-analytischen Term und lautet

$$f_+(a) = \frac{7}{8} \frac{\pi^4}{45} - \frac{\pi^2}{24} a^2 - \left[ \ln \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 - \frac{3}{2} + 2C \right] \frac{a^4}{32} + \dots \quad (1.15)$$

Mit den angegebenen Entwicklung für  $f_{\mp}$  erhält man den Druck freier Bosonen bzw. freier Fermionen bei hohen Temperaturen,

$$p(T) = \frac{g \pi^2 T^4}{90 \hbar^3} \left[ 1 - 15 \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^2 + 60 \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^3 + \frac{45}{2} \left[ c_B + \ln \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^2 \right] \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^4 + \dots \right]$$

für Bosonen mit  $c_B = 2C - \frac{3}{2} - \ln 4 \approx -1.73$ , (1.16)

$$p(T) = \frac{g \pi^2 T^4}{90 \hbar^3} \left[ \frac{7}{8} - \frac{15}{2} \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^2 - \frac{45}{2} \left[ c_F + \ln \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^2 \right] \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^4 + \dots \right]$$

für Fermionen mit  $c_F = 2C - \frac{3}{2} + \ln 4 \approx 1.04$ . (1.17)

Im Vergleich zu dem bosonischen Ergebnis sind hier einige Vorfaktoren anders und es fehlt das Glied der Ordnung  $\mathcal{O}\left(\left(\frac{m^2}{T^2}\right)^{3/2}\right)$ . Für  $m = 0$  erhält man den Druck und die Energiedichte eines masselosen freien Bose- bzw. Fermi-Gases (Stefan-Boltzmann-Fall),

$$p_{SB}(T) = \hat{g} \frac{g \pi^2 T^4}{90 \hbar^3} \quad \text{mit } \hat{g} = \begin{cases} 1 \\ 7/8 \end{cases} \quad \text{für } \begin{cases} \text{Bosonen} \\ \text{Fermionen} \end{cases}.$$

$$e_{SB}(T) = \hat{g} \frac{g \pi^2 T^4}{30 \hbar^3} \quad (1.18)$$

Fermionen können im Gegensatz zu Bosonen einen Zustand im Phasenraum höchstens einfach besetzen; im Fermionendruck äußert sich diese Tatsache durch eine effektive, kleinere Entartung  $g_{\text{eff}} = 7/8 g$ . Auch die Teilchendichte eines Stefan-Boltzmann-Gases bei der Temperatur  $T$  läßt sich mit den im Anhang A.1.1 angeführten Gleichungen leicht angeben,

$$n_{SB}(T) = \frac{g T^3}{2\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{\exp\{x\} \mp 1} = \hat{g}_{(2)} \frac{g T^3}{2\pi^2 \hbar^3} \zeta(3)$$

mit  $\hat{g}_{(2)} = \begin{cases} 1 \\ 3/4 \end{cases}$  für  $\begin{cases} \text{Bosonen} \\ \text{Fermionen} \end{cases}$ .

Der Faktor  $\hat{g}_{(2)} = 3/4 = 1 - 2^{-(3-1)}$  hängt mit der Dimension des Phasenraumes zusammen.

(2)  $a = m/T$  groß (Näherung für schwere Teilchen): Für die Funktion

$$f_{\mp}(x) = \mp \int dx x^2 \ln \left( 1 \mp \exp \left( -\sqrt{x^2 + a^2} \right) \right)$$

soll in dem Fall  $a \gg 1$  keine Entwicklung, sondern lediglich eine einfache Abschätzung angegeben werden. *Unabhängig* von dem durch die Statistik bedingten Vorzeichen kann man wegen  $\ln(1+u) = u + \mathcal{O}(u^2)$  und  $\sqrt{x^2 + a^2} = a [1 + x^2/(2a^2)] + \mathcal{O}(x^4/a^3)$  für große  $a$  abschätzen

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \int_0^{\infty} dx x^2 \exp \left( -\sqrt{x^2 + a^2} \right) \\ &\sim \int_0^{\infty} dx x^2 \exp \left( -a - \frac{x^2}{2a} \right) \\ &\sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} a^{3/2} \exp(-a). \end{aligned}$$

Der Druck von Teilchen der Masse  $m = aT$  läßt sich bei sehr kleinen Temperaturen daher abschätzen als

$$p(T) = \frac{g}{2\pi^2} \frac{T^4}{\hbar^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{m}{T} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m}{T} \right\}. \quad (1.20)$$

Die massiven Teilchen üben nur einen geringen Druck aus und sind bei kleinen Temperaturen im thermischen Gleichgewicht wegen ihrer großen Energie  $\epsilon \geq m \gg T$  stark unterdrückt, es gilt  $n(T) \sim p(T)/T$ . Das erhaltene Ergebnis gilt unabhängig von der Statistik der Teilchen, weil aufgrund der endlichen Masse bei kleinen Temperaturen alle Zustände nur 'sehr dünn' besetzt sind und Unterschiede zwischen Boltzmann-, Fermi- und Bose-Verteilung keine Rolle mehr spielen. Bis auf den Exponentialfaktor ist dies gerade das Ergebnis, welches man auch für nichtrelativistische Teilchen der Masse  $m$  erhält, denn die bei der Integration von  $f_{\mp}$  gemachte Näherung stellt nichts anderes als die Entwicklung der relativistischen Dispersionsrelation für kleine Energien dar,  $\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} = m + \vec{p}^2/(2m) + \dots$ . Während in der nichtrelativistischen Thermodynamik die Ruhenergie  $m$  der Teilchen oft mit in das chemische Potential eingeschlossen wird ( $\mu - m \rightarrow \mu'$ ), betrachten wir hier den Fall  $\mu = 0$ .

Die Konvergenzen der Hoch- und Tieftemperatur-Entwicklungen für  $f_{\mp}(a)$ ,  $a = m/T \ll 1$ , sind in den Abbildungen 1.1 und 1.2 dargestellt. Man erkennt, daß die abgeleitete Gleichung (1.20) trotz der groben Näherungen für  $m/T = a \gtrsim 4$  eine brauchbare Abschätzung der Größenordnung erlaubt.

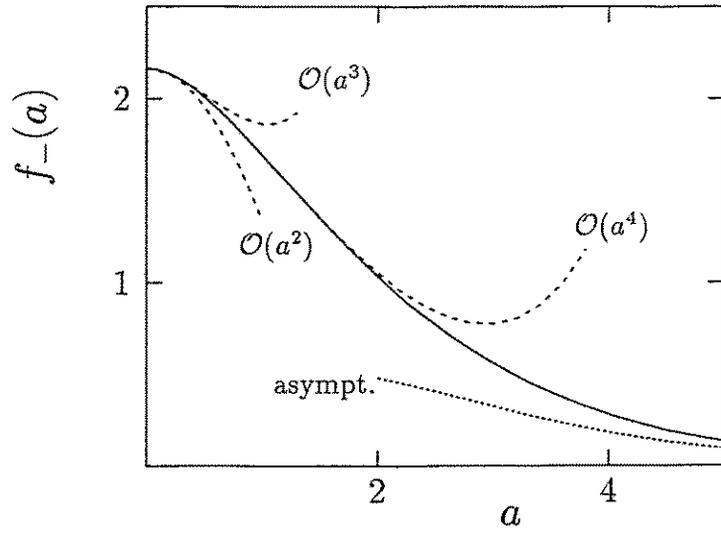


Abbildung 1.1: Die Funktion  $f_-(a)$  für Bosonen (durchgezogene Linie) und ihre Entwicklung für kleine  $a$  in verschiedenen Ordnungen (gestrichelte Linien) sowie die asymptotische Abschätzung für kleine Temperaturen (gepunktet).

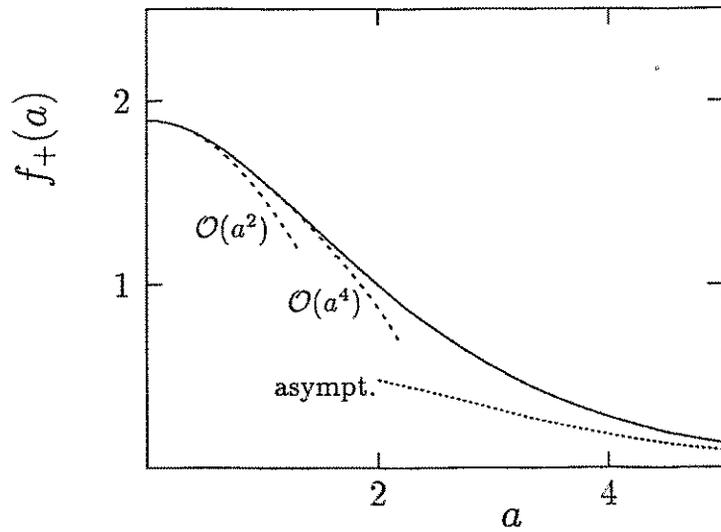


Abbildung 1.2: Wie Abbildung 1.1, aber die Funktion  $f_+(a)$  für Fermionen.

## 1.2 Das Bag-Modell

Im Rahmen des Bag-Modells beschreibt man den Unterschied zwischen dem perturbativen und dem nicht-perturbativen Vakuum durch eine konstante Energie- bzw. Druckdifferenz. Für Hadronen ergibt das Modell ein diskretes Energiespektrum, während man für ein ausgedehntes, asymptotisch freies System eine phänomenologische Zustandsgleichung zur einfachen Beschreibung des QGP erhält.

### 1.2.1 Das Bag-Modell für Hadronen

Die QCD ist heute als Theorie der starken Wechselwirkung allgemein anerkannt. Obwohl die Grundgleichungen seit den 70er Jahren bekannt sind, gibt es aufgrund der Komplexität der Gleichungen neben perturbativen und numerischen Ergebnissen nur wenige analytische Aussagen der nicht-perturbativen Theorie. Parallel zur Entwicklung der QCD wurden daher Modelle zur Beschreibung der subnuklearen Physik entwickelt, deren Grundannahmen zumeist phänomenologischer Natur sind (und deren strenge Begründung durch die QCD vielfach aussteht).

Ein populäres Modell dieser Art ist das Bag-Modell, das neben Arbeiten von Boguljov in der Mitte der 70er Jahre vor allem am MIT entwickelt wurde. Das Modell basiert unter anderem auf der Beobachtung, daß trotz intensiver Suche keine freien Quarks gefunden wurden. Das Bag-Modell beschreibt diese Tatsache durch die Annahme, daß die Quarks im Volumen der Hadronen ('Bag') eingesperrt sind (*Confinement* der Quarks) und sich innerhalb des Bags wie freie Teilchen verhalten [?]. Wenn diese Annahme des Bag-Modells auch (noch) nicht aus den QCD-Gleichungen abgeleitet wurden, so kann man sich diese durch folgende heuristische Überlegung plausibel machen:

Bei kleinen Abständen wie dem Bag-Radius verringert sich die Kopplung zwischen den Quarks durch die asymptotische Freiheit, siehe auch Gleichung (1.38), und eine perturbative Beschreibung ist möglich. Das perturbative Vakuum nahe der Quarks hat eine andere Struktur als das nicht-perturbative in großen Entfernungen, wo die Kopplungsstärke nicht mehr klein ist. Die Druckdifferenz zwischen beiden Vakua ist negativ,  $\Delta p = p_{\text{pert}} - p_{\text{n.pert}} = -B < 0$ , und bindet die Quarks zu Hadronen, siehe Abbildung 1.3. Die Randbedingungen der Wellenfunktionen der im Inneren des Bags als (quasi-)frei an-

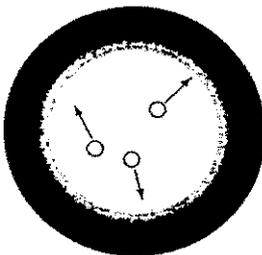


Abbildung 1.3: Durch die bei großen Entfernungen wachsende Kopplung ('Bag-Wand') werden die Quarks auf ein Volumen (in der einfachsten Betrachtung auf eine Kugel) beschränkt.

genommenen Quarks werden so gewählt, daß der Quarkstrom durch die Bag-Wand verschwindet. Der Bag-Radius hängt von der Druckdifferenz  $-B$  ab. Bei gegebenem Bag-Radius bzw. gegebener Bag-Konstante besitzen die eingeschlossenen Quarks ein diskretes Energiespektrum. Durch eine geeignete Wahl von  $B$  lassen sich die (Ladungs-) Radien, die

magnetischen Momente und die Massen von verschiedenen Hadronen, die als Anregungszustände der eingeschlossenen Quarks interpretiert werden, in gute Übereinstimmung mit dem Experiment bringen.

### 1.2.2 Das Bag-Modell des QGP

Durch eine Überlegung, welche an die Ideen des Bag-Modells anknüpft, kann man zu einer Zustandsgleichung gelangen, die ein wechselwirkendes System von Quarks und Gluonen modellhaft beschreibt: Bei großen Drücken oder hohen Temperaturen sollten sich die Hadronen (-Bags) überlappen und ein zusammenhängendes Volumen ('einen großen Bag') bilden, in welchem die Kopplung schwach ist, siehe Abbildung 1.4. Während in dem

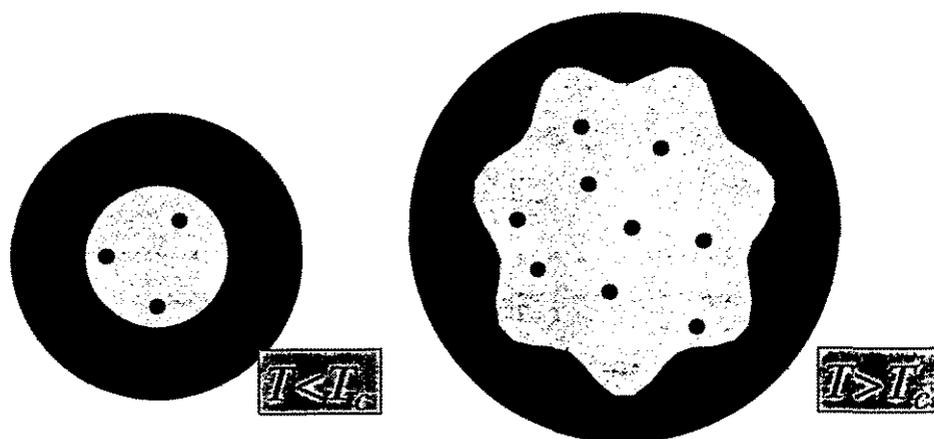


Abbildung 1.4: Unterhalb der Übergangstemperatur  $T_c$  sind die Quarks im 'Hadronenbag' eingeschlossen. Bei der Temperatur  $T_c$  ändert sich die Struktur des Vakuums ('Schmelzen der Bagwand') und die Quarks und Gluonen bilden ein ausgedehntes System quasi-freier Teilchen.

endlichen Hadronen-Bag die (quasi-)freie Bewegung der Quarks ein diskretes Energiespektrum ergibt, wird das Spektrum in einem ausgedehnten System quasi-kontinuierlich. Im thermodynamischen Limes und für verschwindende Kopplung sollten die thermodynamischen Eigenschaften der Quarks also durch ein ideales Fermi-Gas (1.18) beschrieben werden können, d.h.,  $p(T) \sim T^4$ . Nun ist noch die im vorangegangenen Abschnitt diskutierte negative Druckdifferenz zwischen dem perturbativen Vakuum im Bag und dem realen Vakuum zu berücksichtigen; man ersetzt einfach  $p \rightarrow p - B$ . Damit erhält man für das Quark-Gluon-System eine phänomenologische Zustandsgleichung der Gestalt

$$p(T) = AT^4 - B \quad \text{mit } A := g_{\text{eff}} \frac{\pi^2}{90 \hbar^3}. \quad (1.21)$$

Die dimensionslose Konstante  $g_{\text{eff}}$  ist die effektive Zahl der Freiheitsgrade des QGP. Für  $\mu = 0$  ergibt sich die Energiedichte

$$\epsilon(T) = \partial p(T) / \partial T - p(T) = 3AT^3 + B = 3p(T) + 4B.$$

**Bemerkung:** Zu einer Zustandsgleichung dieser Art kann man auch durch die Annahme eines allgemeineren Potenzreihen-Ansatzes

$$p(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3 + a_4 T^4$$

gelangen, da aus thermodynamischen Überlegungen  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  folgt: Aus  $p(T)$  ergeben sich die Entropie- und die Energiedichte (für  $\mu = 0$ )

$$\begin{aligned} s(T) &= \partial p(T) / \partial T = a_1 + 2a_2 T + 3a_3 T^2 + 4a_4 T^3, \\ e(T) &= s(T)T - p = -a_0 + a_2 T^2 + 2a_3 T^3 + 3a_4 T^4 \\ &= 3p(T) - 4a_0 - 3a_1 T^3 - 2a_2 T^2 - a_3 T^3. \end{aligned}$$

Aus dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik,  $\lim_{T \rightarrow 0} s(T) = 0$ , folgt  $a_1 = 0$ . Eine positive Energiedichte bei  $T = 0$  erfordert  $a_0 =: -B < 0$ . Schließlich müssen nach der allgemeinen Hypothese  $3p \leq e$  (siehe Bemerkung im Abschnitt 1.1.1) und wegen  $s(T) \geq 0$  die Koeffizienten  $a_2$  und  $a_3$  verschwinden. Es ist wichtig zu bemerken, daß damit die Entropiedichte auch für endliche Temperaturen gleich der eines Stefan-Boltzmann-Gases ist. Diesen Sachverhalt kann man auch folgendermaßen formulieren: Das Bag-Vakuum besitzt keine Entropie.

Im folgenden sollen die thermodynamischen Beziehungen für dieses Modell unter Berücksichtigung eines endlichen chemischen Potentials  $\mu$  abgeleitet werden. Dazu werden die Beiträge der Gluonen und der Quarks getrennt betrachtet (dies ist wegen der zunächst angenommenen Wechselwirkungsfreiheit möglich); der sich ergebende Gesamtdruck wird schließlich um  $B$  verringert.

Die  $N_g = 3^2 - 1 = 8$  masselosen Gluonen der SU(3)-Eichgruppe werden im Rahmen des Bag-Modells als freie Teilchen mit der Entartung

$$g_g = 2 \cdot N_g = 16 \tag{1.22}$$

betrachtet. Weil die Anzahl der Gluonen in einem System keine erhaltene Größe ist, muß ihr chemisches Potential verschwinden:  $\mu_g = 0$  (vergleiche Bemerkung auf Seite 5). Mit den Gleichungen (1.18) für masselose freie Bosonen erhält man den Druck und die Energiedichte der Gluonen

$$\begin{aligned} p_g(T) &= g_g \frac{\pi^2}{90} \frac{T^4}{\hbar^3}, \\ e_g(T) &= 3p_g(T) = g_g \frac{\pi^2}{30} \frac{T^4}{\hbar^3}. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Die Quarks mit einer im Vergleich zur betrachteten Temperatur kleinen Masse können in erster Näherung als ebenfalls masselos angesehen werden. Bei verschwindender Ruhemasse ergibt sich aus Gleichung (1.7) für *einen* Quarkfreiheitsgrad

$$p_1(T, \mu) = \frac{1}{6\pi^2} \frac{T^4}{\hbar^3} \int_0^\infty dx \frac{x^3}{\exp\left\{x - \frac{\mu}{T}\right\} + 1}.$$

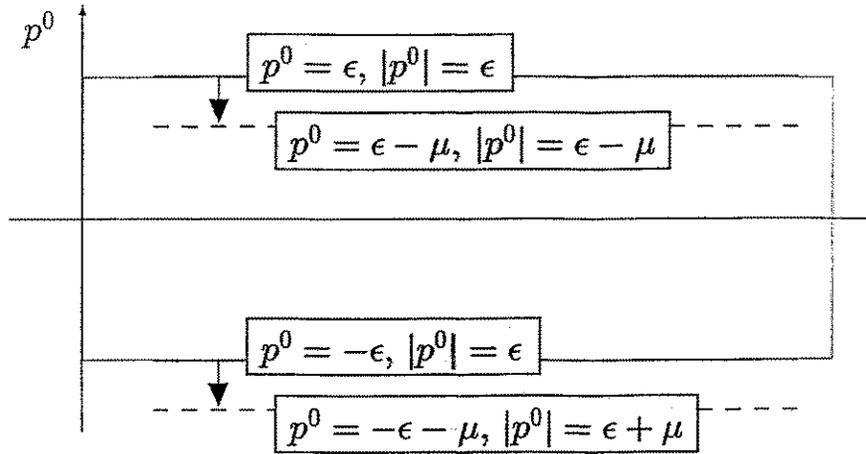


Abbildung 1.5: Die chemischen Potentiale von Teilchen und Antiteilchen unterscheiden sich im Vorzeichen. Durch die Verschiebung aller Energieniveaus entsteht eine Asymmetrie zwischen Teilchen und Antiteilchen.

Der Index an  $p_1$  soll an die Entartung  $g = 1$  erinnern. Dieses Integral kann für  $\mu \neq 0$  nicht in geschlossener Form ausgewertet werden, es gibt jedoch verschiedene Reihenentwicklungen auch für endliche Ruhemassen, siehe z.B. [Hab]. Das chemische Potential der Antiquarks ist gleich dem negativen chemischen Potential der entsprechenden Quarks, vergleiche Abbildung 1.5. Während auch der Druck  $p_{\bar{1}}(T, \mu) = p_1(T, -\mu)$  des zugehörigen Antiquarks nicht in geschlossener Form darstellbar ist, kann man dagegen für den Gesamtdruck

$$p_{1\bar{1}} = p_1 + p_{\bar{1}} = \frac{1}{6\pi^2} \frac{T^4}{\hbar^3} \left[ \int_0^\infty dx \frac{x^3}{\exp\left\{x - \frac{\mu}{T}\right\} + 1} + \int_0^\infty dx \frac{x^3}{\exp\left\{x + \frac{\mu}{T}\right\} + 1} \right]$$

einen einfachen Ausdruck ableiten. Zunächst wird der Ausdruck in den eckigen Klammern durch Umbenennung der Integrationsvariablen geschrieben als

$$\left[ \int_{-\mu/T}^\infty dx \frac{(x + \mu/T)^3}{\exp\{x\} + 1} + \int_{\mu/T}^\infty dx \frac{(x - \mu/T)^3}{\exp\{x\} + 1} \right].$$

Durch eine neue Aufteilung der Integrationsintervalle,  $(\int_{-\mu/T}^0 + \int_0^\infty) + (\int_{\mu/T}^0 + \int_0^\infty)$ , kann dieser Ausdruck vereinfacht werden,

$$\left[ \int_{-\mu/T}^0 dx \frac{(x + \mu/T)^3}{\exp\{x\} + 1} + \int_{\mu/T}^0 dx \frac{(x - \mu/T)^3}{\exp\{x\} + 1} + \int_0^\infty dx \frac{(x + \mu/T)^3 + (x - \mu/T)^3}{\exp\{x\} + 1} \right].$$

Im mittleren Integral wird jetzt  $x \rightarrow -x$  substituiert. Durch die äquivalente Umformung  $(\exp(x) + 1)^{-1} + (\exp\{-x\} + 1)^{-1} = 1$  lassen sich die ersten beiden Integrale zusammen-

fassen und man erhält<sup>1</sup>

$$\left[ \int_{-\mu/T}^0 dx (x + \mu/T)^3 + \int_0^\infty dx \frac{6(\mu/T)^2 x + 2x^3}{\exp\{x\} + 1} \right] = \frac{1}{4} \left( \frac{\mu}{T} \right)^4 + 6 \left( \frac{\mu}{T} \right)^2 \frac{\pi^2}{12} + 2 \frac{7}{8} \frac{\pi^4}{15}.$$

Damit ist der Gesamtdruck einer Sorte Quarks und Antiquarks gegeben durch

$$p_{1\bar{1}}(T, \mu) = \frac{1}{3} \left[ \frac{7\pi^2}{120} \frac{T^4}{\hbar^3} + \frac{\mu^2 T^2}{4\hbar^3} + \frac{\mu^4}{8\pi^2 \hbar^3} \right]. \quad (1.24)$$

Erinnert sei noch einmal daran, daß hier weder die Spin- und Flavor-, noch die Color-entartung mitgezählt wurden.

Mit Hilfe dieser Herleitung ist es auch möglich, die effektive Teilchendichte  $n_{1\bar{1}}$  und die Energiedichte  $e_{1\bar{1}}$  zu bestimmen. Die Teilchendichte ist die Ableitung des thermodynamischen Potentials nach dem chemischen Potential. Aus der *Summe* der Partialdrücke erhält man die *Nettoteilchendichte*,

$$\begin{aligned} n_{1\bar{1}}(T, \mu) &:= n_1(T, \mu) - n_{\bar{1}}(T, \mu) = \left. \frac{\partial p_1(T, \mu)}{\partial \mu} \right|_T - \left. \frac{\partial p_{\bar{1}}(T, -\mu)}{\partial \mu} \right|_T \\ &= \left. \frac{\partial p_1(T, \mu)}{\partial \mu} \right|_T + \left. \frac{\partial p_{\bar{1}}(T, \mu)}{\partial \mu} \right|_T = \frac{\partial}{\partial \mu} (p_{1\bar{1}}(T, \mu)) \\ &= \frac{\mu}{6\hbar^3} \left[ T^2 + \frac{\mu^2}{\pi^2} \right]. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Für  $T = 0$  ergibt sich der bekannte Zusammenhang zwischen Teilchendichte und der Fermi-Energie eines relativistischen, entarteten Fermi-Gases (die Fermi-Energie ist für  $T = 0$  gerade  $\mu$ , weil die Fermi-Verteilungsfunktion (1.12) für  $T \rightarrow 0$  in die Stufenfunktion  $\Theta(\epsilon - \mu)$  übergeht). In impliziter Form bestimmt diese Beziehung bei gegebener Teilchendichte und Temperatur das chemische Potential. Es ist klar, daß die Nettoteilchendichte  $n_{1\bar{1}}(T, \mu)$  eine ungerade Funktion von  $\mu$  sein muß, weil das chemische Potential die Asymmetrie zwischen Teilchen und Antiteilchen beschreibt; der Druck und auch die Energiedichte müssen dagegen gerade Funktionen von  $\mu$  sein. Die Energiedichte ist für masselose Teilchen gleich dem dreifachen Druck, vergleiche Bemerkung im Abschnitt 1.1.1. Als Energiedichte des Quark-Antiquark-Systems erhält man daher

$$e_{1\bar{1}}(T, \mu) = \frac{7\pi^2}{120} \frac{T^4}{\hbar^3} + \frac{\mu^2 T^2}{4\hbar^3} + \frac{\mu^4}{8\pi^2 \hbar^3} = 3 p_{1\bar{1}}(T, \mu). \quad (1.26)$$

Die angenommene Voraussetzung (wechselwirkungsfreier) *masseloser* Quarks ist in dem interessierenden Temperaturbereich  $T \gtrsim 100$  MeV für die leichten Quark-Flavors u und d in guter Näherung erfüllt, da  $m_u \sim 5$  MeV bzw.  $m_d \sim 10$  MeV abgeschätzt wird; dies entspricht in der Abbildung 1.2 Werten von  $a < 0.1$ . Die schwereren Quarks mit einer Masse  $M$  sind bei Temperaturen  $T < M$  im thermodynamischen Gleichgewicht exponentiell unterdrückt, siehe Gleichung (1.20), und werden hier vernachlässigt. Das s-Quark wird meist auch als 'schwer' angesehen und nicht mit in die Betrachtung aufgenommen. Der Grund dafür ist, daß die Berücksichtigung der mit der Temperatur vergleichbaren Masse  $m_s \sim 150$  MeV des s-Quarks die Gleichungen etwas unübersichtlicher machen,

<sup>1</sup>Integrale siehe Anhang A.1.1

die physikalischen Beziehungen jedoch nicht qualitativ verändern würde. (Die Zustandsgleichung müßte dann numerisch ausgewertet bzw. als Reihe (1.17) mit Gliedern höherer Ordnungen dargestellt werden.) Im folgenden Abschnitt wird auch gezeigt, wie sich ein zusätzlicher, *masseloser s*-Freiheitsgrad auswirkt; dies stellt eine Abschätzung für den maximal möglichen Effekt eines freien massiven *s*-Quarks dar. In den abgeleiteten thermodynamischen Beziehungen werden die Quarkfreiheitsgrade Spin, Color und Flavor durch den Entartungsfaktor  $\tilde{g} = (2s + 1)N_c N_f$  berücksichtigt, wobei im weiteren stets  $N_f = 2$  gesetzt wird. Eine gebräuchliche Definition des Quark-Entartungsfaktors ist jedoch

$$g_q := 2 \cdot (2s + 1)N_c N_f = 12N_f = 24 \quad \text{für } N_f = 2. \quad (1.27)$$

$g_q$  unterscheidet sich von  $\tilde{g}$  durch den Faktor 2. Diese Definition ist im Fall  $\mu = 0$  ('Materie-Antimaterie-Entartung') zweckmäßig.

Unter Berücksichtigung des negativen Vakuumbeitrages erhält man für den Gesamtdruck der Quarks und Gluonen im Bag-Modell mit den Gleichungen (1.23) und (1.24)

$$p_B(T, \mu) = \frac{\pi^2}{90} \left[ \frac{7}{8} g_q + g_g \right] \frac{T^4}{\hbar^3} + g_q \frac{\mu^2}{24\hbar^3} \left[ T^2 + \frac{\mu^2}{2\pi^2} \right] - B. \quad (1.28)$$

Die Summe der Energiedichten der freien Quarks und Gluonen ist das dreifache der Summe der Partialdrücke. Zur Energiedichte des Quark-Gluon-Gases im Bag-Modell kommt noch der Vakuumwert  $B$  hinzu, so daß man für die Energiedichte des Quark-Gluon-Plasmas im Bag-Modell

$$e_B(T, \mu) = 3(p_B(T, \mu) + B) + B = 3p_B(T, \mu) + 4B \quad (1.29)$$

erhält. Diese Beziehung gilt unabhängig vom chemischen Potential  $\mu$  und erfüllt die Gibbs'sche Fundamentalgleichung

$$e_B(T, \mu) = -p_B + T \frac{\partial p_B}{\partial T} + \mu \frac{\partial p_B}{\partial \mu}.$$

### 1.2.3 Der Phasenübergang im Bag-Modell

Die in den abgeleiteten thermodynamischen Beziehungen enthaltene Bag-Konstante erhöht die Energiedichte und verringert den Druck des Quark-Gluon-Systems, wodurch ein Deconfinement-Zustand 'QGP' mit einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden modelliert wird. Der negative Druckunterschied zwischen dem realen und dem perturbativen Vakuum schränkt das Gebiet der Existenz des Quark-Gluon-Systems in der  $(p, \mu)$ -Ebene ein, denn ein System mit negativem Druck ist mechanisch nicht stabil und kann als Gleichgewichtszustand nicht existieren. Die Gleichung  $p_B(T, \mu) = 0$  liefert in impliziter Form eine Grenze für das Gebiet, in dem das Bag-QGP instabil ist,

$$0 = \frac{\pi^2}{90} \left[ \frac{7}{8} g_q + g_g \right] \frac{T^4}{\hbar^3} + g_q \frac{\mu^2}{24\hbar^3} \left[ T^2 + \frac{\mu^2}{2\pi^2} \right] - B.$$

Aufgelöst nach  $\mu$  wird die Grenzlinie durch die Gleichung

$$\left( \frac{\mu}{\tilde{B}} \right)^2 = \pi^2 \left[ \sqrt{\frac{8}{15} \left( 1 - \frac{g_g}{g_q} \right) t^4 + \frac{48}{\pi^2 g_q} - t^2} \right] \quad (1.30)$$

mit  $t := \frac{T}{\tilde{B}}, \quad \tilde{B} := (\hbar^3 B)^{1/4}$

bestimmt. Diese Grenzlinie verschwindenden Druckes ist jedoch nicht mit der Phasengrenze zu verwechseln; der Phasenübergang erfolgt schon bei endlichen Drücken. (Wie in

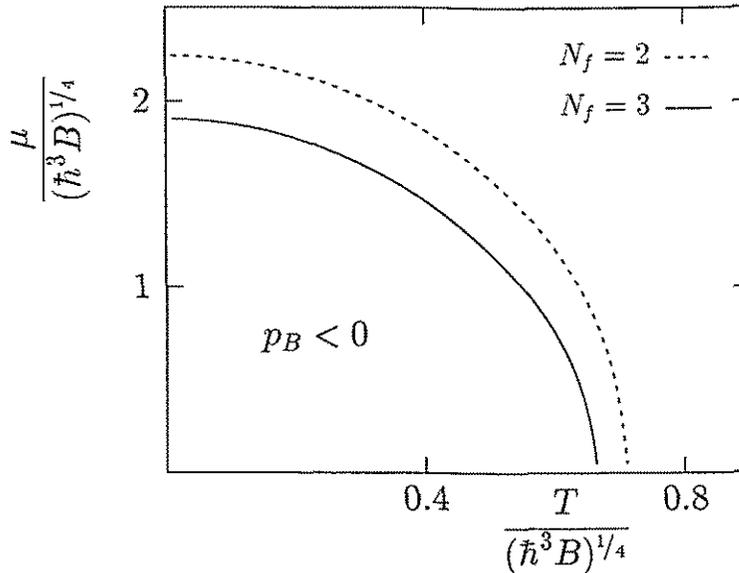


Abbildung 1.6: Die Linie verschwindenden Druckes legt das Gebiet fest, in welchem das Bag-QGP instabil ist. Der Phasenübergang zu der Confinement-Phase muß außerhalb dieses Gebietes stattfinden. Die Anzahl der effektiven Quark-Flavors hat keinen allzu großen Einfluß auf den Verlauf der Grenzlinie.

der Abbildung 1.6 deutlich wird, ändert sich die Situation bei Hinzunahme des s-Quarks nicht wesentlich: Durch die größere Zahl der QGP-Freiheitsgrade dehnt sich das Existenzgebiet des QGP lediglich etwas aus, aber der Kurvenverlauf ist qualitativ unverändert.) Die eigentlichen Phasengrenze wird durch die Gibbs'schen Bedingungen für das thermische, chemische und mechanische Gleichgewicht festgelegt,

$$T_{\text{hadron}} = T_{\text{QGP}}, \quad \mu_{\text{hadron}} = \mu_{\text{QGP}}, \quad p_{\text{hadron}} = p_{\text{QGP}}. \quad (1.31)$$

Der genaue Verlauf der Phasengrenze hängt von den (nicht genau bekannten) Zustandsgleichungen  $p_{\text{hadron}}(T, \mu)$  und  $p_{\text{QGP}}(T, \mu)$  der hadronischen Materie bzw. des QGP ab. In jedem Falle aber muß die Phasengrenze außerhalb des Gebietes  $p_{\text{QGP}} < 0$  liegen, in dem das QGP mechanisch instabil ist.

Nachdem hiermit im nachhinein das in der Einleitung gegebene Bild des hadronischen Phasenübergangs bei sowohl endlichen Temperaturen als auch endlichen chemischen Potentials (d.h., bei endlichen Baryondichten) etwas erläutert wurde, wird im folgenden stets der Teilchen-Antiteilchen-symmetrische Fall angenommen,  $\mu = 0$ . Diese Annahme ist für das QGP, wie es in Schwerionenstößen erzeugt werden könnte, durchaus nicht sehr einschränkend, da nach Shuryaks 'hot glue'-Szenario [Shu] in der zentralen heißen Region des entstehenden Plasma-Schlauches die Teilchen durch die Antiteilchen wahrscheinlich weitgehend balanciert werden. Auch der kosmologische Phasenübergang von einem Deconfinement- zu einem Confinement-Zustand des Universums hat allen Erwartungen

nach bei einem fast ausgeglichenen Verhältnis von Materie zu Antimaterie stattgefunden, siehe z.B. [Ka94b].

Der Phasenübergang des Bag-QGP zu hadronischer Materie läßt sich durch eine einfache Annahme über die hadronische Phase leicht studieren und stellt das Vergleichsmodell dar, an welchem alle späteren Aussagen gemessen werden sollen:

Der Druck der hadronischen Phase wird bei niedrigen Temperaturen durch den Partialdruck der leichtesten Hadronen dominiert. Die Pionen mit einer Masse von  $m_\pi = 140$  MeV können in einer ersten Näherung im gegebenen Temperaturbereich  $T \sim 200$  MeV als masselos und frei idealisiert werden, während im thermischen Gleichgewicht die anderen Hadronen aufgrund ihrer großen Masse ( $M \geq M_{K_0^\pm} \sim 500$  MeV) stark unterdrückt sind und hier vernachlässigt werden, siehe Gleichung (1.20).

Durch eine einfache Überlegung kann man zeigen, daß zumindest die Vernachlässigung der elektromagnetischen Wechselwirkung der Pionen gerechtfertigt ist. Die Teilchendichte freier Pionen ist in der Hochtemperatur-Näherung ( $T \gtrsim m_\pi = 140$  MeV) gegeben durch die Gleichung (1.19),

$$n_\pi^{(0)} = 3 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \frac{T^3}{\hbar^3} \approx 0.37 \frac{T^3}{\hbar^3},$$

so daß der mittlere Pionen-Abstand von der Größenordnung

$$r \sim n_\pi^{-1/3} \sim \frac{\hbar}{T}$$

ist. Demzufolge ist die typische Coulomb-Energie eines Pions

$$\epsilon_c \sim e^2 \frac{1}{r} \sim 4\pi\alpha \hbar \left( \frac{\hbar}{T} \right)^{-1} \sim 4\pi\alpha T;$$

$\alpha = e^2/(4\pi\hbar) \approx 1/137$  ist die Feinstrukturkonstante. Die typische kinetische Energie eines Pions ist von der Größenordnung der Temperatur ('relativistischer Gleichverteilungssatz'),

$$\epsilon_k \sim T.$$

Der Vergleich der Coulomb-Energie mit der kinetischen,

$$\epsilon_c \sim \alpha T \ll T \sim \epsilon_k,$$

zeigt, daß das Pionenplasma nicht sehr stark vom idealen Verhalten abweicht.

Genauer kann die Korrektur zur Energiedichte eines Stefan-Boltzmann-Gases mit der Methode von Debye berechnet werden, siehe z.B. [LL5, §78]. Man nimmt hierbei an, daß jedes Teilchen der Sorte  $a$  mit der Ladung  $e_a = z_a e$  von einer Ladungswolke der anderen Teilchen umgeben ist, die das Coulomb-Potential abschirmt. Für ein als Ganzes neutrales Plasma müssen bei verschwindender Wechselwirkung die idealen Teilchendichten  $n_a^{(0)}$  der Bedingung  $\sum_a n_a^{(0)} z_a = 0$  genügen. Bei 'eingeschalteter' Wechselwirkung und hohen Temperaturen werden die Teilchendichten  $n_a$  um ein  $z_b$ -fach geladenes Teilchen durch die Boltzmann-Verteilung bestimmt,  $n_a = n_a^{(0)} \exp\{-z_a e\phi_b/T\} \approx n_a^{(0)} [1 - z_a e\phi_b/T]$ . Weil andererseits  $\Delta\phi_b$

nach den Maxwell-Gleichungen mit der Ladungsdichte  $e \sum_a n_a z_a \approx - \sum_a n_a^{(0)} z_a^2 e^2 \phi_b / T$  verknüpft ist, wird die Potentialverteilung durch die Poisson-Gleichung

$$\Delta \phi_b - \lambda^{-2} \phi_b = 0 \quad \text{mit} \quad \lambda^{-2} = \frac{(4\pi)^2 \hbar \alpha}{T} \sum_a n_a^{(0)} z_a^2 = \frac{(4\pi)^2 \hbar \alpha}{T} \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \frac{T^3}{\hbar^3}$$

gegeben. Für das betrachtete Pionengas erhält man mit  $z_{\pi^+}^2 = z_{\pi^-}^2 = 1$ ,  $z_{\pi^0} = 0$  eine temperaturabhängige charakteristische Länge  $\lambda$ , die proportional zur Feinstrukturkonstanten  $\alpha = e^2/(4\pi\hbar)$  ist. Als Lösung ergibt sich ein exponentiell abklingendes Potential um das Pion mit der Ladung  $e_b = z_b e$ ,

$$\phi_b(r) = e_b \frac{\exp(-r/\lambda)}{r}.$$

Aufgrund der Comptonschen Beziehung  $\lambda = \hbar/m$  entspricht dieses elektrische Feld um eine Ladung dem, welches durch Bosonen der Masse

$$m = \sqrt{(4\pi)^2 \alpha \frac{2\zeta(3)}{\pi^2}} T \sim \sqrt{\alpha} T$$

vermittelt würde ('massive Photonen'). Für Felder  $\phi \sim 1/r$  würde die Coulomb-Energie des im Ganzen neutralen Plasmas verschwinden, durch die Abschirmung der geladenen Pionen (Teilchen-Korrelation) ergibt sich jedoch eine endliche Korrektur,

$$e_{\text{kor}} = \frac{E_{\text{kor}}}{V} = -\sqrt{\pi} \left( 4\pi \alpha \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \right)^{3/2} \frac{T^4}{\hbar^3}.$$

Das Verhältnis zur Stefan-Boltzmann-Energiedichte,

$$\left| \frac{e_{\text{kor}}}{e_{SB}} \right| = \frac{\frac{1}{\pi} \left( 8 \alpha \zeta(3) \right)^{3/2}}{3\pi^2/30} \approx 6 \cdot 10^{-3},$$

ist vernachlässigbar klein und (in unserer Näherung  $m_\pi \lesssim T$ ) temperaturunabhängig.

Die Pionen existieren in drei Isospin-Projektionen:  $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ . Die geladenen Pionen setzen sich aus zwei u- und d-Flavors zusammen ( $u\bar{d}$  bzw.  $\bar{u}d$ ), während das neutrale  $\pi^0$  eine Mischung von Quarks und Antiquarks beider Flavors ist. Durch die Vernachlässigung der s-Quarks erhält man also ein Modell ohne Seltsamkeitsfreiheitsgrade. Die Pionen als Spin-0-Teilchen unterliegen der Bose-Einstein-Statistik. Der Druck und die Energiedichte dieses dreifach entarteten Stefan-Boltzmann-Gases folgen aus Gleichung (1.18),

$$p_\pi(T) = g_\pi \frac{\pi^2 T^4}{90 \hbar^3} \quad \text{mit} \quad g_\pi = 3,$$

$$e_\pi(T) = 3 p_\pi(T) = g_\pi \frac{\pi^2 T^4}{30 \hbar^3}.$$

Die Gleichungen (1.28) und (1.29) für das Bag-Modell vereinfachen sich im Falle  $\mu = 0$ ,

$$p_B(T) = g_{12} \frac{\pi^2 T^4}{90 \hbar^3} - B,$$

$$e_B(T) = 3 p_B(T) + 4B = g_{12} \frac{\pi^2 T^4}{30 \hbar^3} + B,$$

wobei die effektive Entartung des QGP

$$g_{qg} := \left[ \frac{7}{8} g_q + g_g \right] \quad (1.32)$$

ist. Die Phasenübergangstemperatur  $T_c$  wird durch die Gleichheit der Drücke der beiden Phasen bestimmt, siehe Gleichung (1.31),

$$p_B(T_c) = p_\pi(T_c). \quad (1.33)$$

Dies liefert eine Beziehung zwischen der Bag-Konstanten und  $T_c$  (daß es eine solche Beziehung geben muß, ist klar, denn würden alle Teilchen als ideales Gas beschrieben, gäbe es keine physikalische Skala, die  $T_c$  festlegen könnte),

$$T_c^4 = \frac{90}{\pi^2 \left( \left[ \frac{7}{8} g_q + g_g \right] - g_\pi \right)} \hbar^3 B. \quad (1.34)$$

Am Übergangspunkt wandelt sich die Phase mit dem niedrigeren Druck in die mit dem höheren Druck um. Die Ableitung des Druckes bestimmt jedoch die Energiedichte der jeweiligen Phase, so daß sich die Energiedichte bei der Phasenumwandlung ändert,

$$\Delta e := e_B(T_c) - e_\pi(T_c) = 3p_B(T_c) + 4B - 3p_\pi(T_c) = 4B. \quad (1.35)$$

Dieses unstetige Verhalten der *ersten* Ableitung des thermodynamischen Potentials, d.h., die endliche latente Wärme  $\Delta e$ , zeigt einen Phasenübergang *erster* Ordnung an. In den Abbildungen 1.7 und 1.8 wird der Einfluß der Zahl  $N_f$  der effektiven Quark-Flavors dargestellt<sup>2</sup>. Während der Druck des Quark-Gluon-Gases in der unmittelbaren Umgebung der Übergangstemperatur nicht stark von  $N_f$  abhängt, vergleiche Abbildung 1.7, wird beim 'Ausfrieren' einer größeren Anzahl von Quarks bei  $T_c$  eine deutlich größere latente Wärme  $\Delta e$  freigesetzt, siehe Abbildung 1.8.

---

<sup>2</sup>Die Aufnahme der seltsamen Quarks in die Betrachtung ändert im wesentlichen nur die Thermodynamik der Deconfinement-Phase, da die seltsamen Hadronen aufgrund ihrer großen Masse ( $M_s \gtrsim 500$  MeV) thermisch unterdrückt sind (typische Korrekturen liegen in der Größenordnung von 10%).

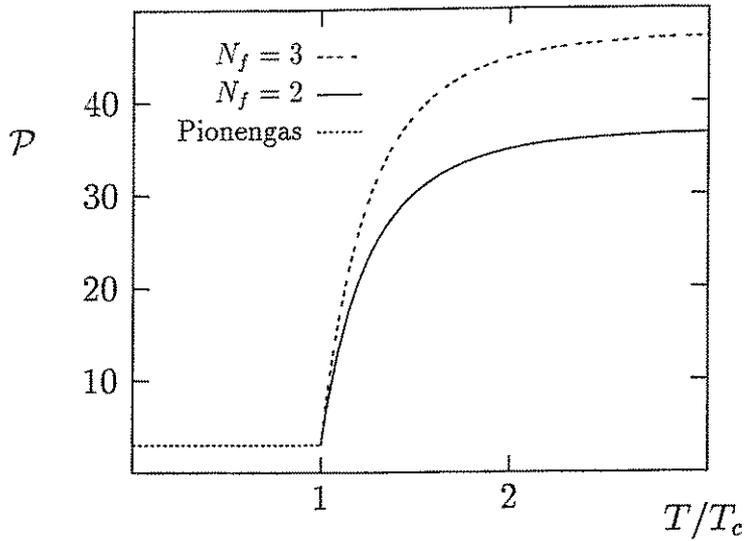


Abbildung 1.7: Der skalierte Druck  $\mathcal{P} := p(T) [\pi^2 T^4 / (90 \hbar^3)]^{-1}$  des idealisierten Pionengases (gepunktete Kurve) und des Bag-QGP mit  $N_f = 2$  Quark-Flavors bzw. mit  $N_f = 3$ . Unterhalb der Übergangstemperatur  $T_c$  liegen im Gleichgewicht Pionen vor, die bei  $T_c$  in Quarks und Gluonen dissoziieren. Die Anzahl der effektiven Quark-Flavors ist erst bei hohen Temperaturen wesentlich, nicht aber in der Umgebung von  $T_c$ .

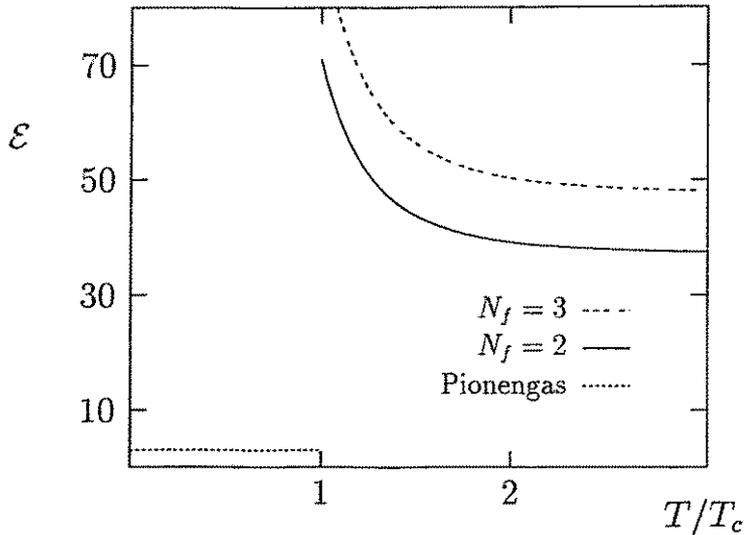


Abbildung 1.8: Die skalierte Energiedichte  $\mathcal{E} := e(T) [\pi^2 T^4 / (30 \hbar^3)]^{-1}$  des Pionengases und des Bag-QGP. Die latente Wärme, die bei der Phasenumwandlung freigesetzt oder verbraucht wird, hängt sensitiv von der Zahl  $N_f$  der Flavors ab.

## 1.3 Das Gluonengas

Der thermodynamische Apparat für Quanteneichfelder wird skizziert. Die perturbative Zustandsgleichung der Gluonen bei hohen Temperaturen und ein phänomenologisches Modell werden mit thermodynamisch konsistenten Ergebnissen der  $SU(3)$ -Gittereichtheorie verglichen.

### 1.3.1 Allgemeines zur Thermodynamik von Eichfeldern

Die thermischen Eigenschaften eines beliebigen physikalischen Systems werden durch die Angabe der Zustandssumme  $Z$  beschrieben.  $Z$  ist die Summe der Häufigkeiten aller möglichen Zustände des Systems im thermodynamischen Gleichgewicht. Für Quantenfelder  $\Phi$  kann die Zustandssumme als ein Funktional-Integral über alle möglichen Feldkonfigurationen ausgedrückt werden, siehe z.B. [Ber],

$$Z_{\Phi}(\beta, V) = \int \mathcal{D}\Phi \exp \{-S_e[\Phi](\beta, V)\} .$$

Die sogenannte Euklidische Wirkung  $S_e$  ist ein Funktional der Feldkonfiguration  $\Phi(\bar{x}^\mu)$  und eine Funktion der Temperatur  $T =: \beta^{-1}$  und des Volumens  $V$ ,

$$S_e[\Phi](\beta, V) := \int_0^\beta dt \int_V d^3x \mathcal{L}(\Phi(\bar{x}^\mu), (\bar{\partial}_\mu \Phi)(\bar{x}^\mu)) \quad \text{mit } x^\mu \longrightarrow \bar{x}^\mu := (it, \vec{x}) .$$

Je nach der Statistik, der die Quanten des Feldes gehorchen, wird die Integration über 'periodische' oder 'antiperiodische' Feldkonfigurationen geführt,

$$\forall \vec{x} : \quad \Phi(0, \vec{x}) = \begin{cases} -\Phi(\beta, \vec{x}) & \text{für Fermionen} \\ +\Phi(\beta, \vec{x}) & \text{für Bosonen} . \end{cases}$$

Die Lagrangedichte der Eichfelder  $\mathcal{A}^a$ ,  $a = 1 \dots (N_c^2 - 1)$ , der Gruppe  $SU(N_c)$  ist wie in der  $U(1)$ -Elektrodynamik eine Lorentz-invariante quadratische Form der Feldstärken<sup>3</sup>,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} .$$

Die Feldstärke des Gluon-Feldes mit dem Colorindex  $a$

$$F_{\mu\nu}^a := \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + g f_{bc}^a \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c$$

unterscheidet sich von der elektromagnetischen Feldstärke um den quadratischen Term  $g f_{bc}^a \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c$ . Die Strukturkonstanten  $f_{bc}^a$  werden durch die Algebra der Generatoren  $\tau_j$  ( $j = 1 \dots N_c^2 - 1$ ) der  $SU(N_c)$  definiert,

$$[\tau_a, \tau_b] = i f_{ab}^c \tau_c .$$

Die Strukturkonstanten Abelscher Eichgruppen sind identisch Null. Der nicht-Abelsche Term beschreibt eine Selbstwechselwirkung der Eichfelder mit der Kopplungsstärke  $g$ . Für 'große' Impulse  $k$  wird der Einfluß der Selbstwechselwirkung geringer,

$$\partial \mathcal{A} \longrightarrow k \mathcal{A}(k) \gg g(k) \mathcal{A}^2(k) ,$$

<sup>3</sup>Die Einsteinsche Summenkonvention ist hier sinngemäß auch auf den Colorindex  $a$  anzuwenden; ob ein Index oben oder unten steht, hat allerdings keine Bedeutung.

und die nicht-Abelschen Eichbosonen sollten den Photonen der Elektrodynamik 'ähnlicher' werden und daher durch perturbative Methoden beschreibbar sein. Da andererseits die Abhängigkeit der Felder  $\mathcal{A}$  vom Impuls durch die Bewegungsgleichungen gegeben ist, stellt die Ungleichung eigentlich eine Bedingung für  $g(k)$  dar, unter der dies tatsächlich der Fall ist. Eine Anwendung der Störungstheorie für große Impulse ist nun insofern konsistent, als daß im Rahmen dieses Apparates mit Hilfe der Theorie der Renormierungsgruppen gezeigt werden kann, daß die 'laufende' Kopplungskonstante  $g(k)$  mit wachsendem Impulsübertrag kleiner wird. Dies wird als *asymptotische Freiheit* der nicht-Abelschen Eichfeldtheorien bezeichnet.

### 1.3.2 Gibt es einen gluonischen Phasenübergang?

In der Einleitung wurde versucht, den hadronischen Phasenübergang durch die Betrachtung des freien Pionengases plausibel zu machen, ohne in irgendeiner Form auf die Rolle der Gluonen einzugehen. Da jedoch die Eichbosonen der QCD direkt miteinander wechselwirken, ist selbst ein QCD-Phasenübergang im rein gluonischen Sektor durchaus denkbar. Tatsächlich gibt es sowohl theoretische als auch erste experimentelle Befunde, die auf die Existenz von gebundenen Gluonenzuständen, die die Confinement-Phase bilden könnten, hindeuten. Aus numerischen Rechnungen wird geschlossen, daß die Massen dieser sogenannten *Glueballs* in der Größenordnung von 1 GeV oder etwas darüber liegen. Hier soll ein eher formales Argument für einen gluonischen Phasenübergang angeführt werden [Kap89].

Aufgrund der Eigenschaft der asymptotischen Freiheit wird die impulsabhängige Kopplungskonstante  $\alpha_s(k)$  für große Impulse (oder kleine Abstände) kleiner und der Apparat der Störungsrechnung kann angewendet werden. Dies gilt auch für 'hohe' Temperaturen, denn im thermischen Gleichgewicht ist der mittlere Impuls  $\bar{k}$  mit der Temperatur verknüpft,  $\bar{k} \sim T$ , und bei 2-Teilchen-Prozessen wird der übertragene Impuls groß. Daher kann durch die Berücksichtigung von Wechselwirkungsgraphen einer gegebenen Ordnung die Zustandssumme oder der Druck (als thermodynamisches Potential) bei hohen Temperaturen nach den Potenzen der Kopplungskonstanten  $\alpha_s$  entwickelt werden (Hochtemperatur-Entwicklung),

$$p(T) = p_0(T) + p_1(T) + \dots \quad (1.36)$$

In niedrigster Ordnung ist das Gluonensystem ein Gas freier masseloser Bosonen mit dem Druck eines Stefan-Boltzmann-Gases, siehe Abschnitt 1.2.2,

$$p_0(T) = g_g \frac{\pi^2}{90} \frac{T^4}{\hbar^3} \quad \text{mit } g_g = 2 \cdot N_g = 16.$$

Die Wechselwirkungsgraphen niedrigster Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  liefern einen negativen Beitrag zum Druck, was gewissermaßen durch die Bezeichnung 'Gluonen' suggeriert wird. Neben den rein gluonischen 3- und 4-Punkt-Wechselwirkungen gibt es in einem Gluonengas noch endliche Beiträge der sogenannten Geist-Felder, siehe Abbildung 1.9. Die Quanten dieser Felder sind als reale Teilchen nicht beobachtbar, treten aber sehr wohl in der Berechnung von Schleifengraphen auf und kompensieren unphysikalische Freiheitsgrade der QCD.

Bei der Berechnung der höheren Ordnungen treten Probleme durch Infrarot-Divergenzen

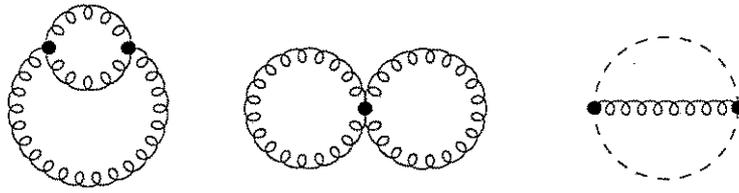


Abbildung 1.9: Die Feynman-Graphen, die mit der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  zum Druck (zur Zustandssumme) des Gluonenplasmas beitragen. ‘ $\circ\circ\circ$ ’ stellen Gluonen dar und ‘-----’ sind Geistfelder.

auf. Einige der divergenten Graphen der Ordnungen  $\mathcal{O}(\alpha_s^n)$ ,  $n \geq 2$ , können jedoch zu einem endlichen Ergebnis aufsummiert werden<sup>4</sup>, siehe Abbildung 1.10, und liefern einen Beitrag von der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$  [Kap79]. Dieser sogenannte Plasmon-Term zeigt, daß

$$\left[ \frac{1}{2} \text{diagram}_1 - \frac{1}{3} \text{diagram}_2 + \dots \right]$$

$$\circ\pi\circ := \left( \text{diagram}_3 + \right) \text{diagram}_4 - \frac{1}{2} \text{diagram}_5 - \frac{1}{2} \text{diagram}_6$$

Abbildung 1.10: Der Beitrag der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$  ist eine unendliche Summe von Termen der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^n)$ ,  $n \geq 2$ , die jeder für sich divergent sind, in der Aufsummation aber ein endliches Resultat ergeben. ‘ $\circ\pi\circ$ ’ ist der renormierte gluonische Polarisationsstensor. (In einem reinen Gluonenplasma fehlen die Quark-Schleifengraphen.)

auch bei relativ schwachen Kopplungen nicht-störungstheoretische Effekte von Bedeutung sind. Bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$  erhält man (unter Berücksichtigung der entsprechenden

<sup>4</sup>In ähnlicher Weise kann die unendliche Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x-1}$  von bei  $x = 0$  divergenten Summanden formal in einen Ausdruck umgeformt werden, der ‘bei  $x = 0$  endlich’ ist.

Geist-Beiträge) für den Gluonendruck das Resultat

$$\begin{aligned} p(T; \alpha_s) &= p_0 + p_1 + p_{3/2} + \dots \\ &= g_s \frac{\pi^2 T^4}{90 \hbar^3} \left[ 1 - 15 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right) + 240 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{3/2} + \mathcal{O}(\alpha_s^2) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Es ist ebenfalls bekannt, siehe [Kap79], daß in der folgenden Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  ein Term der Gestalt  $\alpha_s^2 \ln(\alpha_s)$  vorkommt.

Für die laufende Kopplungskonstante  $\alpha_s$  kann das Resultat niedrigster Ordnung der Renormierungstheorie eingesetzt werden, denn die folgenden Glieder liefern Terme, die in der Entwicklung (1.37) bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$  ohnehin nicht mehr berücksichtigt werden. Der Ausdruck für die Kopplungskonstante lautet [Kap79]

$$\alpha_s(k) := \frac{g^2}{4\pi} = \frac{4\pi}{11 - \frac{2}{3} N_f} \ln^{-1} \left[ \left( \frac{k}{\Lambda} \right)^2 \right], \quad (1.38)$$

wobei  $N_f$  als Zahl der effektiven Quark-Flavors im *Gluonenplasma*  $N_f = 0$  gesetzt wird.  $\Lambda$  ist eine Renormierungskonstante. Im thermodynamischen Gleichgewicht ist der mittlere Impuls  $\bar{k}$  masseloser Teilchen direkt mit der Temperatur verknüpft,

$$\begin{aligned} \langle k^n \rangle &:= \frac{\int d^3k k^n [\exp(\beta\epsilon) - 1]^{-1}}{\int d^3k [\exp(\beta\epsilon) - 1]^{-1}} = \frac{\int d^3k k^n [\exp(\beta k) - 1]^{-1}}{\int d^3k [\exp(\beta\epsilon) - 1]^{-1}} \\ &= \frac{\beta^{-(n+3)} \int d^3x x^n [\exp(x) - 1]^{-1}}{\beta^{-3} \int d^3x [\exp(x) - 1]^{-1}} \sim T^n. \end{aligned}$$

Unter Vernachlässigung von Beiträgen höherer Ordnung darf hier die freie Energie-Impuls-Relation  $\epsilon(\vec{k}) = |\vec{k}|$  angenommen werden. Wegen  $\bar{k} \sim T$  läßt sich daher nach Einführung einer neuen Konstanten  $T^* \sim \Lambda$  ein Ausdruck für die temperaturabhängige Kopplungskonstante angeben,

$$\alpha_s(T) := \frac{g^2(T)}{4\pi} = \frac{4\pi}{11 - \frac{2}{3} N_f} \ln^{-1} \left[ \left( \frac{T}{T^*} \right)^2 \right]. \quad (1.39)$$

In der Abbildung 1.11 ist die Abhängigkeit des Gluonendruckes von der Temperatur nach Gleichung (1.37) in den verschiedenen Ordnungen dargestellt. Der Druck ( $p_0 + p_1$ ) der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  wird für kleine Temperaturen

$$T \leq T_1 := \exp(15/22) T^* \approx 2 T^* \quad (1.40)$$

negativ. Dieses Resultat ist unphysikalisch und bedarf einer Interpretation, denn ein System mit negativem Druck ist mechanisch instabil und kann als Gleichgewichtszustand nicht existieren. Der Beitrag  $p_{3/2}$  der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$  kompensiert für Temperaturen  $T < T^* \exp(128/11) \sim 10^5 T^*$  den negativen Beitrag  $p_1$ . Unterhalb dieser Temperatur ist der Druck  $p_0 + p_1 + p_{3/2}$  daher größer (!) als der des freien Gluonengases und besitzt außerdem bei

$$T_{3/2} := \exp(3/8) T^* \approx 1.5 T^*$$

ein Minimum. Das impliziert, daß die Entropiedichte  $s = \partial p / \partial T$  bei  $T_{3/2}$  verschwindet und unterhalb von  $T_{3/2}$  sogar negativ wird, was ebenfalls ein unphysikalisches Ergebnis

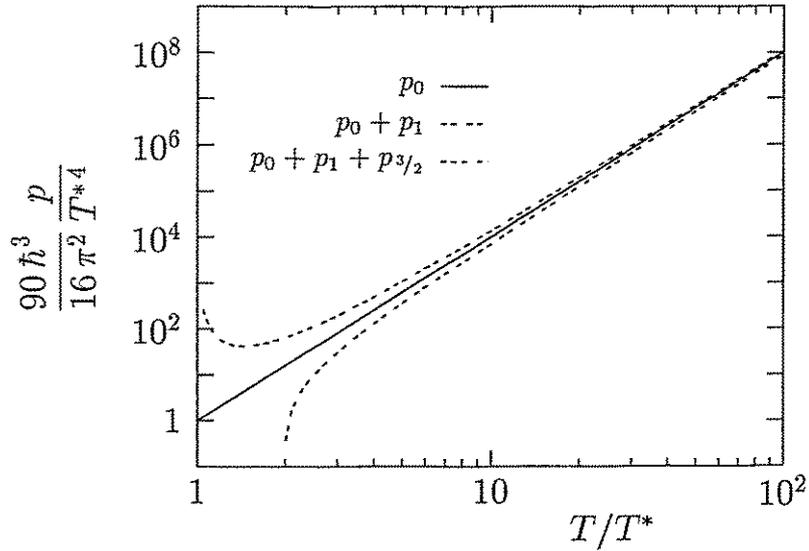


Abbildung 1.11: Der Druck eines Gluonenplasmas ist in nullter Ordnung proportional zu  $T^4$ . Bei Berücksichtigung der Beiträge der Ordnungen  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  bzw.  $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$  ergeben sich für Temperaturen in der Größenordnung der Normierungstemperatur  $T^*$  starke Abweichungen von dem Stefan-Boltzmann-Gesetz.

ist.

Beide Tatsachen zeigen, daß die Extrapolation der störungstheoretischen Ergebnisse zu kleinen Temperaturen zu inneren Widersprüchen führt, während für sehr hohe Temperaturen die Entwicklung (1.37) eine recht gute Konvergenz zeigt. Die perturbative Reihe ist jedoch eine Entwicklung nach einer Basis freier Zustände. Die physikalischen Inkonsistenzen sind somit ein Hinweis darauf, daß eine Entwicklung nach einer 'freien Basis' nicht der Physik bei kleinen Temperaturen und starken Kopplungen angepaßt ist.

In diesem Sinne sind die in den Entwicklungen  $p_0 + p_1$  bzw.  $p_0 + p_1 + p_{3/2}$  bei  $T \sim T^*$  auftretenden inneren Unstimmigkeiten als ein Hinweis auf die mögliche Existenz einer anderen, stabileren Phase bei  $T \lesssim T^*$  anzusehen sowie auf die Notwendigkeit, nahe  $T^*$  nicht-perturbative Methoden anzuwenden.

### 1.3.3 Die Übertragung des Bag-Modells auf das Gluonengas

Im Abschnitt 1.2.2 wurde zur einfachen nicht-perturbativen Beschreibung eines stark wechselwirkenden Systems von Quarks und Gluonen das Bag-Modell vorgestellt. Die dort eingeführte Bag-Konstante  $B$  berücksichtigte den Energieunterschied zwischen dem realen und dem störungstheoretischen Vakuum. Es ist nun interessant zu fragen, welche Gemeinsamkeiten zwischen dieser nicht-störungstheoretischen, phänomenologischen Betrachtungsart und der im letzten Abschnitt diskutierten perturbativen Entwicklung

bestehen.

Um diesen Vergleich vornehmen zu können, muß die charakteristische Skala des Bag-Modells, die Übergangstemperatur  $T_c$  oder die Bag-Konstante, mit der 'Renormierungstemperatur'  $T^*$  der temperaturabhängigen Kopplungskonstanten (1.39) in Beziehung gebracht werden. Eine natürliche, wenn auch nicht zwingende Wahl ist die folgende: Die 'Renormierungstemperatur'  $T^*$  wird so festgelegt, daß der Druck in der ersten Störungsordnung  $p_0(T) + p_1(T)$  bei der Übergangstemperatur  $T_c$  des Bag-Gluonengases verschwindet (siehe Gleichung (1.28) mit  $\mu = 0$  und  $g_q = 0$ ); dies entspricht nach Gleichung (1.40)

$$T^* = \exp(-15/22) T_c. \quad (1.41)$$

Der Vergleich des Bag-Druckes mit  $p_0(T) + p_1(T)$  in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  zeigt das interessante Resultat, siehe Abbildung 1.12, daß die nicht-perturbative, phänomenologische Betrachtungsweise qualitativ ähnliche Vorhersagen macht wie die störungstheoretische in niedrigster Ordnung. Der Druck  $p_0 + p_1 + p_{3/2}$  mit Beiträgen der folgenden Ordnung in

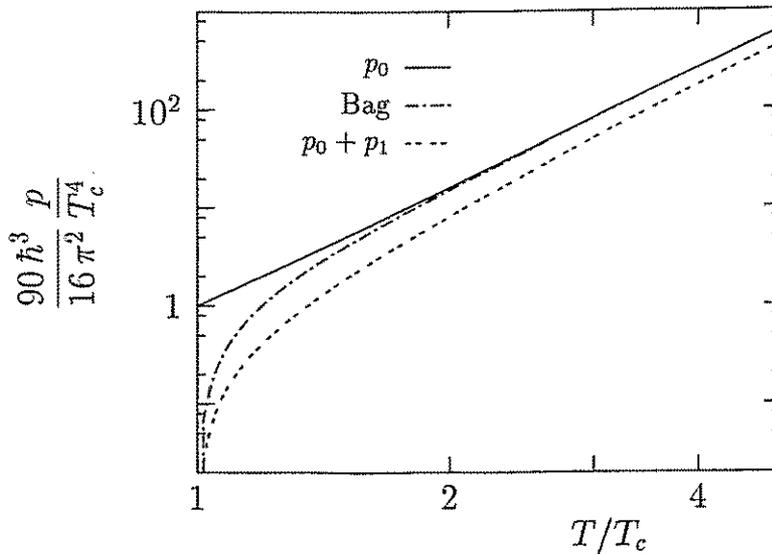


Abbildung 1.12: Der Vergleich des Druckes in der ersten Störungsordnung (zur Wahl der 'Renormierungskonstanten' siehe Text) mit dem Bag-Modell zeigt den in beiden Fällen verringerten Druck nahe  $T^*$ ; für größere Temperaturen mündet der Bag-Druck jedoch schneller in das Verhalten  $p \sim T^4$  des idealen Gases ein.

der Störungsreihe zeigt offenbar gerade die entgegengesetzte Tendenz für den Temperaturbereich um  $T_c$ , siehe Abbildung 1.11.

Sieht man die physikalische Intuition, die auf den Gedanken des Bag-Modells führte, als zumindest qualitativ richtig an, so muß man aus dieser Tatsache folgenden Schluß ziehen: Das Resultat der ersten Störungsordnung ist physikalisch plausibel. Die Beiträge der folgenden Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$  liefern jedoch bei 'kleinen' Temperaturen ein Ergebnis, welches nicht den physikalischen Erwartungen entspricht. Dies deutet noch nicht mit Notwendigkeit auf den Zusammenbruch der Störungstheorie hin, ist aber ein Zeichen dafür, daß die bisher nicht bekannten Terme höherer Ordnung nicht vernachlässigbar

klein sein können. Um insgesamt ein vernünftiges Ergebnis zu erhalten, müssen die Terme höherer Ordnung berücksichtigt werden.

### 1.3.4 Gitter-Daten und ihre Interpretation

Die Zustandssumme ist, wie im Abschnitt 1.3.1 beschrieben, ein Funktional-Integral über alle Feldkonfigurationen des gegebenen Quantensystems mit der Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$ . Während im Falle kleiner Kopplungsstärken eine Entwicklung der Zustandssumme der Gluonen nach Potenzen von  $\alpha_s$ , möglich ist, vergleiche Abschnitt 1.3.2, konnten die Eigenschaften 'stark' wechselwirkender Gluonen bisher nur durch numerische Berechnung verlässlich studiert werden. Hier können nur einige Ideen der numerischen Methoden zur Behandlung der Quanteneichfeldtheorien umrissen werden; eine Einführung in die sogenannte Gitter-Eichfeldtheorie und speziell der Gitter-QCD findet man z.B. in [Rot].

Durch eine Diskretisierung des Zeit-Raum-Kontinuums zu einem Gitter mit der Gitterkonstanten  $a$  gehen die Funktionalintegrale in Summen über, die mit einem Computer, wenn auch mit einem beträchtlichen Aufwand, ausgewertet werden können. Die Länge  $a$  legt auf dem Gitter eine typische Impulsskala fest,  $k \sim a^{-1}$ , auf die alle relevanten Größen zu beziehen sind. Auch die impulsabhängige Colorladung  $g(k)$  wird durch den Gitterabstand reguliert, der Zusammenhang  $g(a)$  wird durch die sogenannte QCD- $\beta$ -Funktion beschrieben,  $-a\partial g/\partial a =: \beta_{\text{QCD}}(g)$ . Bei der praktischen Berechnung der Funktionalintegrale macht man sich die freie Wahl der Eichung zunutze und summiert statt über die Feldkonfigurationen über die Elemente der Eichgruppe  $SU(N_c)$ , siehe [Wil]. Um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten, werden zur numerischen Auswertung Monte-Carlo-Methoden verwendet. Als Ergebnis hinreichend langer Iteration erhält man die Zustandssumme als Funktion der Colorladung  $g$  bzw. der QCD- $\beta$ -Funktion. Die physikalische Interpretation dieser Daten ist aus zweierlei Gründen recht schwierig.

(i) Es ist keineswegs offensichtlich, daß man von einem endlichen Gitter auf ein unendlich ausgedehntes Gitter und im thermodynamischen Limes sogar auf das Kontinuum schließen kann<sup>5</sup>. Zum einen ist auf einem endlichen Gitter das Impulsspektrum diskret und beschränkt. – Die im Kontinuum auftretenden Divergenzen in bestimmten Graphen werden daher auf dem Gitter 'automatisch' reguliert, wobei nicht von vornherein klar ist, welche Artefakte die Wahl des Gitters liefert. Andererseits ist bekannt [En82], daß selbst das wechselwirkungsfreie Gas auf einem endlichen Gitter einen anderen Druck und eine andere Energiedichte als im thermodynamischen Limes besitzt; der Zusammenhang  $e_0 = 3p_0$  behält jedoch weiterhin Gültigkeit. Schließlich kann ein Phasenübergang, den man zu finden hofft, auf einem endlichen Gitter im strengen Sinne überhaupt nicht stattfinden, da alle Unstetigkeiten in Abhängigkeit von der Gittergröße ausgeschmiert werden.

(ii) Wie bezieht man die errechneten Daten auf physikalische Größen, d.h., wie lautet der Zusammenhang zwischen der QCD- $\beta$ -Funktion und der Temperatur? Verwendet man perturbative Resultate niedriger Ordnung (sogenannter

---

<sup>5</sup>Ein typisches, berechenbares Gitter ist von der Größe  $4 \times 16^3$  und erscheint 'recht klein'. Die relevante Zahl zur Beurteilung der Größe eines Gitters ist jedoch die Zahl benachbarter Gitterplätze (*Links*). In diesem Sinne ist ein  $4 \times 16^3$  Gitter mit ca. 65000 Links schon 'recht groß'.

*weak-coupling* Limes), so erhält man thermodynamisch inkonsistente Aussagen wie  $p < 0$ ,  $e \neq T\partial p/\partial T - p$ , so daß dies keine geeignete Prozedur ist.

Eine Methode der Behandlung der sogenannten *finite size*-Probleme (i) ist die Verwendung von *verschieden* großen Gittern, auf denen nicht der Druck und die Energiedichte als physikalisch bedeutsame Größen angesehen werden, sondern deren Verhältnis zu den Werten eines Stefan-Boltzmann-Gases auf dem Gitter.

Einen Ausdruck für die in (ii) gesuchte  $\beta$ -Funktion kann man erhalten, indem das analytisch berechenbare *weak-coupling* Resultat in geeigneter Weise verallgemeinert und als ein Ansatz mit gewissen Koeffizienten verwendet wird. Die Koeffizienten können jeweils für ein bestimmtes Gitter aus (numerischen) nicht-perturbativen Berechnungen ermittelt werden. Man erhält die  $\beta$ -Funktion in Abhängigkeit der Gitterkonstanten  $a$ . Weil  $a$  als Längenskala auch eine Energie- bzw. Temperaturskala vorgibt,  $a_c/a = T/T_c$  mit gewissen Konstanten  $a_c$  und  $T_c$ , kann man den Gitterabstand eliminieren und erhält die Kopplungsstärke als Funktion der skalierten Temperatur  $T/T_c$ . Eine spezielle Wahl von  $T_c$  ist die Übergangstemperatur bei dem vermuteten gluonischen Phasenübergang.

Das Resultat einer in ähnlicher Weise interpretierten Gitterrechnung, vergleiche [En90], ist in der Abbildung 1.13 dargestellt. Im Gegensatz zu den nicht-interpretierten Daten in

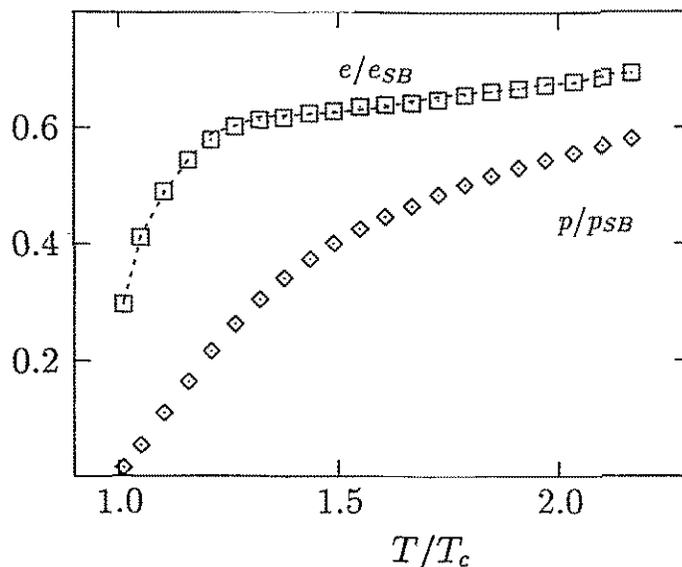


Abbildung 1.13: Energiedichte und Druck des Gluonenplasmas in Einheiten der entsprechenden Stefan-Boltzmann-Größen in Abhängigkeit von der skalierten Temperatur. Die Gluonen-Gitterdaten sind thermodynamisch selbstkonsistent:  $e = Tp' - p$  (gestrichelte Kurve), Daten aus Referenzen [Bro] und [En90].

[Bro] sind diese Ergebnisse thermodynamisch selbstkonsistent, d.h., die aus den Gitterdaten für den Druck berechnete Energiedichte  $T\partial p/\partial T - p(T)$  stimmt mit den Gitterdaten  $e$  sehr gut überein. (Bezieht man Druck und Energiedichte auf die Werte eines Stefan-Boltzmann-Gases, so lautet die Gibbs'sche Beziehung  $e/e_{SB} = \frac{1}{3}T\partial(p/p_{SB})/\partial T + p/p_{SB}$ .) Die Tatsache  $p/p_{SB} < e/e_{SB}$  ist in Übereinstimmung mit der allgemeinen These  $3p \leq e$ ,

siehe Abschnitt 1.1.1. Die skalierte Energiedichte steigt zunächst bei  $T \gtrsim T_c$  stark an, nähert sich aber für steigende Temperaturen (wie auch der Druck) nur sehr langsam dem Verhalten eines Stefan-Boltzmann-Gases an. Die einfachen Zusammenhänge  $e_0 = 3p_0$ ,  $e_0/e_{SB} = p_0/p_{SB}$  für ein freies Gas auf dem Gitter sind durch das Gluonengas im gegebenen Temperaturbereich offensichtlich nicht erfüllt. Das deutet darauf hin, daß auch bei  $T/T_c \sim 2$  nicht-perturbative Effekte von großer Bedeutung sind<sup>6</sup>.

Trotz dieser Feststellung ist ein Vergleich der perturbativen Ergebnisse mit den Gitter-Daten recht interessant. Wie bereits im Abschnitt 1.3.3 bemerkt wurde, ist die Voraussetzung für den Gluondruck in erster Störungsordnung vernünftig (Absenken des Stefan-Boltzmann-Druckes), während die Beiträge der folgenden Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$  ein unphysikalisches Ergebnis liefern (bei 'kleinen' Temperaturen und ohne die unbekanntenen Terme höherer Ordnung). Aus diesem Grunde verwenden wir bei dem anzustellenden Vergleich als thermodynamisches Potential den Druck  $p_0(T) + p_1(T)$  in erster Ordnung, siehe Gleichung (1.37). Die 'Renormierungstemperatur'  $T^*$  in Gleichung (1.39) wird wieder so gewählt, daß  $p_0(T) + p_1(T)$  gerade bei der Übergangstemperatur  $T_c$  verschwindet (auch der 'Gitterdruck' wird nahe  $T_c$  sehr klein), siehe Gleichung (1.41). Die so skalierten numerischen und perturbativen Ergebnisse werden in der Abbildung 1.14 miteinander verglichen. Die Energiedichte in erster Ordnung  $e_0 + e_1 = 3(p_0 + p_1)$  fällt in der skalierten Darstel-

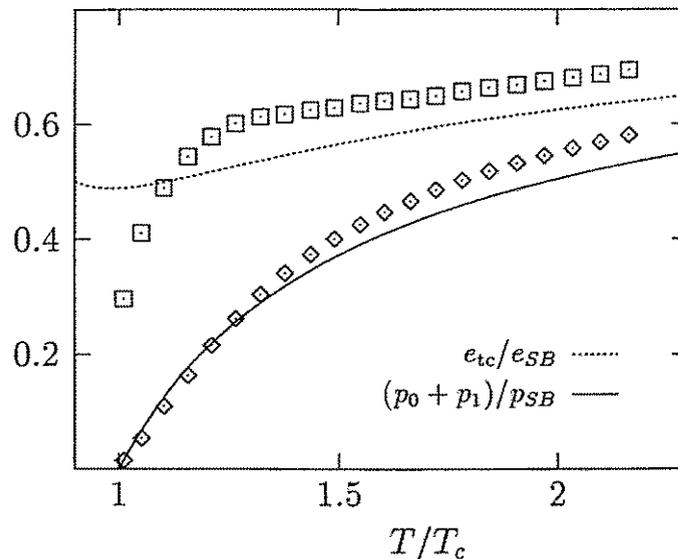


Abbildung 1.14: Vergleich der nicht-perturbativen Gitterdaten mit den Ergebnissen der Störungstheorie. Der Druck  $(p_0 + p_1)$  in erster Ordnung bestimmt thermodynamisch konsistent die Energiedichte  $e_{tc}$ , die Terme  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  enthält. Die Kurve für die Energiedichte  $e_0 + e_1$  fällt in dieser Darstellung mit der Druckkurve zusammen.

lung mit der Druckkurve zusammen, erfüllt aber aufgrund der Temperaturabhängigkeit von  $\alpha_s$  nicht die Gibbs'sche Fundamentalgleichung! Im Sinne einer korrekten Thermodynamik vergleichen wir daher die Gitterdaten mit der *thermodynamisch* konsistenten

<sup>6</sup>In der ersten Störungsordnung gilt  $e_0 + e_1 = 3(p_0 + p_1) + \mathcal{O}(\alpha_s^2)$  (siehe weiter unten).

Energiedichte

$$e_{tc} := T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{p_0 + p_1}{T} \right) = e_{SB} \left[ 1 - 15 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right) + 5 \frac{22}{16\pi^2} \alpha_s^2 \right] = e_0 + e_1 + \mathcal{O}(\alpha_s^2).$$

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß  $e_{tc}$  keine konsistente perturbative Entwicklung darstellt und daß der zusätzliche Term  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  keineswegs vernachlässigbar klein ist (er macht gerade den Unterschied zwischen der Druck- und Energiedichtekurve aus). Die auf diese Weise erhaltenen Kurven stimmen mit den numerisch ermittelten erstaunlich gut überein, die Abweichung bei  $T \sim 2T_c$  beträgt weniger als 10%. Diese gute Übereinstimmung muß jedoch eher als Zufall angesehen werden, da das Weglassen von Termen  $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$ ,  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  im thermodynamischen Potential nicht durch die Kleinheit dieser Terme begründet werden kann.

Wie aus der Abbildung 1.15 hervorgeht, kann das Bag-Modell für Gluonen die Gitterdaten nicht reproduzieren: Der Druck im Bag-Modell erreicht das Verhalten eines idealen Gases wesentlich schneller als der Gluonendruck, während die Bag-Energiedichte, im krasen Gegensatz zu den Gitterdaten, sogar größer als die des Stefan-Boltzmann-Gases ist. Es zeigt sich allerdings, siehe [Pe1], daß es möglich ist, den Zusammenhang  $p(e)$  für nicht

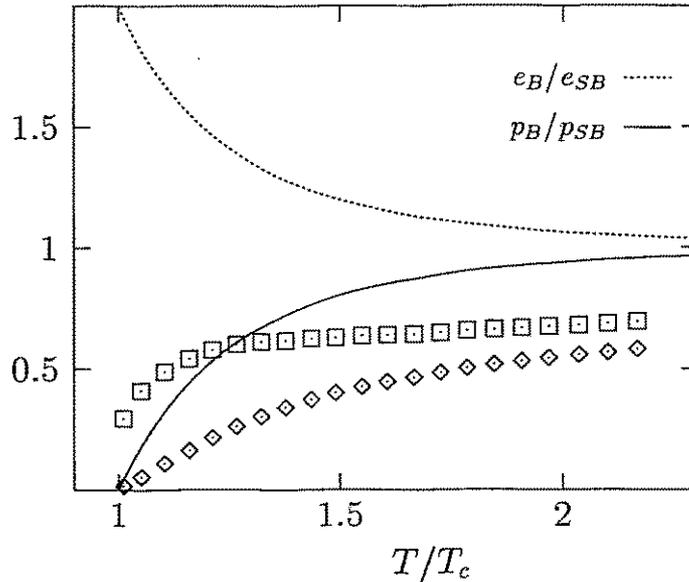


Abbildung 1.15: Vergleich des Gluonengases als Bag-Modell mit den Gitterdaten.

zu kleine Temperaturen durch eine ‘Bag-Modell’-Parametrisierung

$$p(e) = ae - \frac{4}{3} B \tag{1.42}$$

zu beschreiben, vergleiche Abbildung 1.16.

Das Anpassen der Konstanten an die Gitterdaten mit  $T > 1.4 T_c$  liefert

$$a = 0.297, \quad \frac{(\hbar^3 B)^{1/4}}{T_c} = 1.03.$$

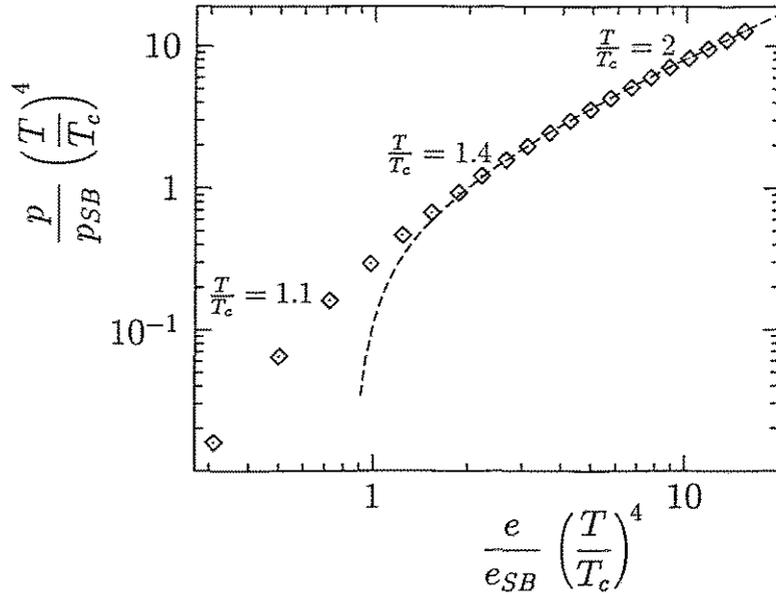


Abbildung 1.16: Das Gluonengas in der Bag-Parametrisierung  $p(e) = ae - \frac{4}{3}B$ .

Die Vorhersage des Bag-Modells ist  $a_B = 1/3$ ; ein davon abweichender Wert ist wieder ein Hinweis darauf, daß das Gluonengas auch bei  $2T_c$  keineswegs ideal ist. Aus dem ermittelten Wert der Konstanten  $B$  erhalten wir bei der Annahme einer Übergangstemperatur  $T_c \sim 100 \dots 200$  MeV eine Abschätzung für die Bag-Konstante, die in der Größenordnung anderer Voraussagen liegt.

Das Versagen des Bag-Modells trotz Berücksichtigung des falschen Vakuums liegt darin begründet, daß die Gluonen als frei idealisiert werden, während die bei kleineren Impulsüberträgen wachsende Kopplung zwischen den Gluonen zu einer kleineren Zahl effektiver Freiheitsgrade bei kleinen Temperaturen führen sollte. In [Ris] wird diese Verringerung der Freiheitsgrade in phänomenologischer Weise durch ein Abschneidemodell beschrieben: Alle Gluonen mit einem kleineren Impuls als einem Abschneideimpuls,  $k < K$ , werden als zu schweren Glue-Clustern gebunden angenommen (den Anteil der gebundenen Gluonen bestimmt die Bose-Verteilung), die nur wenig zu Druck und Energiedichte beitragen. Durch die Vorgabe von  $K$  wird 'per Hand' die Grenze zwischen nicht-perturbativem und perturbativem Regime vorgeschrieben; die thermisch angeregten Gluonen mit  $k > K$  werden als perturbativ (in erster Ordnung) beschreibbares Gluonengas angenommen. Durch eine geeignete Wahl der Bag-Konstanten  $B$ , des Abschneideimpulses  $K$  und der 'Renormierungstemperatur'  $T^*$  kann man die Gitterdaten besser beschreiben als in den Abbildungen 1.11 und 1.15, die Spezialfälle des Modells in Referenz [Ris] darstellen.

Im folgenden Abschnitt wird ein anderes phänomenologisches Modell zur Interpretation der Gitterdaten vorgeschlagen und diskutiert. Dieses Modell stellt einen Schwerpunkt in dieser Arbeit dar.

## 1.4 Gluonen mit thermischer Masse

Der Schlüssel für die Interpretation der Gluonen-Zustandsgleichung ist die Dispersionsrelation  $\omega(\vec{k})$ . Die Gitterdaten können durch die Dispersionsrelation freier Quasiteilchen  $\hbar\omega(\vec{k}) = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$  beschrieben werden;  $m \sim g(T)T$  ist die thermische Masse.

### 1.4.1 Die Dispersionsrelation der Quasi-Gluonen

Allgemein werden die Ausbreitungseigenschaften von Wellen durch die Dispersionsrelation, dem Zusammenhang zwischen der Frequenz  $\omega$  und der Wellenzahl  $\vec{k}/\hbar$ , bestimmt<sup>7</sup>. In einem Medium werden die Vakuum-Eigenschaften von Photonen (Eichbosonen der U(1)-Elektrodynamik) durch die Wechselwirkung mit dem Medium modifiziert. Die veränderte Dispersionsrelation der Photonen kann in phänomenologischer Weise durch Größen wie Polarisationsensor oder Brechungsindex beschrieben werden.

Im Gegensatz zu den Photonen, die nur mit elektrisch geladener Materie wechselwirken, koppeln die Gluonen direkt aneinander. Gluonen in einem Gluonenplasma befinden sich daher (im obigen Sinne) immer in einem 'äußeren' Medium (dem System der übrigen Gluonen), welches die Vakuum-Eigenschaften der Gluonen modifiziert. Ebenso wie für Photonen wirkt sich eine veränderte Dispersionsrelation auf die thermodynamischen Eigenschaften des Systems aus. In die Ableitung der Stefan-Boltzmann-Formel für den Photonendruck geht die Dispersionsrelation  $\epsilon(\vec{k}) = \hbar\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|$  ein. Der Photonendruck

$$p_\gamma = 2 \frac{\pi^2}{90} \frac{T^4}{(\hbar c)^3}$$

wird in einem Medium mit dem Brechungsindex  $n$ ,  $c \rightarrow c/n$ , aufgrund der dichteren Besetzung im Impulsraum um den Faktor  $n^3$  größer als der Vakuumdruck.

Durch eine andere als die (asymptotisch) freie Dispersionsrelation für Gluonen sollte es daher möglich sein, die Abweichungen des Gluonendruckes von dem eines Stefan-Boltzmann-Gases in der Abbildung 1.13) zu erklären. Während die Energie eines Photons mit dem Impuls  $\vec{k}$  in einem Medium mit dem Brechungsindex  $n$  kleiner als seine Energie  $c|\vec{k}|$  im Vakuum ist (was eine Erhöhung des Photonendruckes zur Folge hat), muß die gesuchte Relation für Gluonen offenbar der Forderung

$$\hbar\omega(\vec{k}) > c|\vec{k}| \quad (1.43)$$

genügen, weil der Gluonendruck kleiner als der Stefan-Boltzmann-Druck ist. Die Aufgabe der Interpretation der Gitterrechnungen besteht also darin, eine geeignete Dispersionsrelation der Gluonen im Plasma zu finden.

Auf der Suche nach der Gluonen-Dispersionsrelation lassen wir uns von der Idee des Quasiteilchen-Konzeptes leiten. Es hat sich in vielen Gebieten der Physik als äußerst fruchtbar erwiesen, wechselwirkende Teilchen durch freie Teilchen mit gewissen effektiven Eigenschaften, welche den Einfluß der Wechselwirkung berücksichtigen, zu beschreiben.

<sup>7</sup>Das entspricht dem Zusammenhang zwischen der Energie  $\epsilon = \hbar\omega$  und dem Impuls  $\vec{k}$  der Quanten dieses Wellenfeldes.

In der Physik der Festkörper kann man beispielsweise die mit dem Gitter wechselwirkenden Elektronen als freie Teilchen beschreiben, die jedoch mit einer impulsabhängigen Masse behaftet sind. Ebenso lassen sich die Gitteranregungen eines Festkörpers als ein Gas von Quasiteilchen (Phononen) interpretieren. Die Quasiteilchen sind nicht mit den eigentlichen Teilchen identisch, sie stellen vielmehr ein kollektives Phänomen der wechselwirkenden Teilchen dar.

In einfachster Weise und motiviert durch das Ergebnis für das fast-ideale elektromagnetische Plasma, siehe Abschnitt 1.2.3, können wir der Forderung (1.43) gerecht werden, indem wir den (freien) Quasiteilchen eine Masse zuordnen und von der Dispersionsrelation<sup>8</sup>

$$\hbar\omega(\vec{k}) = \sqrt{m_{\text{eff}}^2 + \vec{k}^2} \quad (1.44)$$

ausgehen; die Zustandsgleichung dieses Quasi-Gluonengases ist dann durch die Gleichung (1.7) gegeben. Die Masse  $m_{\text{eff}}$  ist hier zunächst nur ein *Parameter*, dessen Einführung der allgemeinen Forderung  $e \geq 3p$ , siehe Bemerkung im Abschnitt 1.1.1, sowie der Lorentz-Kovarianz nicht widerspricht. Durch eine geeignete Wahl des Masseparameters (jeweils für einen Datenpunkt  $(T_i, p(T_i))$ ) lassen sich die Gluonen durch ein freies Gas massiver Bosonen beschreiben, wobei als Entartungsfaktor  $g_g = 2 \cdot N_g = 16$  beibehalten wird. Die auf diese Weise gewonnene Abhängigkeit der effektiven Masse  $m_{\text{eff}}$  von der Temperatur ist in der Abbildung 1.17 dargestellt. Weil der Gluondruck nahe der Temperatur  $T_c$

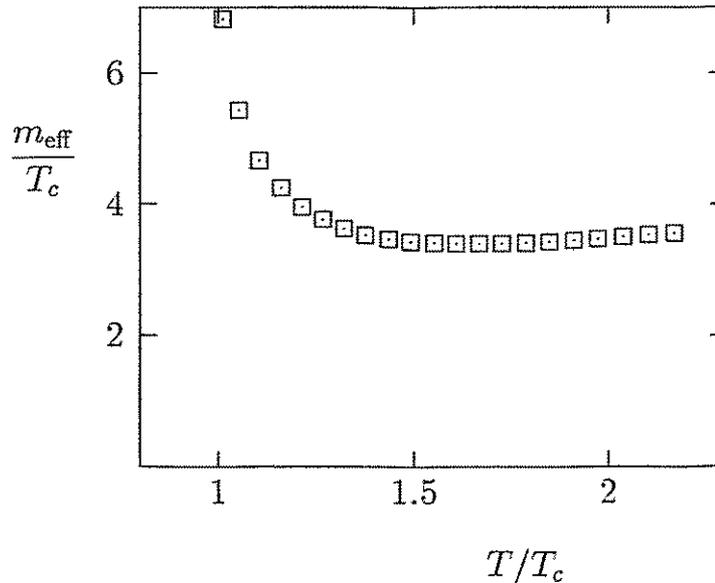


Abbildung 1.17: Die Abhängigkeit des Masseparameters von der Temperatur, die sich aus der Anpassung des Druckes eines freien Gases mit der Dispersionsrelation (1.44) an die Gitterdaten ergibt.

sehr klein, aber nicht Null wird, muß die effektive Masse dort stark anwachsen, ohne zu

<sup>8</sup>Ab hier wieder  $c \equiv 1$ .

divergieren. Da weiterhin das Verhältnis von dem Gluonen- zu dem Stefan-Boltzmann-Druck stetig zunimmt (und sich asymptotisch dem Werte 1 nähert), muß  $m_{\text{eff}}/T$  monoton kleiner werden, denn die Funktion  $p/p_{SB}(T) \sim f_-(a)$  mit  $a = m/T$  ist monoton fallend, siehe Abschnitt 1.1.2. Die effektive Masse selbst hat jedoch ein Minimum bei  $T/T_c \approx 1.6$  und steigt für große Temperaturen langsam wieder an.

Es sei hier noch einmal betont, daß es sich bei den hier eingeführten effektiven Massen  $m_{\text{eff}}(T_i)$  nur um einen Parametersatz handelt, der sowohl den Druck der Gittergluonen reproduziert als auch, aufgrund der thermodynamischen Konsistenz der Gitterdaten, die Energiedichte. Im folgenden Abschnitt geht es darum, einen analytischen Ausdruck für die Masseparameter zu finden.

### 1.4.2 Thermische Masse für Gluonen

Gluonen sind als Eichbosonen der Color-SU(3)-Eichtheorie streng *masselos* – eine endliche Masse würde das Prinzip der lokalen Eichinvarianz verletzen. Andererseits kann man, wie im vorangegangenen Abschnitt diskutiert, das Gluonenplasma endlicher Temperatur als ein Gas freier Teilchen mit einer Dispersionsrelation  $\hbar\omega = \sqrt{m_{\text{eff}}^2 + \vec{k}^2}$  verstehen, wobei dem Parameter  $m_{\text{eff}}$  die physikalische Bedeutung einer Masse der Quasigluonen zukommt.

Im perturbativen Regime in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  kann analytisch untersucht werden, in welchem Sinne die Plasma-Gluonen Eigenschaften massiver Teilchen annehmen. Die Argumentation kann hier nur qualitativ wiedergegeben werden, für eine genauere Diskussion muß auf die Literatur verwiesen werden, siehe z.B. [Kal], [Gro], [Kaj]. Grundlegendes zur Feldtheorie bei endlichen Temperaturen ist in Referenz [Ber] beschrieben.

Ebenso wie für verschwindende Temperaturen ist der Gluonenpropagator  $\mathcal{D}$  zum einen die Feldkorrelationsfunktion und zum anderen der inverse Greensche Operator der klassischen Feldgleichungen,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu}^{ab}(x) &= \langle \mathcal{A}_\mu^a(x) \mathcal{A}_\nu^b(0) \rangle, \\ \mathcal{D}_{ab}^{\mu\nu}(\omega_n, \vec{k}) &= [(\omega_n^2 + \vec{k}^2) \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} + \Pi_{\mu\nu}^{ab}(\omega_n, \vec{k})]^{-1}. \end{aligned}$$

Im Unterschied zu  $T = 0$  wird jedoch für endliche Temperaturen die Feldkorrelationsfunktion thermisch gemittelt und die Energiekomponente  $\hbar\omega_n$  des 4-Impulses kann aufgrund der Periodizitätsbedingung für die Felder und damit auch für  $\mathcal{D}$  nur diskrete Werte annehmen. Aus der Periodizitätsbedingung für Bosonenfelder, siehe Abschnitt 1.3.1, ergeben sich die sogenannten Matsubara-Frequenzen  $\omega_n = 2\pi Tn$ .  $\Pi^{ab}$  ist der bereits im Abschnitt 1.3.2 eingeführte Gluonen-Selbstenergietensor,

$$\Pi^{ab} = \begin{array}{c} a \qquad b \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \pi \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} .$$

Die langreichweitigen Korrelationen im Plasma werden durch den 'statischen' Limes  $\vec{k} \rightarrow 0$  bestimmt. Man kann zeigen, siehe z.B. [Kap89], daß für die Gluonen-Selbstenergie

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{k} \rightarrow 0} \Pi_{\mu\nu}(\omega = 0, \vec{k}) &= m_{\text{el}}^2 \delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}, \\ \lim_{\vec{k} \rightarrow 0} \Pi_{\mu\nu}(\omega \neq 0, \vec{k}) &= \left[ \frac{1}{3} m_{\text{el}}^2 + \mathcal{O}(\omega) \right] \delta_{\mu i} \delta_{\nu i} \end{aligned}$$

gilt, wobei die sogenannte elektrische Masse definiert ist als

$$m_{\text{el}}^2 := \frac{1}{3} \left( N_c + \frac{1}{2} N_f \right) g^2(T) T^2. \quad (1.45)$$

Aus dem Limes für  $\omega = 0$  folgt, daß die ‘Coulomb’-Komponente des Eichfeldes in großen Distanzen abgeschirmt ist,

$$\langle \mathcal{A}_0(x) \mathcal{A}_0(0) \rangle \sim \exp \left\{ -\frac{|\vec{x}|}{l_{\text{th}}} \right\} \quad \text{mit } l_{\text{th}} := \hbar/m_{\text{el}}.$$

Diese Abschirmung ist das Resultat thermischer Fluktuationen im Plasma. Sofern die Gluonen-Selbstenergie auch einen Quarkanteil besitzt, tragen auch die  $N_f$  Flavors zur elektrischen Masse und zur Abschirmung bei, siehe Gleichung (1.45). In diesem Sinne ist eine endliche ‘Masse’ der Gluonen Ausdruck für die Existenz einer charakteristischen Längenskala in dem wechselwirkenden Plasma. An dieser Stelle sei auf die Diskussion im Abschnitt 1.2.3 verwiesen, wo ein analoges Ergebnis für ein elektromagnetisches Plasma abgeleitet wurde; die ‘Masse’ der Photonen war proportional der Temperatur des Plasmas und der Wurzel der Kopplungsstärke,  $m \sim \sqrt{\alpha} T$ .

Für  $\omega \neq 0$  ist der Euklidische Propagator im statischen Limes von der Gestalt

$$\lim_{\vec{k} \rightarrow 0} \mathcal{D}_{\mu\nu}(\omega, \vec{k}) \sim \frac{\delta_{\mu 0} \delta_{\nu 0}}{\omega^2} + \frac{\delta_{\mu i} \delta_{\nu i}}{\omega^2 - \frac{1}{3} [m_{\text{el}}^2 + o(\omega)]};$$

$o(\omega)$  ist ein Ausdruck, der für  $\omega \rightarrow 0$  (stärker als  $\omega^2$ ) gegen Null geht. Der Pol des in-medium Propagators  $\mathcal{D}(\vec{k} \rightarrow 0)$  bei

$$m_{\text{pl}}^2 := \frac{1}{\Gamma_{\text{pl}}} m_{\text{el}}^2 \quad \text{mit } \Gamma_{\text{pl}} = 3, \quad (1.46)$$

hat im Quasiteilchenbild die physikalische Bedeutung einer ‘Ruhemasse’ der transversalen Anregungen des Gluonenplasmas,  $m_{\text{pl}} = \sqrt{\omega^2(\vec{k}) - \vec{k}^2} \Big|_{\vec{k}=0}$ . In Analogie zur QED wird  $m_{\text{pl}} = m_{\text{el}}/\sqrt{3}$  auch Plasmonenmasse genannt.

Beide Überlegungen weisen darauf hin, daß durch die Wechselwirkung im Plasma die Gluonen Eigenschaften massiver Teilchen annehmen, d.h.,

$$m^2(T) = \frac{1}{\Gamma} g^2(T) T^2, \quad (1.47)$$

wobei  $\Gamma$  eine gewisse Konstante ist. Die effektive Colorladung  $g$  ist eine Funktion der Temperatur und in niedrigster Ordnung durch Gleichung (1.39) mit  $N_c = 3$ ,  $N_f = 0$  gegeben,

$$\frac{g^2(T)}{4\pi} = \frac{4\pi}{11} \ln^{-1} \left[ \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] = \alpha_s(T). \quad (1.48)$$

Die Renormierungstemperatur wird im folgenden mit  $T_c$  bezeichnet, weil  $m(T)$  für  $T \rightarrow T_c$  divergiert und somit auch der Druck von Quasiteilchen mit der Masse  $m(T)$  bei  $T = T_c$  verschwindet. Schließlich sei noch erwähnt, daß eine Gluonen-‘Masse’ formal auch bei perturbativen Entwicklungen erforderlich ist, um Infrarot-Divergenzen behandeln zu können [Kap79].

Die vorangegangene Argumentation macht unsere Einführung einer endlichen 'Masse' der Gluonen für kleine Kopplungen bzw. große Temperaturen plausibel, sagt aber nichts über den Bereich großer Kopplungen aus. Es gibt jedoch eine (heuristische) Überlegung, nach welcher man vermuten kann, daß zumindest der funktionale Zusammenhang  $m \sim g T$  auch bei kleinen Temperaturen Gültigkeit besitzt.

Im Abschnitt 1.1.2 wurde die Zustandsgleichung eines freien massiven Bosonengases für hohe Temperaturen als Entwicklung nach der Größe  $(m/T)^2$  angegeben. Es wurde festgestellt, daß die Reihe einen nicht-analytischen Term der Ordnung  $\mathcal{O}\left(\left(\frac{m^2}{T^2}\right)^{3/2}\right)$  enthält. Auch in der perturbativen Hochtemperatur-Entwicklung (1.37) des Gluondruckes nach Potenzen von  $\alpha_s$  tritt durch Summation von Graphen höherer Ordnungen ein nicht-analytischer Term  $\mathcal{O}\left(\alpha_s^{3/2}\right)$  auf. Diese Analogie zwischen den beiden Hochtemperatur-Entwicklungen ist ein Hinweis darauf, daß ein freies Bosonengas mit der temperaturabhängigen Masse

$$m^2 \sim \alpha_s(T) T^2 \sim g^2(T) T^2$$

das Gluonengas auch über die niedrigste Ordnung und das perturbative Verhalten hinausgehend beschreiben kann.

In der Tat kann die effektive Masse  $m_{\text{eff}}(T_i)$  bereits durch den einfachen Ansatz (1.47), (1.43) recht gut beschrieben werden, wenn wir  $\Gamma = \Gamma_{\text{pl}} = 3$  setzen, d.h., wenn wir die Quasigluonen mit freien Plasmonen der Masse  $m_{\text{pl}}$  identifizieren, vergleiche Abbildung 1.18. Die temperaturabhängige Kopplungskonstante (1.48) divergiert jedoch für  $T \rightarrow T_c$  und damit auch die Masse  $m \sim g T$ , während die effektive Masse bei  $T_c$  selbst endlich bleibt, weil der Gluondruck am Phasenübergangspunkt nicht verschwindet. Durch die Einführung eines Shift-Parameters  $T_s$  erhalten wir eine phänomenologisch 'regularisierte' temperaturabhängige Kopplungsstärke, die oberhalb der Übergangstemperatur für  $T \rightarrow T_c$  nur beschränkt wächst,

$$\frac{g^2(T)}{4\pi} \longrightarrow \frac{g^2(T + T_s)}{4\pi} = \frac{4\pi}{11} \ln^{-1} \left[ \left( \frac{T + T_s}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (1.49)$$

Die funktionale Abhängigkeit der Masse der Quasigluonen von der Temperatur

$$m^2(T) = \frac{1}{\Gamma} g^2(T + T_s) T^2 \quad (1.50)$$

bezeichnen wir im folgenden als *thermische Masse*. Passen wir  $\Gamma$  und  $T_s/T_c$  an die Gitterdaten des Stefan-Boltzmann-skalierten Gluondruckes an, so erhalten wir

$$\Gamma_g = 3.3, \quad T_s^g/T_c = 0.023. \quad (1.51)$$

In der Abbildung 1.18 werden die effektiven Massen der Gluonen und die Quasiteilchenmassen verglichen; als thermische Masse wurde die Plasmonenmasse mit der nicht-regularisierten Kopplungskonstanten bzw. die angepaßte thermische Masse mit den Parametern (1.51) gewählt. Die Abbildung 1.19 zeigt den Druck und die Energiedichte der Gittergluonen im Vergleich zu dem Gas der Quasigluonen mit den gleichen Parametern der thermischen Masse wie in der Abbildung 1.18. Die gute Beschreibung der effektiven Massen bzw. der thermodynamischen Größen durch den einfachen Ansatz (1.50) ist bemerkenswert. Es sei an dieser Stelle noch einmal hervorgehoben, daß wir in unserem

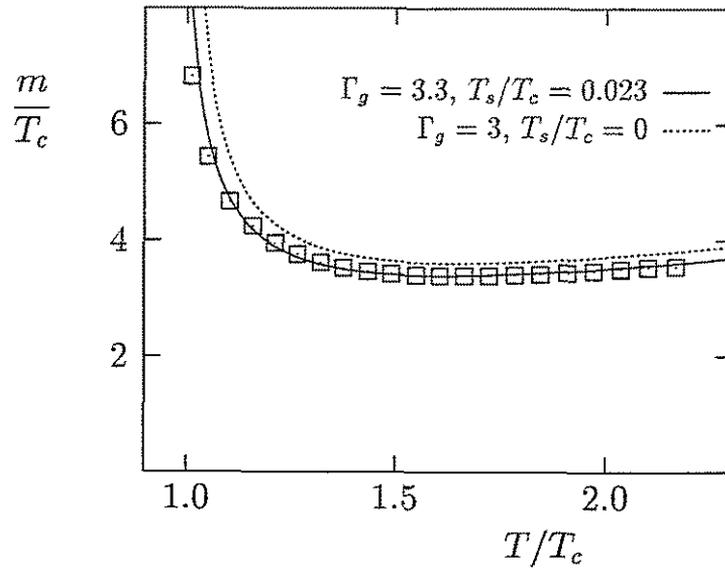


Abbildung 1.18: Die effektiven Massen ( $\square$ ) und ihre Beschreibung durch die thermische Masse Gleichung (1.50). Die thermische Masse mit angepaßten Parametern stimmt in guter Näherung mit der Plasmonenmasse (gepunktete Linie) überein.

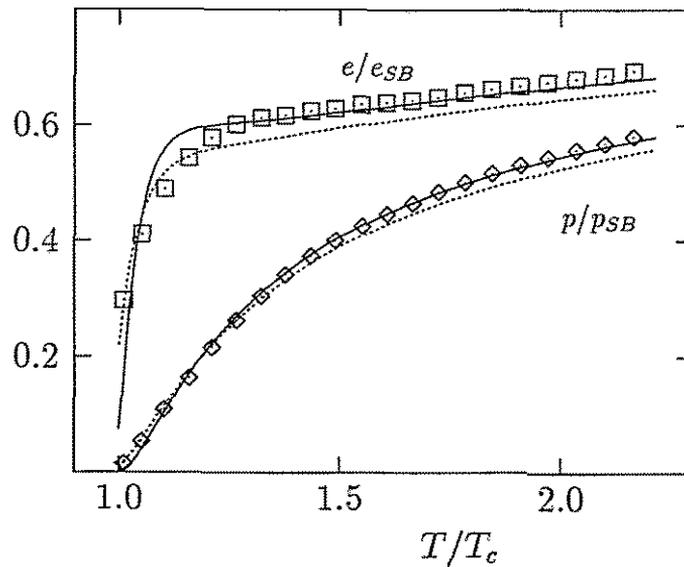


Abbildung 1.19: Das Modell mit thermischen Massen im Vergleich zu den Gitterdaten (Wahl der Parameter wie in Abbildung 1.18).

Modell nur zwei Parameter verwenden, um die Gitterdaten zu beschreiben,  $\Gamma_g$  und  $T_s/T_c$ ; der funktionale Zusammenhang  $m(T)$  ist fest vorgeschrieben.

Ebenso bemerkenswert ist die gute Übereinstimmung des gefundenen Wertes  $\Gamma_g = 3.3$  mit der Voraussage der Störungstheorie erster Ordnung für die Plasmonen,  $\Gamma_{pl} = 3$ .

Ähnlich wie in der Betrachtung im Abschnitt 1.3.2 stellen wir auch hier fest, daß eine Extrapolation von perturbativen Ergebnissen erster Ordnung auch bei tiefen Temperaturen  $T \sim T_c$  das Gluonenplasma recht gut beschreibt, wobei hier der Ansatz von vornherein nicht-perturbativ ist und das perturbative Resultat nur zur Festlegung der Konstante  $\Gamma$  verwendet wird, außerdem ist die Kopplungskonstante 'phänomenologisch regularisiert'.

Die ad hoc vorgenommene Regularisierung der Kopplungskonstanten (1.49) durch den Parameter  $T_s/T_c$  und insbesondere der gefundene Wert (1.51) erhalten im nachhinein durch folgende Überlegung eine Bestätigung: Die thermische Masse bei der Übergangstemperatur  $T_c$  ist groß; das Verhältnis von  $m(T_c)$  zu  $T_c$  läßt sich dann leicht abschätzen zu

$$a_g := \frac{m(T_c)}{T_c} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_g}} \frac{4\pi}{\sqrt{11}} \ln^{-1/2} [(1 + T_s/T_c)^2] \sim \frac{1}{\sqrt{\Gamma_g}} \frac{4\pi}{\sqrt{22}} \left(\frac{T_s}{T_c}\right)^{-1/2} \approx 9.8.$$

Zur Abschätzung des Druckes bei  $T_c$  kann die Näherung (1.20) für 'schwere' Teilchen verwendet werden,

$$p_g(T_c) \approx \frac{g_g}{2\pi^2} \frac{T^4}{\hbar^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_g^{3/2} \exp\{-a_g\}.$$

Wenn wir annehmen, daß die Confinement-Phase des Gluonenplasmas aus schweren, freien Spin-0-Glueballs besteht, so kann in der gleichen Näherung der Druck dieser Phase angegeben werden ( $g_{GB} = 2s + 1 = 1$ ),

$$p_{GB}(T_c) \approx \frac{1}{2\pi^2} \frac{T^4}{\hbar^3} \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_{GB}^{3/2} \exp(-a_{GB}) \quad \text{mit} \quad a_{GB} := \frac{M_{GB}}{T_c}.$$

Die Gibbs'sche Bedingung für das Phasengleichgewicht,  $p_g(T_c) = p_{GB}(T_c)$ , legt das Verhältnis  $a_{GB}$  der Masse der Glueballs zur Übergangstemperatur  $T_c$  fest,

$$a_{GB}^{3/2} \exp(-a_{GB}) = 16 a_g^{3/2} \exp(-a_g) \approx 0.028 \quad \Rightarrow \quad a_{GB} \approx 6.4.$$

Bei einer angenommenen Glueball-Masse von  $M_{GB} = 1$  GeV erhält man für die Übergangstemperatur

$$T_c = M_{GB}/a_{GB} = 157 \text{ MeV}.$$

Der Einfachheit halber wurde hier nur eine Glueball-Sorte betrachtet; berücksichtigt man auch die massiveren Glueballs und berechnet die Drücke numerisch und ohne Näherung, so erhält man ein um 5% kleineres Ergebnis. Der gefundene Wert für  $T_c$  liegt in der Größenordnung anderer Abschätzungen für die QCD-Übergangstemperatur; ein Parameterwert von  $T_s/T_c = 0.05$  hingegen würde  $T_c \sim 430$  MeV liefern, während für zu große  $T_s/T_c$  überhaupt kein Phasenübergang möglich wäre.

## 1.5 Das QGP mit thermischen Massen

Wie Gluonen erhalten Quarks in einem heißen Plasma Eigenschaften massiver Teilchen. Durch Extrapolation des perturbativen Resultates erhalten wir eine Zustandsgleichung des QGP.

Nachdem sich das Konzept der thermischen Masse für reine Eichfelder so gut bewährt hat, soll es nun auch zur Beschreibung des QGP, das sowohl Gluonen als auch Quarks enthält, angewandt werden. Während die Einführung von Quasiteilchen mit einer effektiven Masse im reinen SU(3)-Fall hauptsächlich durch die sehr gute Übereinstimmung des Modells mit thermodynamisch konsistenten Gitterdaten motiviert werden kann, existieren für die 'volle' QCD, d.h., einschließlich der Quarks, nicht genügend Gitterdaten, die als hinreichend verlässlich anerkannt werden. Das liegt einerseits daran, daß Fermionen mit einer endlichen Ruhemasse schwerer auf dem Gitter zu simulieren sind, andererseits verkomplizieren sich auch die bereits im reinen SU(3)-Fall erwähnten Schwierigkeiten der Interpretation der numerischen Ergebnisse. Es gibt jedoch Argumente, die uns motivieren, die Erweiterung des Modells der thermischen Massen auf Quarks trotz der noch offenen numerischen Bestätigung vorzunehmen.

Zum einen ist die starke Wechselwirkung universell, d.h., die Kopplungen zwischen Gluonen und die zwischen Gluonen und Quarks werden durch *dieselbe* Kopplungskonstante  $\alpha_s$  beschrieben, so daß man mit den Quarks 'nur einige neue Ladungen hinzufügt', mit denen die Gluonen wechselwirken. Im Bereich kleiner Kopplungen kann das Hinzufügen von Quarkflavors zu dem reinen Gluonenplasma störungstheoretisch untersucht werden. Bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  ist der Druck der Quarks der eines Gases freier Fermionen mit der Entartung  $g_q = 2 \cdot 2 \cdot N_c \cdot N_f$  (Quark/Antiquark, Spin-, Color- und Flavorentartung), der durch die Wechselwirkung zwischen den  $N_f$  Quarkflavors, vermittelt durch die  $N_g = 8$  Gluonen, etwas reduziert wird. Der Partialdruck von  $N_f$  sehr leichten Quarkflavors in dem QGP lautet bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s)$  [Kap79]

$$p_0^q + p_1^q = \frac{7}{8} g_q \frac{\pi^2 T^4}{90 \hbar^3} - N_g N_f \frac{5 \pi^2 T^4}{36 \hbar^3} \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right) = g_q \frac{\pi^2 T^4}{90 \hbar^3} \left[ \frac{7}{8} - \frac{25}{6} N_f \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right) \right].$$

Der Vergleich mit der Entwicklung (1.17) des Druckes eines freien massiven Fermionengases bei hohen Temperaturen fordert zumindest für den Hochtemperatur-Limes wie im rein gluonischen Fall thermische Quarkmassen

$$\frac{m_q^2(T)}{T^2} \sim \alpha_s(T) \sim g^2(T).$$

Im Falle des Gluonenplasmas wurde weiter argumentiert, daß dieses Resultat für sehr große Temperaturen auch bei starken Kopplungen und relativ kleinen Temperaturen Gültigkeit haben könnte – die Gitterdaten zeigen, daß dies wirklich so ist –, weil ein der nicht-perturbativen Gluonen-Selbstwechselwirkung der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^{3/2})$  entsprechender Term auch in der Hochtemperaturentwicklung des Quasiteilchen-Modells auftritt. In der Hochtemperatur-Entwicklung (1.17) für freie Fermionen fehlt, im Gegensatz zu der Entwicklung für Bosonen, das Glied der Ordnung  $\mathcal{O}\left(\left(\frac{m^2}{T^2}\right)^{3/2}\right)$ ; für Quarks gibt es natürlich keinen Selbstwechselwirkungsterm. Durch die Anwesenheit von Quarks wird lediglich der Gluondruck  $p_{3/2}$  modifiziert, da in dem Selbstenergietensor (siehe Abbildung 1.10) nun

auch das Quarkschleifendiagramm beiträgt. In Verallgemeinerung von (1.37) erhält man bei  $N_f$  sehr leichten Flavours [Kap79]

$$p_{3/2}^g = \frac{(4\pi)^2}{3} N_g T^4 \left( \frac{\alpha_s}{4\pi} \right)^{3/2} 3^{-3/2} \left[ N_c + \frac{N_f}{2} \right]^{3/2} \quad \text{mit } N_g = N_c^2 - 1 \quad (N_c = 3).$$

Dieses Ergebnis läßt sich nicht als eine Summe von einem Gluonen- und einem analytischen Quarkbeitrag interpretieren, sondern ist weiterhin Ausdruck der Selbstwechselwirkung der Gluonen, deren elektrische Masse in der perturbativen Näherung bei Anwesenheit von Quarks in gleicher Weise wie  $p_{3/2}^g(T)$  modifiziert wird, vergleiche (1.45). Wie im Falle des Gluonenplasmas kann man daher hoffen, durch einen Ansatz  $m_q \sim g(T) T$  die Quarkeigenschaften auch bei großen Kopplungsstärken zu modellieren.

Diese heuristischen Überlegungen werden für hohe Temperaturen durch ein analytisches Resultat der Störungstheorie gestützt. In niedrigster Ordnung wird die Dispersionsrelation masseloser Quarks in einem SU(3)-QGP der Temperatur  $T$  durch die implizite Beziehung

$$\begin{aligned} \hbar\omega(\vec{k}) &= |\vec{k}| + \frac{m^2(T)}{|\vec{k}|} \left[ 1 - \frac{\hbar\omega - |\vec{k}|}{2|\vec{k}|} \ln \left( \frac{\hbar\omega + |\vec{k}|}{\hbar\omega - |\vec{k}|} \right) \right] \\ \text{mit } m^2 &= \frac{1}{\Gamma_q} g^2(T) T^2 \quad \text{und } \Gamma_q = 6 \end{aligned} \quad (1.52)$$

bestimmt [Wel]. Aus der Abbildung 1.20, der Darstellung der Dispersionsrelation der Quarks im heißen QGP ( $g \ll 1$ ), erkennt man die Bedeutung des Parameters  $m$  als Ruheenergie,  $m = \hbar\omega(\vec{k} = 0)$ . Durch die ebenfalls dargestellte Relation

$$\hbar\omega(\vec{k}) = \sqrt{m_q^2 + \vec{k}^2}, \quad \text{mit } m_q^2 = \frac{1}{\Gamma_q} g^2(T) T^2 \quad \text{und } \Gamma_q = 6 \quad (1.53)$$

läßt sich die Dispersion der Quarks im Plasma annähernd beschreiben. – Dies entspricht aber gerade der Dispersion von freien Quasiteilchen mit der thermischen Masse  $m_q(T)$ .

Wir beschreiben das QGP nun als ein Gas freier Quasigluonen und Quasiquarks mit thermischen Massen,  $m_{q,g} \sim g(T) T$ . Wie im Falle der Gluonen ‘regularisieren’ wir auch hier die Kopplungskonstante  $g^2(T)/4\pi$ , indem wir die Singularität bei  $T_c$  um  $T_s$  zu kleineren Temperaturen verschieben, und erhalten damit eine bei  $T_c$  endliche Masse der Quasiteilchen und auch einen endlichen Druck. Es ist nicht zwingend, daß  $T_s$  dem für Gluonen gefundenen Wert  $T_s^g$  entspricht; ebensowenig muß  $T_s$  für Quarks und Gluonen gleich sein. Der Einfachheit halber gehen wir hier jedoch von einem Parameter  $T_s$  aus, d.h., wir nehmen eine universelle Kopplung zwischen Gluonen und zwischen Gluonen und Quarks an. Wir bestimmen  $T_s$  so, daß der Übergang vom QGP zu der Confinement-Phase bei der Temperatur  $T_c = 170$  MeV stattfindet, wobei wir als Confinement-Phase wieder ein freies Pionengas annehmen,

$$T_s : p_{\text{QGP}}(T_c; T_s) = p_{\pi}(T_c; m_{\pi}), \quad (1.54)$$

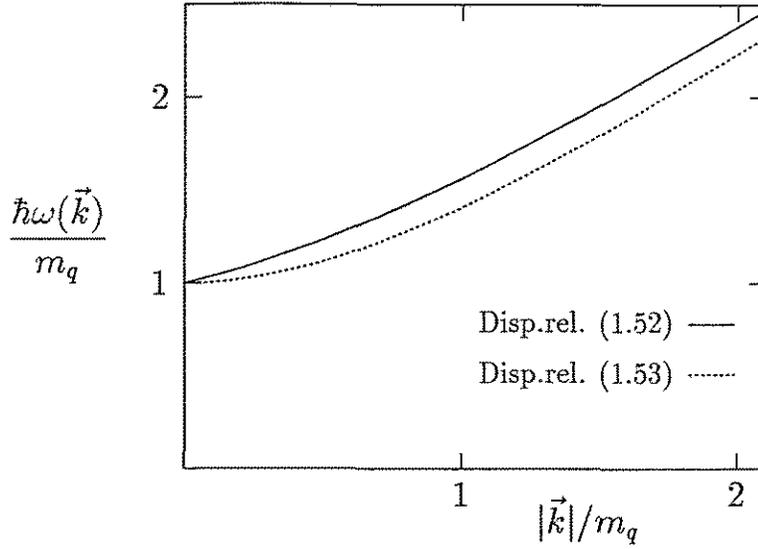


Abbildung 1.20: Die Dispersionsrelation von Quarks im QGP und die von freien massiven 'Quasiquarks'.

die endliche Pionenmasse  $m_\pi = 140$  MeV ist dabei die physikalische Skala. Die Zustandsgleichung für das Quasiteilchen-QGP lautet also

$$\left. \begin{aligned}
 p_{QGP} &= p_g + p_q, \\
 p_{q,g} &= g_{q,g} \frac{1}{6\pi^2} \frac{T^4}{\hbar^3} \int dx \frac{x^4}{A_{q,g}} \left[ \exp \left\{ A_{q,g} - \frac{\mu_{q,g}}{T} \right\} \pm 1 \right]^{-1} \quad (\mu_g = 0), \\
 A_{q,g} &:= \sqrt{x^2 + \frac{m_{q,g}^2(T)}{T^2}}, \\
 m_q^2 &= \frac{1}{\Gamma_q} g^2(T) T^2 \longrightarrow \frac{1}{\Gamma_q} g^2(T + T_s) T^2 \quad \text{mit } \Gamma_q = 6, \\
 m_g^2 &= \frac{1}{3} m_{\text{el}}^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{N_f}{6} \right) g^2(T) T^2 \longrightarrow \frac{1}{\Gamma_g} g^2(T + T_s) T^2, \\
 &\quad \text{mit } \Gamma_g = \frac{9}{4} \quad \text{für } N_f = 2.
 \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

Die  $\Gamma$ -Parameter der Quarks und Gluonen wählen wir entsprechend den Voraussagen der Störungstheorie. Beachtet werden muß, daß die Anzahl  $N_f$  der effektiven Quarkflavors sowohl in die elektrische Masse der Gluonen, siehe Gleichung (1.45), als auch in die laufende Kopplungskonstante eingeht,

$$\frac{g^2(T + T_s)}{4\pi} = \frac{4\pi}{11 - \frac{2}{3}N_f} \ln^{-1} \left[ \left( \frac{T + T_s}{T_c} \right)^2 \right]. \quad (1.56)$$

Die statistischen Entartungsfaktoren sind  $g_g = 2N_g = 16$  und im Quark-Antiquark-symmetrischen ( $\mu_q = 0$ ) Fall  $g_q = 2 \cdot (2s + 1)N_c N_f = 12N_f$ , wobei wir im folgenden stets  $N_f = 2$  setzen werden. Wie beim reinen Gluonenplasma verwenden wir auch hier keine Bag-Konstante und beschreiben den Einfluß wachsender Kopplungsstärke bei  $T \sim T_c$

nur durch die Verringerung der Zahl der effektiven Freiheitsgrade aufgrund der dort stark wachsenden thermischen Masse. Durch die Wahl des Parameters  $T_s/T_c = 0.07357$  wird die Übergangstemperatur auf  $T_c/m_\pi = 1.214$ ,  $T_c = 170$  MeV fixiert. In der Abbildung 1.21 sind die thermischen Quark- und Gluonenmassen dargestellt. Es ist bemerkenswert, daß

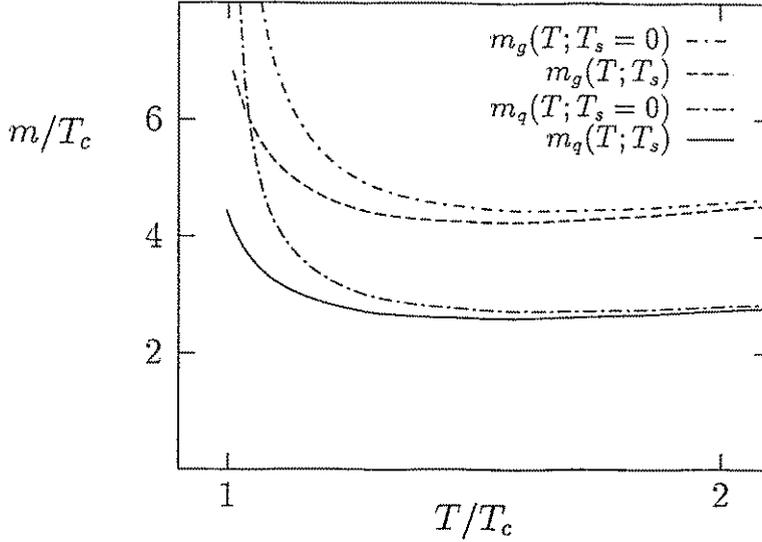


Abbildung 1.21: Aufgrund der ‘regularisierten’ Kopplungskonstante bleiben die thermischen Massen bei  $T = T_c$  endlich. Über einen großen Temperaturbereich sind sowohl die Quarkmassen als auch die Gluonenmassen fast konstant; durch die ‘Regularisierung’ wird dies noch ausgeprägter.

in unserem Modell die thermischen Massen für  $T \gtrsim 1.3 T_c$  fast konstant sind, insbesondere gilt

$$1.3 T_c < T < 2 T_c : m_q = (2.67 \pm 0.08) T_c . \quad (1.57)$$

Mit  $T_c = 170$  MeV ist  $m_q \approx 450$  MeV – dies ist in guter Übereinstimmung mit den Annahmen von anderen phänomenologischen Modellen des QGP, die von endlichen, jedoch konstanten Quarkmassen ausgehen, siehe z.B. [Ka94a].

Die in der Form  $\mathcal{P} := p(T) [\pi^2 T^4 / (90 \hbar^3)]^{-1}$  skalierte Zustandsgleichung (1.55) ist in der Abbildung 1.22 dargestellt.  $\mathcal{P}$  ist ein Maß für die Zahl der effektiven Freiheitsgrade, die zum Druck beitragen,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathcal{P} = g_g + \frac{7}{8} g_q = 2 \cdot N_g + \frac{7}{8} 2 \cdot 2 \cdot N_c \cdot N_f = 37 \quad \text{für } N_f = 2 .$$

Der Beitrag der Gluonen zum Gesamtdruck ist für  $T \sim T_c$  sehr klein; für hohe Temperaturen nähert sich das Verhältnis dem Wert  $16/37$  an. Der zum Vergleich dargestellte Druck in der Voraussage des Bag-Modells erreicht den Limes  $\mathcal{P}_\infty = 37$  viel schneller als der Druck des Quasiteilchen-QGP; die analoge Feststellung für das Gluonenplasma stand im Widerspruch zu den Gitter-Daten.

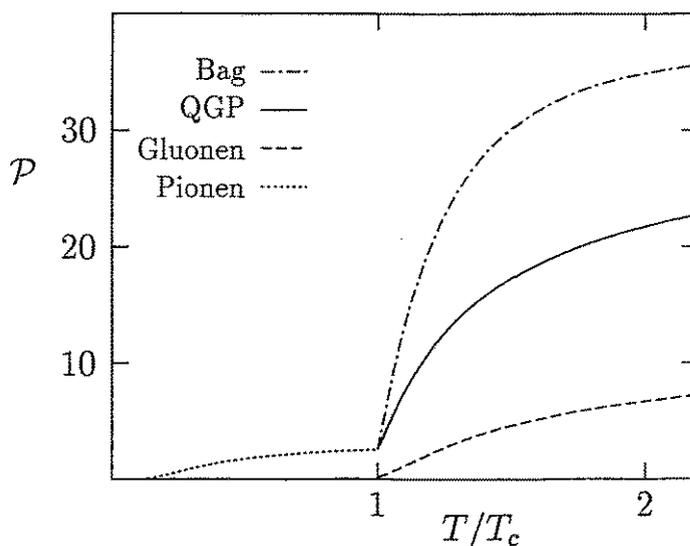


Abbildung 1.22: Der skalierte Druck  $\mathcal{P} := p(T) [\pi^2 T^4 / (90 \hbar^3)]^{-1}$  des Quasiteilchen-QGP im Vergleich zum Bag-Modell. Als Parameter für die thermischen Massen wurden die Hochtemperatur-Werte  $\Gamma_g = 9/4$  und  $\Gamma_q = 6$  gewählt, der Shift-Parameter  $T_s$  wurde so angepaßt, daß die Übergangstemperatur  $T_c = 170$  MeV ist.

Für verschwindendes chemisches Potential der Quarks folgt aus der Gibbs'schen Fundamentalrelation die Energiedichte

$$e_{QGP}(T) = T \frac{\partial p_{QGP}}{\partial T} - p_{QGP}(T). \quad (1.58)$$

Die Energiedichte des QGP mit der Zustandsgleichung (1.55) ist deutlich kleiner als die eines Stefan-Boltzmann-Gases, die des Bag-Modells ist dagegen wie im gluonischen Fall größer, siehe Abbildung 1.23. Insbesondere unterscheiden sich die Voraussagen für die beim Phasenübergang freigesetzte bzw. zuzuführende latente Wärme,

$$\begin{aligned} \Delta e_{\text{Bag}} &= 1.31 e_{SB}(T_c), \\ \Delta e_{QGP} &= 0.57 e_{SB}(T_c). \end{aligned}$$

Neueste Gitterrechnungen deuten darauf hin, daß die Energiedichte des QGP knapp oberhalb der Umwandlungstemperatur  $T_c$  auf höchstens 60% des Stefan-Boltzmann-Wertes steigt. Dies ist in guter Übereinstimmung mit dem Ergebnis, das wir mit unserem Modell erhalten, während die latente Wärme im Bag-Modell zu groß ist. Die skalierte Gesamtenergiedichte  $\mathcal{E}_{QGP} = e_{QGP}(T) [\pi^2 T^4 / (30 \hbar^3)]^{-1}$  ist für Temperaturen etwas oberhalb von  $T_c$  nur schwach temperaturabhängig,  $\mathcal{E} \sim 25 \dots 26$ ; dies entspricht etwa 70% des Stefan-Boltzmann-Wertes für freie Quarks und Gluonen. Die (zur Zeit noch recht unsicheren) Voraussagen der Gittertheorie für zwei leichte Quarkflavors [Got] sind  $e/e_{SB} \sim 0.8$  für Werte der QCD- $\beta$ -Funktion leicht oberhalb des kritischen Wertes  $\beta_c = \beta(T_c)$ . Der Einfluß der  $\Gamma$ -Parameter in dem Modell (1.55) wird durch den Vergleich mit zwei anderen

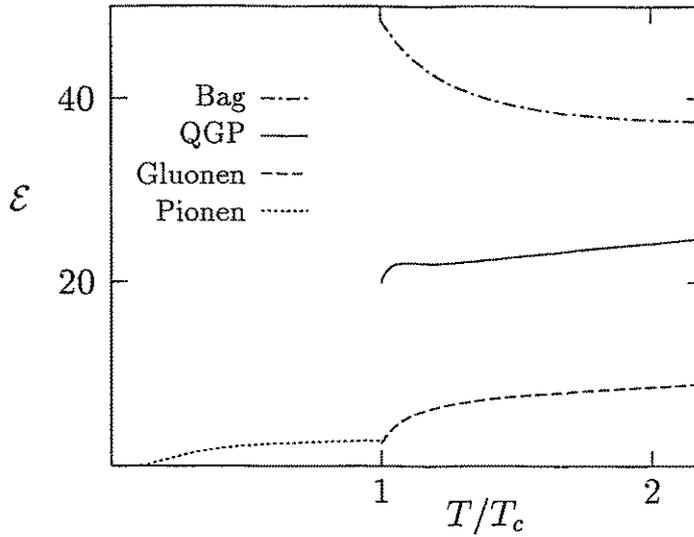


Abbildung 1.23: Die skalierte Energiedichte  $\mathcal{E} := e(T) [\pi^2 T^4 / (30 \hbar^3)]^{-1}$  der Pionen und des Quasiteilchen-QGP im Vergleich mit dem Bag-Modell (Parameter wie in Abbildung 1.22).

Parametersätzen deutlich; eine willkürliche Wahl ist

$$\begin{aligned} \Gamma_q = 5, \quad \Gamma_g = 9/5 & \quad (i), \\ \Gamma_q = 7, \quad \Gamma_g = 9/3 & \quad (ii). \end{aligned} \tag{1.59}$$

Größere  $\Gamma$ -Werte bedeuten kleinere thermische Massen, was wiederum größere Drücke und Energiedichten zur Folge hat. Die Abbildung 1.24 zeigt den Druck und die Energiedichte des QGP mit den Parametersätzen (i), (ii) im Vergleich mit den Parametern im perturbativen Limes aus Gleichung (1.55). Bei  $\Gamma$ -Werten nach dem Parametersatz (ii) ergibt sich nahe  $T_c$  ein lokales Maximum der skalierten Energie, welches durch die in diesem Fall relativ kleine thermische Masse der Quarks entsteht. In der Abbildung 1.25 sind die Beiträge der Quarks und Gluonen zu der Gesamtenergiedichte des QGP dargestellt.

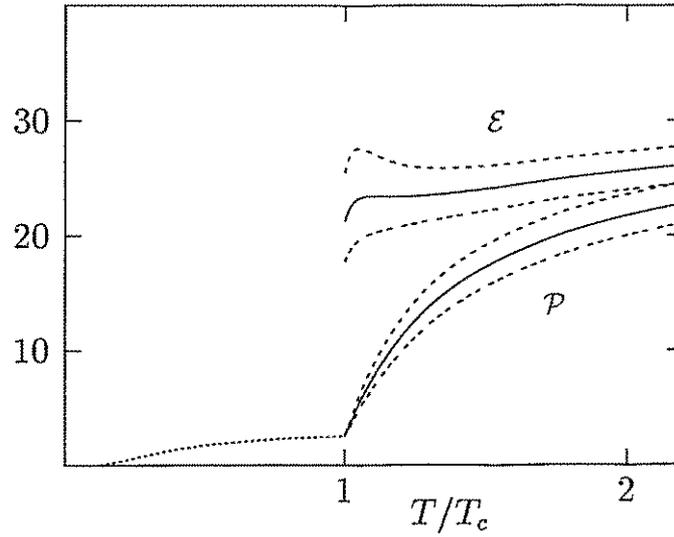


Abbildung 1.24: Der Einfluß der  $\Gamma$ -Parameter der thermischen Masse auf Druck und Energiedichte des QGP. Obere Kurven: Parametersatz (ii) aus Gleichung (1.59), untere Kurven: Parametersatz (i), mittlere Kurven: Parameter wie in den Abbildungen 1.22, 1.23.

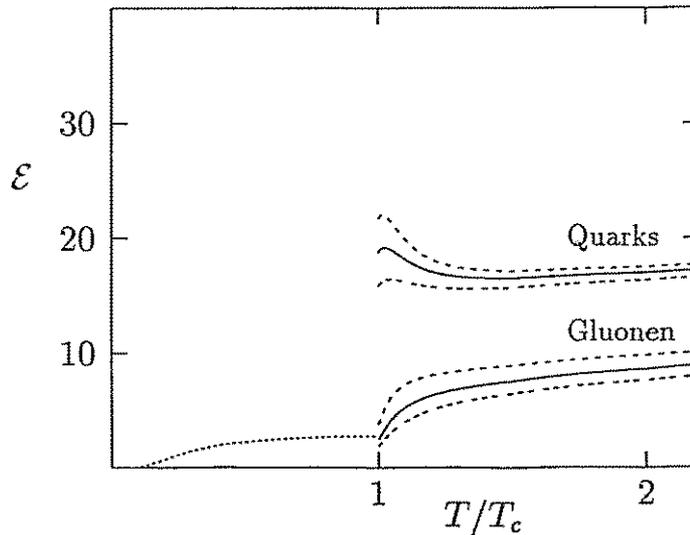


Abbildung 1.25: Die Beiträge der Quarks und Gluonen zu der Gesamtenergiedichte des QGP bei verschiedener Wahl der  $\Gamma$ -Parameter. Parametersätze wie in der Abbildung 1.24.

Kurz vor Fertigstellung dieser Arbeit wurden neue Resultate von Gitterrechnungen mit zwei leichten Quarks veröffentlicht [Blu]. Ohne daß diese Eingang in die vorliegende Arbeit finden konnten, zeigt unser Modell mit thermischen Quarkmassen eine gute Übereinstimmung mit diesen numerischen Daten für den Druck und die Energiedichte der Quarks.

## 2. Ein dynamisches Modell für Schwerionenstöße

### 2.1 Die Bjorken–Gleichung

Die eindimensionale relativistische Hydrodynamik einer idealen Flüssigkeit ist durch die Forderung lokaler Energie-Impuls-Erhaltung und durch die Zustandsgleichung vollständig bestimmt und stellt ein einfaches Modell zur Beschreibung der Evolution der zentralen Region in Schwerionenstößen dar.

Auf der Suche nach dem QGP werden heute in großen Beschleunigeranlagen schwere Atomkerne mit Energien von  $E > 10$  GeV pro Nukleon aufeinandergeschossen. Man hat dabei die Hoffnung, daß sich beim Zusammenprall zweier ultrarelativistischer Schwerionen die für die Bildung des QGP notwendigen großen Teilchendichten und/oder hohen Temperaturen einstellen. Nach der Diskussion in Kapitel 1 könnte dann die Phasengrenze zwischen hadronischer Materie und dem Plasmazustand überschritten werden und die Nukleonen würden in Quarks und Gluonen dissoziieren.

Mit der zur Verfügung stehenden Computertechnik ist man in der Lage, Schwerionenstöße im Rahmen komplexer Modelle wie dem Partonen-Kaskaden-Modell, siehe z.B. [Gei], zu behandeln. Die Ergebnisse dieser zum Teil numerisch sehr aufwendigen Rechnungen deuten unabhängig von den verwendeten Modellen darauf hin, daß zentrale Schwerionenstöße (nur solche sollen hier betrachtet werden) nach folgendem Szenarium ablaufen: Die Lorentz-kontrahierten Kerne prallen aufeinander, durchdringen einander<sup>1</sup> und bilden einen dichten heißen ‘Feuerball’ (Nichtgleichgewichtszustand), der thermalisiert und in vorrangig longitudinaler Richtung expandiert, vergleiche Abbildung 2.1. Die Phase der thermischen Äquilibration des QGP ist mit einer charakteristischen Dauer in der Größenordnung von 1 fm/c relativ kurz<sup>2</sup>, wobei die Gluonen etwas schneller als die Quarks thermalisieren [Gei]. Wir gehen hier davon aus, daß sich die Entwicklung nach dem Feuerball-Stadium, d.h., die longitudinale Expansion des QGP, nahe dem lokalen thermodynamischen Gleichgewicht vollzieht. Diese Annahme geht als wesentliche Voraussetzung in die Bjorken–Gleichung (siehe unten) ein, die die Evolution der zentralen Region

---

<sup>1</sup>Im Gegensatz dazu werden bei mittlereenergetischen Schwerionenstößen die Kerne im Schwerpunktsystem weitgehend gestoppt. Der Grad des Abstoppens in ultrarelativistischen Stößen wird heute intensiv diskutiert. Um die Konsequenzen des oben beschriebenen Modells zu studieren, gehen wir hier von einer relativ großen Transparenz aus.

<sup>2</sup>Die Gleichungen der klassischen Chromodynamik sind chaotisch und Gebiete des Phasenraumes werden schnell durchmischt [Mül]. Die kurze Einstellzeit für das Gleichgewicht ist wesentlich für die Anwendbarkeit der *Gleichgewichts*-Thermodynamik (vergleiche auch Seite 64).

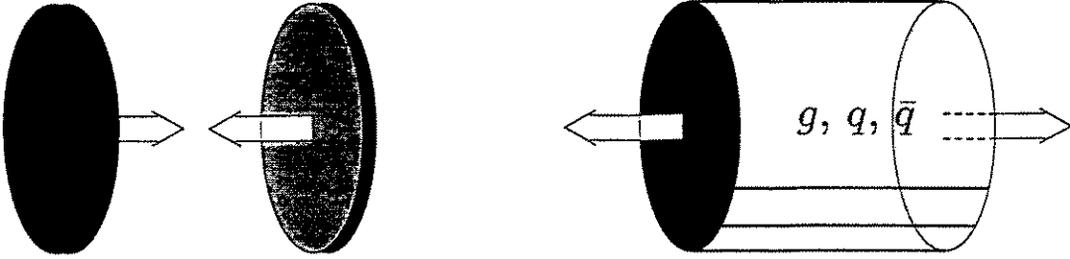


Abbildung 2.1: Die Lorentz-verkürzten Schwerionen kommen nach dem Zusammentreffen durch starke Wechselwirkung schnell ins thermodynamische Gleichgewicht und formen durch vorzugsweise longitudinale Expansion einen Plasma-Schlauch.

in Schwerionenstößen durch einen einfachen analytischen Zusammenhang beschreibt.

Man kann durch eine einfache Überlegung abschätzen, daß durch einen Stoß, der nach dem beschriebenen Mechanismus abläuft, Temperaturen erzeugt werden könnten, bei denen Hadronen in den Plasmazustand übergehen. Die typische Energie bei dem Stoß zweier Ionen mit der Massezahl  $A_N$  ist  $E = \gamma m_N A_N$ ,  $\gamma$  ist der Lorentz-Faktor; die Nukleonenmasse ist  $m_N \sim 1 \text{ GeV}$ . Der Kernradius hat die Größenordnung  $r \sim A_N^{1/3} r_0$ , wobei der Nukleonenradius  $r_0 \sim 1 \text{ fm}$  ist. Nach der Äquilibrationszeit  $\tau_0 \sim 1 \text{ fm}/c$  nimmt der expandierende Plasma-Schlauch ein Volumen  $V \sim \pi r^2 c \tau_0$  ein; die typische Energiedichte beträgt

$$\frac{E}{V} \sim \frac{\gamma m_N A_N}{\tau_0 \pi A_N^{2/3} r_N^2} \sim \frac{1}{\pi} 10^3 \text{ MeV fm}^{-3} \gamma A_N^{1/3}.$$

Diese Dichte, aufgeteilt auf die 37 Freiheitsgrade eines freien ( $N_f = 2$ )-QGP,

$$e(T) = 37 \frac{\pi^2}{30} \frac{T^4}{\hbar^3} \sim \frac{E}{V},$$

ergibt für die Äquilibrierungstemperatur dieses QGP

$$T_0 \sim \left[ \frac{30 \hbar^3}{37 \pi^2} \frac{E}{V} \right]^{1/4} \sim \gamma^{1/4} A_N^{1/12} \cdot 100 \text{ MeV}.$$

An dieser einfachen Abschätzung erkennt man einerseits, vor welchen prinzipiellen Erfordernissen die experimentelle Hochenergie-Physik steht: die Erzeugung des QGP ist nämlich am wahrscheinlichsten in ultrarelativistischen Schwerionen-Beschleunigern. Andererseits wird deutlich, daß selbst eine Verdopplung der experimentellen Möglichkeiten die Erfolgsaussichten nur gering erhöht. Allerdings darf man zuversichtlich sein, daß mit

den in Brookhaven und am CERN existierenden Anlagen die QGP-Erzeugung möglich sein sollte, oder daß man sich zumindest nahe der Schwelle befindet und diese mit den geplanten Anlagen RHIC und LHC ( $\gamma$ -Faktoren  $\gtrsim 100$ ,  $A_N \sim 200 \triangleq T_0 \sim 500$  MeV) erreichen kann.

Nimmt man das QGP zunächst in einfachster Näherung als ideale Flüssigkeit an, d.h., ohne Dissipation, so wird die zeitliche Evolution bei vorgegebener Art der Ausdehnung schon durch die Forderung der Energie-Impuls-Erhaltung beschrieben. Lokale Energie-Impuls-Erhaltung bedeutet Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors. In der einfachen Beschreibungsweise, die man mit der Annahme des QGP als ideale Flüssigkeit wählt, läßt sich der Energie-Impuls-Tensor angeben als

$$T^{\mu\nu}(x^\alpha, T) = (e + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Hier sind  $e$  die Energiedichte,  $p$  der Druck,  $u^\mu$  die 4-Geschwindigkeit der Flüssigkeit und  $g^{\mu\nu}$  der metrische Tensor. Alle Größen werden im allgemeinen noch vom 4-Vektor  $x^\alpha$  abhängen.  $p$  und  $e$  sind temperaturabhängige Größen. Somit bestimmen sowohl die Kinematik als auch die thermodynamischen Eigenschaften die Energie-Impuls-Dichte des Mediums. Für eindimensionale Probleme sind auch umgekehrt bei gegebener Kinematik durch die Energie-Impuls-Erhaltung der Druck und die Energiedichte und daher auch die Temperatur festgelegt.

Die allgemeinen Evolutionsgleichungen der eindimensionalen Hydrodynamik einer idealen Flüssigkeit werden im Anhang A.2 abgeleitet; aus diesen erhält man dann die Bjorken-Gleichung durch einige spezielle Annahmen. Während die Bjorken-Gleichung eine longitudinale Expansion beschreibt, betrachte ich hier vorerst den Fall kugelsymmetrischer Ausdehnung. (Die sich ergebende Gleichung steht in einer gewissen Beziehung zu den Friedman-Gleichungen der Kosmologie.) Die Bjorken-Gleichung erhält man aus dieser Betrachtung in einfacher Weise und gleichzeitig wird klarwerden, wie die Vorgabe der Art der Expansion in das Ergebnis eingeht. Als angepaßte Koordinaten wählt man Kugelkoordinaten. In diesen nichtkartesischen Koordinaten muß statt partiell kovariant differenziert werden. Für den kontravarianten Tensor zweiter Stufe  $T^{\mu\nu}$  ist die Divergenz (Kontraktion über  $\nu$ ), welche verschwinden soll,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} := \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\mu T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{\mu\alpha} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.2)$$

Die letzten beiden Terme berücksichtigen die nichtkartesischen Koordinaten.

Als erstes sind die Christoffelschen  $\Gamma$ -Symbole für Kugelkoordinaten zu bestimmen. Dazu und ebenso für den Energie-Impuls-Tensor benötigt man explizit den metrischen Tensor in Kugelkoordinaten  $x^i := (r, \theta, \phi)$ , den man unmittelbar aus dem Ausdruck für das invariante Wegelement  $d^2s := g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = d^2t - (d^2r + r^2 d^2\theta + r^2 \sin^2 \theta d^2\phi)$  ablesen kann,

$$g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1} = \text{diag} [1, -1, -r^{-2}, -(r \sin \theta)^{-2}].$$

Die Christoffel-Symbole  $\Gamma$  können direkt aus  $g^{\mu\nu}$  oder aus der Geodätengleichung bestimmt werden; da deren Berechnung elementar, aber für die Ableitung der Gleichung

nicht wesentlich ist, gebe ich sie ohne Beweis an (siehe z.B. [LL2]):

$$\begin{aligned}\Gamma_{22}^1 &= -r, & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = 1/r, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin(\theta/2), \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta.\end{aligned}$$

Erinnert sei an die Symmetrie der unteren Indizes; alle nicht aufgeführten Elemente sind Null.

Man spezifiziert nun die Art der Expansion, indem man für die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  des Volumenelements bei  $x^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$  nur eine radiale Komponente annimmt (Kugelsymmetrie). Unter der zusätzlichen Annahme, daß sich die Volumenelemente vom Zentrum  $r = 0$  aus mit gleichförmigen Geschwindigkeiten  $v(t, \vec{r}) = |\vec{r}|/t$  bewegen (Scaling-Ansatz), erhält man für die 4-Geschwindigkeit

$$\vec{v}(x^\alpha) = (v, 0, 0) \quad \text{mit} \quad v = r/t, \quad u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1, v, 0, 0). \quad (2.3)$$

Aus Gründen der Zweckmäßigkeit führt man jetzt neue Koordinaten ein,

$$\begin{aligned}\tau &:= \sqrt{t^2 - r^2}, \\ \eta &:= \operatorname{atanh}(r/t); \end{aligned}$$

$\tau$  und  $\eta$  heißen Eigenzeit und Rapidity. Bis auf die indefinite 'pseudo-Euklidische' Metrik erkennt man die gewöhnlichen Polarkoordinaten wieder; in der umgekehrten Darstellung treten statt der Kreis- die Hyperbelfunktionen auf,

$$\begin{aligned}t &= \tau \cosh \eta, \\ r &= \tau \sinh \eta.\end{aligned}$$

Formal ließe sich der Übergang zu Polarkoordinaten durch die Ersetzung  $r \rightarrow ir$ ,  $\eta \rightarrow i\eta$  vollziehen. Die Geschwindigkeit  $v(t, r) = r/t$  ist in den neuen Koordinaten nur eine Funktion von  $\eta$ ,

$$v(\tau, \eta) = \tanh \eta = v(\eta).$$

Unter der gemachten Annahme der Kugelsymmetrie treten bei der Divergenzbildung in Gleichung (2.2) nur Ableitungen  $\partial_t$  und  $\partial_r$  auf. Diese werden jetzt durch die neuen Koordinaten ausgedrückt,

$$\begin{aligned}\partial_t &= \frac{\partial_\tau}{\partial_t} \partial_\tau + \frac{\partial_\eta}{\partial_t} \partial_\eta = \cosh \eta \partial_\tau - \frac{\sinh \eta}{\tau} \partial_\eta, \\ \partial_r &= \frac{\partial_\tau}{\partial_r} \partial_\tau + \frac{\partial_\eta}{\partial_r} \partial_\eta = -\sinh \eta \partial_\tau + \frac{\cosh \eta}{\tau} \partial_\eta.\end{aligned}$$

Man nimmt nun weiterhin noch an, daß die Evolution des Druckes und der Energiedichte nur von der Eigenzeit  $\tau$ , nicht aber von  $\eta$  abhängt,

$$p = p(T(\tau)), \quad e = e(T(\tau)); \quad (2.4)$$

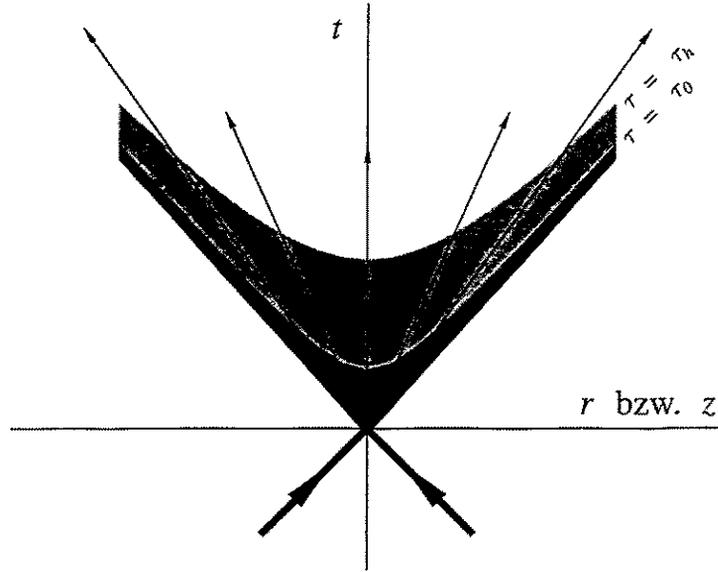


Abbildung 2.2: Die Forderung der Boost-Invarianz bedeutet, daß die Hyperboloide konstanter Eigenzeit auch Flächen konstanten Druckes und konstanter Energiedichte sind. Bei der Kollision zweier Kerne nimmt man an, daß der entstehende Plasma-Schlauch nach einer Eigenzeit  $\tau_0$  ins thermische Gleichgewicht bei der Temperatur  $T_0$  gelangt und durch lineare Expansion abkühlt, bis nach der Zeit  $\tau_h$  die Übergangstemperatur  $T_c$  erreicht ist und das QGP hadronisiert.

mit anderen Worten: Man setzt die Evolution als ‘boost-invariant’ voraus<sup>3</sup>,  $\partial_\eta p, \partial_\eta e \rightarrow 0$ , vergleiche Abbildung 2.2. Man betrachtet nun die Zeitkomponente der Energie-Impuls-Bilanz (2.2). Mit dem Ausdruck für die Impulsstromdichte  $T^{0\nu}$  in den neuen Koordinaten,

$$\begin{aligned} T^{0\nu} &= \frac{1}{1-v^2} (pv^2 + e, v(p+e), 0, 0) \\ &= (e + \sinh^2 \eta (p+e), \sinh \eta \cosh \eta (p+e), 0, 0), \end{aligned}$$

kann man den ersten Summanden der ( $\mu = 0$ )-Gleichung in (2.2) schreiben als

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} &= \cosh \eta [\dot{e} + \sinh^2 \eta (\dot{p} + \dot{e})] - \frac{\sinh \eta}{\tau} [2 \sinh \eta \cosh \eta (p+e)] \\ &\quad - \sinh \eta [\sinh \eta \cosh \eta (\dot{p} + \dot{e})] + \frac{\cosh \eta}{\tau} [(\sinh^2 \eta + \cosh^2 \eta) (p+e)] \\ &= \cosh \eta \left[ \dot{e} + \frac{p+e}{\tau} \right], \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei der Punkt die Ableitung nach der Eigenzeit  $\tau$  kennzeichnet. Der zweite Summand in (2.2) verschwindet, weil  $\Gamma_{\mu\nu}^0 = 0$  für alle  $\mu, \nu$  ist. Es bleibt nun nur noch der dritte

<sup>3</sup>Diese Bezeichnung wird später klarwerden, siehe Abschnitt 3.3.

Summand. Weil  $T^{0i}$  nur für  $i = 0, 1$  von Null verschieden ist und auch  $\Gamma_{0\nu}^\nu$  verschwindet, lautet dieser

$$\Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{0\alpha} = \Gamma_{1\nu}^\nu T^{01} = \frac{2}{r} \sinh \eta \cosh \eta (p + e) = \frac{2 \cosh \eta}{\tau} (p + e). \quad (2.6)$$

Mit den Gleichungen (2.5) und (2.6) kann man den gesamten Ausdruck für die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors aufschreiben,

$$T^{0\nu}{}_{;\nu} = \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^0 T^{\alpha\nu} + \Gamma_{\alpha\nu}^\nu T^{0\alpha} = \cosh \eta \left[ \dot{e} + \frac{p+e}{\tau} \right] + 0 + \frac{2 \cosh \eta}{\tau} (p + e).$$

Die Forderung (2.2) der Energie-Impuls-Erhaltung läßt sich damit formulieren als

$$\dot{e}(\tau) = -3 \frac{p(e) + e}{\tau}. \quad (2.7)$$

Das ist die gesuchte Evolutionsgleichung für die Energiedichte: Ist die Zustandsgleichung  $p(T)$  des Gases bekannt, so kennt man auch die Energiedichte  $e(T) = T \partial p / \partial T - p(T)$ , und mit der abgeleiteten Differentialgleichung ist das Kühlungsverhalten  $T(\tau)$  des Systems in impliziter Form bestimmt,  $e(\tau) = e(T(\tau))$ . Konsequenterweise müssen in (2.2) auch die anderen Komponenten betrachtet werden, diese liefern jedoch entweder ein triviales oder das gleiche Ergebnis (2.7). Das bedeutet aber, daß die Lösungsmannigfaltigkeit einschränkende Annahme (2.4) der Boost-Invarianz nicht widersprüchlich ist<sup>4</sup>.

Wie läßt sich aus der gezeigten Ableitung die Bjorken-Gleichung für die rein longitudinale Expansion in  $z$ -Richtung ablesen? Nun, wir müssen einfach ersetzen  $r \rightarrow z$ . Die Expansion in  $z$ -Richtung wird man natürlich nicht in Kugel-, sondern in kartesischen Koordinaten beschreiben. Dann verschwinden sämtliche Christoffel-Symbole und bei der Divergenzbildung (2.2) bleibt nur der erste Summand (2.5) übrig, der ohne Änderung übernommen werden darf. Die Bjorken-Gleichung lautet also

$$\dot{e}(\tau) = - \frac{p(e) + e}{\tau}. \quad (2.8)$$

Der einzige Unterschied zu Gleichung (2.7) ist der Vorfaktor auf der rechten Seite, der folglich etwas mit der Anzahl der Dimensionen, in welche die Expansion erfolgt, zu tun haben muß. Da man durch eine Transformation der Eigenzeit

$$\tau \longrightarrow \tau' = \tau_0' \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^3 \quad \text{wegen} \quad \frac{d}{d\tau} e(\tau'(\tau)) = \frac{d\tau'}{d\tau} \frac{de(\tau')}{d\tau'} = \frac{3\tau'}{\tau} \frac{de(\tau')}{d\tau'}$$

die Gleichung (2.7) in (2.8) überführen kann (d.h., bei der linearen Ausdehnung kühlt das System langsamer ab als bei einer kugelsymmetrischen Expansion), braucht man nur die eigentliche Bjorken-Gleichung (2.8) zu diskutieren. Es ist natürlich von vornherein

<sup>4</sup>Ohne den Scaling-Ansatz  $v(\tau, \eta) = \eta$  und die Annahme der Boost-Invarianz erhält man ein System von zwei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen, die  $v(\eta, \tau)$ ,  $p(\eta, \tau)$  bestimmen, siehe Anhang A.2. Die Tatsache, daß unter den Annahmen (2.3), (2.4) widerspruchsfrei die Gleichung (2.7) folgt, bedeutet daher: Lösungen, die der Forderung  $v(\tau, \eta) = \eta$  und der speziellen Anfangsbedingung

$$p(\eta, \tau_0) = p_0 = \text{const}$$

genügen, sind auch für spätere Zeiten  $\tau > \tau_0$  nicht von  $\eta$  abhängig.

klar, daß im Falle der kugelsymmetrischen Ausdehnung die Energiedichte schneller abnimmt als bei der linearen Expansion, da die erhaltene Gesamtenergie auf ein größeres Volumen verteilt wird. Allgemein läßt sich daher feststellen: Gibt es außer der longitudinalen noch weitere Richtungen der Expansion, so wird das System schneller, als durch die Gleichung (2.8) beschrieben, abkühlen. Diese Aussage ist wichtig für die Bewertung des Gültigkeitsbereiches der Gleichung (2.8). Während nämlich die Annahme einer linearen Ausdehnung in den ersten Stadien der Expansion recht brauchbar ist, macht sich zu größeren Zeiten auch eine transversale Ausdehnung zunehmend bemerkbar, wie die Ergebnisse numerischer Simulationen zeigen. Es wird sich allerdings weiter unten herausstellen, daß die späten Etappen der Expansion nur in geringem Maße in die uns hier interessierenden beobachtbaren Größen eingehen, so daß wir mit (2.8) eine einfache und brauchbare Gleichung zur Beschreibung der Evolution der zentralen Region in Schwerionenstößen zur Hand haben.

Die Gleichung (2.8) läßt sich durch eine kleine Umformung in eine neue Gestalt bringen. Da gilt

$$\begin{aligned} s(T) &= \frac{\partial p(T)}{\partial T}, \\ e(T) &= s(T)T - p(T), \end{aligned}$$

kann man für die Zeitableitung  $\dot{e}$  der Energiedichte schreiben

$$\dot{e} = (\dot{s}T) - \dot{p}(T(\tau)) = \dot{s}T + s\dot{T} - \frac{\partial p}{\partial T} \dot{T} = \dot{s}T.$$

Damit kann die Gleichung (2.8) als Differentialgleichung für  $s(T(\tau))$  formuliert werden,

$$\dot{s} = -\frac{s}{\tau},$$

deren Lösung mit den Anfangsbedingungen  $s(\tau_0) = s_0$

$$s(\tau) = s_0 \frac{\tau_0}{\tau} \tag{2.9}$$

ist. In dieser Gleichung kommt die angenommene Entropieerhaltung in einfacher Weise zum Ausdruck; die Integration der Entropiedichte über das zur Zeit  $t$  eingenommene Volumen  $\int dx dy 2t$  des Plasma-Schlauches ergibt die Gesamtentropie

$$S(t) = \int dx dy \int_{-t}^t dz \frac{s_0 \tau_0}{\sqrt{t^2 - z^2}} \sim \int_{-t}^t dz \frac{1}{\sqrt{t^2 - z^2}} = \int_{-1}^1 du \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}},$$

welche offensichtlich zeitunabhängig ist. Einfacher noch sieht man die Entropieerhaltung im mitbewegten Volumen  $d^4x \sim dt dz = \pi r d\tau d\eta$ ; die Transformation des Minkowski-Volumens  $dt dz$  in die 'Pseudo-Euklidischen' Polarkoordinaten ist analog dem Übergang von kartesischen zu Polarkoordinaten und wird später bewiesen.

Eine wesentliche Eigenschaft der Gleichung (2.8) ist ihre Invarianz gegen eine Skalierung der Zeit,

$$\tau \longrightarrow \alpha \tau.$$

Dies ist völlig klar, denn in unseren Voraussetzungen ging keine charakteristische Zeit ein (außer  $\tau = 0$ ; die Gleichung (2.8) ist nicht invariant gegen  $\tau \rightarrow \tau + \tau'$ ), welche die Zeitskala oder auch die Anfangsbedingung festlegen könnte. An dieser Stelle müssen deshalb weitere Überlegungen einfließen: Eine charakteristische Skala stellt die oben bereits erwähnte Äquilibrationszeit  $\tau_0$  dar, in der sich das thermische Gleichgewicht einstellt und man überhaupt erst von Temperatur und Entropiedichte im Sinne lokal definierter Größen sprechen kann. Im Abschnitt 3.1 wird abgeschätzt, daß  $\tau_0$  in der Größenordnung der 'nuklearen' Zeitskala  $1 \text{ fm}/c$  liegen muß; im folgenden wird immer  $\tau_0 = 1 \text{ fm}/c$  angenommen.

### Bag-Modell Kühlung

Für ein System, dessen Zustandsgleichung durch das Bag-Modell beschrieben wird, d.h.,

$$\begin{aligned} p(T) &= AT^4 - B \\ s(T) &= \partial p / \partial T = 4AT^3 \\ e(T) &= sT - p = 3AT^4 + B, \end{aligned}$$

läßt sich der Temperaturverlauf sehr einfach angeben. Wie schon im Abschnitt 1.2.2 diskutiert, liefert das Bag-Modell den gleichen Ausdruck für die Entropiedichte wie ein Stefan-Boltzmann-Gas, weil in diesem Modell der Unterschied zwischen dem perturbativen und dem realen Vakuum nicht zur Entropie beiträgt. Unabhängig von der Bag-Konstanten  $B$  und von der Konstanten  $A$ , d.h., von der Zahl der effektiven Freiheitsgrade, erhält man daher für diesen einfachen Fall aus Gleichung (2.9) sofort

$$T(\tau) = T_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-1/3}. \quad (2.10)$$

## 2.2 Die Dynamik des Phasenüberganges

Der Übergang vom Bag-QGP mit u- und d-Quarks zu einem Pionengas ist das einfachste Modell für den QGP-Phasenübergang. Bei der Umwandlung der Phasen sind drei Etappen zu unterscheiden.

Die Bjorken-Gleichung soll nun auf das einfache Modell angewandt werden, mit dem in Abschnitt 1.2.3 der hadronische Phasenübergang qualitativ diskutiert wurde. Die QGP-Phase wurde dort als ein Stefan-Boltzmann-Gas freier Gluonen und freier masseloser Quarks angenommen; die effektive Entartung des Plasmas mit  $N_f = 2$  relevanten Quarkfavors war  $g_{qg} = 37$ . Die Eigenschaft des Confinement wurde durch die Einführung der Bag-Konstanten  $B$  modelliert. Die hadronische Phase war als masseloses freies Pionengas mit der Entartung  $g_\pi = 3$  betrachtet worden. Die Gibbs'sche Bedingung  $p_{qg}(T_c) = p_\pi(T_c)$  für das Phasengleichgewicht ergab eine Beziehung zwischen der Bag-Konstanten und der Übergangstemperatur  $T_c$ . Die beim Phasenübergang auftretende latente Wärme  $\Delta e$  zeigt einen Phasenübergang erster Ordnung an.

Im folgenden wird die Dynamik dieses Phasenüberganges im Bjorken-Bild beschrieben. Wir gehen zunächst von einem Gleichgewichts-Phasenübergang aus, d.h., die Skala der Relaxationszeiten soll klein gegen die dynamischen Zeitskalen sein und das System sich

während des Überganges stets nahe dem lokalen Gleichgewicht befinden. Wenn die Anfangstemperatur  $T_0$  so groß ist, daß die QGP-Phase vorliegt, muß man bei der Abkühlung drei Abschnitte unterscheiden, siehe Abbildung 2.3. In der ersten Phase kühlt das QGP

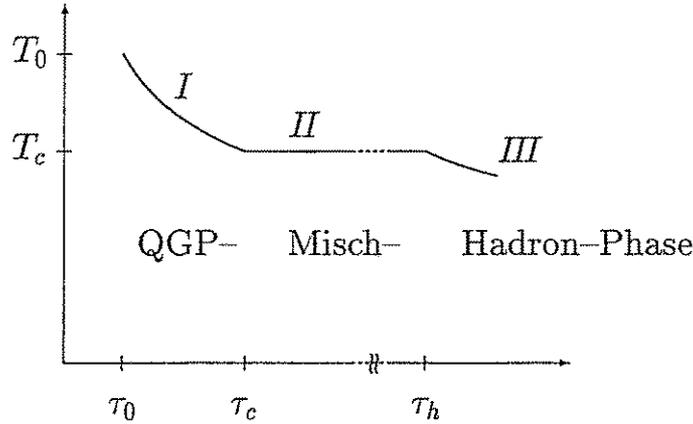


Abbildung 2.3: In der ersten Etappe kühlt das QGP nach dem  $\tau^{-1/3}$ -Gesetz bis auf die Übergangstemperatur  $T_c$  ab. In der darauf folgenden Phase II beginnt die Umwandlung des Plasmas in hadronische Materie; während dieses Abschnittes ist die Temperatur durch die Freisetzung der latenten Wärme konstant,  $T(\tau) = T_c$ . Wenn die gesamte Materie hadronisiert ist, beginnt in der dritten Etappe wieder die  $\tau^{-1/3}$ -Kühlung.

nach dem Gesetz (2.10) ab,

$$T(\tau) = T_0 \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^{-1/3} \quad \text{für } \tau_0 < \tau < \tau_c,$$

bis nach der Zeit

$$\tau_c = \tau_0 \left( \frac{T_0}{T_c} \right)^3$$

die Übergangstemperatur  $T_c$  erreicht ist. Während des zweiten Abschnittes liegen das QGP und hadronische Materie in einem Gemisch gemeinsam vor. Der Volumenanteil  $x$  der Plasmaphase nimmt im Zeitverlauf ab; entsprechend wächst der Anteil  $(1 - x)$  der Hadronenphase. Die beim 'Einfrieren der Freiheitsgrade' freigesetzte latente Wärme  $\Delta\epsilon$  bewirkt, daß während dieses Abschnittes die Temperatur konstant ist,  $T(\tau) = T_c$ . Zur gesamten Entropiedichte, die weiter nach dem Gesetz von Bjorken abnimmt, tragen beide Anteile  $s_{qg}(T_c)$  und  $s_\pi(T_c)$  bei,

$$s(\tau) = s_0 \frac{\tau_0}{\tau} = x(\tau) s_{qg}(T_c) + (1 - x(\tau)) s_\pi(T_c). \quad (2.11)$$

$s_{qg}(T_c)$  ist die Entropiedichte des QGP, auf welche die Anfangsentropie  $s_0$  nach der Zeit  $\tau_c$  gesunken ist,

$$\frac{s_{qg}(T_c)}{s_0} = \frac{\tau_0}{\tau_c} = \left( \frac{T_c}{T_0} \right)^3.$$

Es gilt andererseits

$$\frac{s_\pi(T_c)}{s_{qg}(T_c)} = \frac{g_\pi}{g_{qg}} =: \hat{\alpha}. \quad (2.12)$$

Mit dem so definierten Verhältnis der Entartungen erhält man aus der Gleichung (2.11) für den zeitabhängigen Anteil des QGP in dem Phasengemisch

$$x(\tau) = \frac{1}{\tau} \frac{\tau_c - \hat{\alpha}\tau}{1 - \hat{\alpha}} \quad \text{für } \tau_c < \tau < \tau_h.$$

Zu der Zeit  $\tau_h$  (und später) liegt die gesamte Materie in hadronischer Form vor,

$$x(\tau_h) = 0 \quad \text{mit } \tau_h = \frac{\tau_c}{\hat{\alpha}}.$$

Nach  $\tau_h$  setzt wieder die  $\tau^{-1/3}$ -Kühlung<sup>5</sup> ein, bis die Hadronen wegen zunehmender Verdünnung den thermischen Kontakt zueinander verlieren.

Bisher ist davon ausgegangen worden, daß die Gesamtentropie während der Expansion erhalten bleibt. Wie bei Phasenübergängen, die unserer Erfahrung unmittelbar zugänglich sind, ist auch bei dem hadronischen Phasenübergang eine Entropieproduktion durch den Mechanismus der Unterkühlung denkbar: Nach Erreichen der Übergangstemperatur geht das System nicht sofort in den gemischten Zustand über, sondern kühlt als QGP weiter ab. Dieser thermodynamisch metastabile Zustand geht erst nach einer gewissen Zeit  $\tau_u$  bei der Unterkühlungstemperatur  $T_u$  in den Zustand der Stabilität über, d.h., in die Mischphase oder sogar gleich in die neue Phase, vergleiche Abbildung 2.4. Die dabei ablaufenden irreversiblen Prozesse erzeugen Entropie.

Interessiert man sich nicht für die Dynamik dieses Vorgangs<sup>6</sup>, so läßt sich die erzeugte Entropie aus der Forderung bestimmen, daß die Energie beim Übergang von dem unterkühlten QGP in das Gemisch mit der Temperatur  $T_c$  erhalten bleibt,

$$3g_q AT_u^4 + B = x^*(3g_q AT_c^4 + B) + (1 - x^*) 3g_\pi AT_c^4.$$

$x^*$  bezeichnet den Anteil des QGP im Gemisch, nachdem die Temperatur von  $T_u$  wieder auf  $T_c$  gestiegen ist. Mit der Relation (1.34) zwischen  $T_c$  und  $B$  gilt dann

$$3g_{qg} \left(\frac{T_u}{T_c}\right)^4 + (g_{qg} - g_\pi) = x^* [3g_{qg} + (g_{qg} - g_\pi) - 3g_\pi] + 3g_\pi.$$

Mit Gleichung (2.12) ist

$$x^* = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{(T_u/T_c)^4 - \hat{\alpha}}{1 - \hat{\alpha}}.$$

Man bemerkt an dieser Gleichung die interessante Tatsache, daß für  $\hat{\alpha} > 1/4$  das System nicht beliebig unterkühlt werden und anschließend in den Mischzustand übergehen kann.

<sup>5</sup>Das Kühlungsverhalten ist unabhängig von der Zahl der Freiheitsgrade, wenn diese nicht von der Temperatur abhängt.

<sup>6</sup>Häufig benötigt man nur die Gewißheit, daß der Übergang sehr schnell im Vergleich zu anderen Prozessen abläuft. Wir nehmen dies mit Verweis auf die Fußnote auf Seite 49 an.

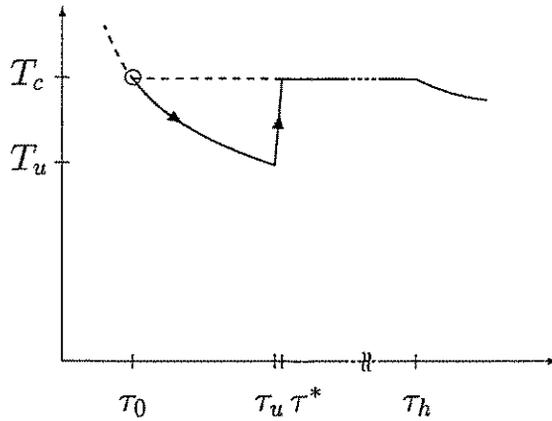


Abbildung 2.4: Das Plasma kann sich nach Erreichen der Temperatur  $T_c$  weiter abkühlen, statt sich sofort in die hadronische Phase umzuwandeln. Dieser unterkühlte, metastabile Zustand geht nach einer Zeit  $\tau_u$  durch Nichtgleichgewichtsprozesse sehr schnell ( $\tau^* \approx \tau_u$ ) in den stabilen Mischzustand über.

Wenn nämlich die Bedingung  $x^* \geq 0$  verletzt ist, geht das System gleich in die hadronische Phase mit einer geringeren Temperatur als  $T_c$  über.

Es soll nun die Entropieproduktion untersucht werden, wenn das System mit der Anfangstemperatur  $T_c$  und der Entropiedichte  $s_0 = s_{gg}(T_c)$  in der Bjorken-Expansion unterkühlt wird. Nach der Zeit  $\tau_u$  ist die Entropie des auf  $T_u$  unterkühlten QGP auf

$$s(\tau_u) =: s_u = s_0 \left( \frac{T_u}{T_c} \right)^3$$

gesunken. Zum Zeitpunkt  $\tau^*$  nach dem Wiederaufheizen ( $\tau^*/\tau_u - 1 \ll 1$ ) ist die Entropiedichte des nun zweiphasig vorliegenden Systems

$$s^* = x^* s_0 + (1 - x^*) \frac{g_\pi}{g_{gg}} s_0.$$

Das Einsetzen von  $x^*$  und eine kurze Umformung ergeben

$$s^* = s_0 \left[ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{T_u}{T_c} \right)^4 \right].$$

Durch das plötzliche Wiederaufheizen steigt die Entropiedichte also um einen Faktor

$$\gamma_s := \frac{s^*}{s_u} = \frac{1}{4} \left( \frac{T_c}{T_u} \right)^3 + \frac{3}{4} \frac{T_u}{T_c} > 1 \quad \text{falls} \quad \frac{T_u}{T_c} < 1 \quad (2.13)$$

an. Bemerkenswert an diesem Ergebnis ist, daß nur die relative Unterkühlung  $T_u/T_c$  einen Einfluß hat, nicht aber die Entartungsfaktoren  $g_{gg}$  und  $g_\pi$ . Die sprunghafte Erhöhung der Entropiedichte hat die wichtige Konsequenz, daß die Dauer des gemischten Zustandes verlängert wird. Wie nämlich aus der Bjorkenschen Beziehung  $s(\tau) \tau = \text{const.}$  sofort folgt, wird die Lebensdauer des Mischzustandes um eben den Faktor  $\gamma_s$  länger, der auch

die Entropieerzeugung beschreibt.

Nachdem oben bereits diskutiert wurde, daß die Abkühlung bei einer nicht ausschließlich longitudinalen Expansion etwas schneller ablaufen würde, als es die Bjorken-Gleichung (2.8) voraussagt, findet man bei Einbeziehung irreversibler Prozesse auch den Effekt gegenläufiger Tendenz. Durch Aufnahme von zusätzlichen Parametern, wie z.B. dem Verhältnis von transversaler zu longitudinaler Expansion oder die relative Unterkühlung, erhält man ein Modell mit einem größeren Spielraum zur quantitativen Erklärung experimenteller Befunde. Hier seien diese möglichen Erweiterungen jedoch nur angedeutet; im folgenden wird der Einfachheit halber stets das ursprüngliche Modell Bjorkens zur Beschreibung der Abkühlung der zentralen Region des Plasma-Schlauches verwendet.

## 2.3 Die Kühlung mit thermischen Massen

Die Annahme thermischer Massen im QGP verzögert im Vergleich zum Bag-Modell die Abkühlung des Plasma-Schlauches bei der Bjorken-Expansion und verkürzt die Lebensdauer der Mischphase.

Die longitudinale Expansion des Plasmas, wie nach einem Zusammenstoß von zwei Atomkernen angenommen, wurde in den vorangegangenen Abschnitten durch die Bjorken-Gleichung (2.8) beschrieben, wobei als Zustandsgleichung des Plasmas der Bag-Modell Druck gewählt wurde. Unabhängig von der Bag-Konstanten und der Zahl der thermodynamischen Freiheitsgrade ergab sich für das Kühlungsverhalten der Zusammenhang  $T(\tau) \sim \tau^{-1/3}$ . Wie jedoch aus dem Abschnitt 1.3 deutlich wird, kann das Bag-Modell die Eigenschaften eines stark wechselwirkenden Plasmas nicht in allen Punkten adäquat beschreiben. Hier soll nun untersucht werden, inwieweit sich die Kühlung mit der im Abschnitt 1.5 vorgeschlagenen Zustandsgleichung des QGP mit thermischen Massen von dem  $\tau^{-1/3}$ -Kühlungsverhalten des Bag-Modells unterscheidet.

Die Lösung  $s(T(\tau))\tau = \text{const.}$  der Bjorken-Gleichung (2.8) liefert in impliziter Form die Kühlung  $T(\tau)$ . Die Unterschiede zu dem Kühlungsverhalten eines Bag-QGP, welches dem eines Stefan-Boltzmann-Gases mit entsprechender effektiver Entartung entspricht, werden daher durch das Verhältnis der Entropiedichte  $s_{QGP} = \partial p_{QGP} / \partial T$  des QGP zu der Stefan-Boltzmann-Entropiedichte  $s_{SB}$  bestimmt. Die Entropiedichte  $s_{QGP}(T)$  ist nicht nur kleiner als die Stefan-Boltzmann-Dichte  $s_{SB}$ , sondern fällt mit sinkender Temperatur auch schneller ab, vergleiche Abbildung 2.5. Das hat zur Folge, daß das Plasma mit thermischen Massen generell *langsamer* als das Bag-QGP abkühlt. (Nach einer Zeit von z.B.  $2\tau_0$  ist die Entropiedichte wegen  $s\tau = \text{const.}$  auf die Hälfte des Anfangswertes gefallen. Um die Entropie zu halbieren, muß beim Bag-Modell die Temperatur wegen  $s \sim T^3$  auf  $T_{1/2}^B = (1/2)^{1/3} T_0$  sinken, während mit unserer Zustandsgleichung die Entropie schon bei einer etwas höheren Temperatur als  $T_{1/2}^B$  um die Hälfte gesunken ist.)

Für kurze Zeiten  $\tau \lesssim 5\tau_0$  läßt sich für  $T_0 = 400$  MeV die Kühlung durch den Zusammenhang  $T = T_0(\tau/\tau_0)^{-0.30}$  approximieren; der charakteristische Exponent ist größer als der nach dem Bag-Modell zu erwartende Wert  $-1/3$  und stimmt mit dem in [Gei] gefundenen Exponenten im Partonen-Kaskaden-Modell überein.

Andererseits ist der Sprung der Entropie- und auch der der Energiedichte, siehe Abbildung 1.23, bei  $T_c$  kleiner als im Bag-Modell. Da aber die Temperatur  $T_c$  durch die

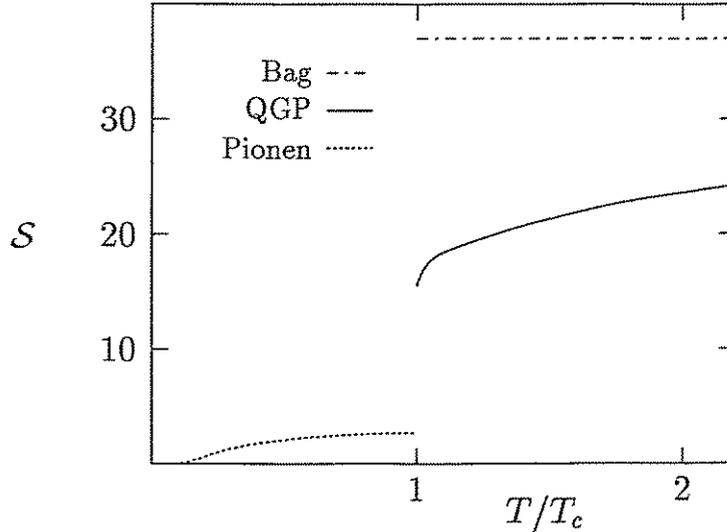


Abbildung 2.5: Die skalierte Entropiedichte  $\mathcal{S} = s(T)[4\pi^2 T^3/(90 \hbar^3)]^{-1}$  des Plasmas mit thermischen Massen (durchgezogene Linie) ist kleiner als die des Bag-QGP, die gleich der eines Stefan-Boltzmann-Gases ist. Insbesondere führt die bei  $T_c$  sehr große thermische Masse dazu, daß der Sprung in der Entropie beim Phasenübergang kleiner ist. (Wahl der Parameter wie in Abbildung 1.22).

bei der Phasenumwandlung freiwerdende latente Wärme für eine Weile aufrechterhalten wird, ist durch eine reduzierte latente Wärme eine verkürzte Lebensdauer der Mischphase beim Phasenübergang zu erwarten. Besonders deutlich wird dies durch den Vergleich jener Kühlungskurven, die nicht mit der gleichen Temperatur  $T_0$ , sondern mit der gleichen Anfangsentropie  $s_0$  starten und daher zur selben Zeit  $\tau_h^B$  in die hadronische Phase übergehen. Wird  $s_0$  als die Bag-Entropiedichte bei  $T_0 = 400$  MeV gewählt, so entspricht dies mit unserer Zustandsgleichung einer Anfangstemperatur von  $T_0 = 448$  MeV. Die in der Abbildung 2.6 gegenübergestellten Kühlungskurven bestätigen die obige qualitative Überlegung.

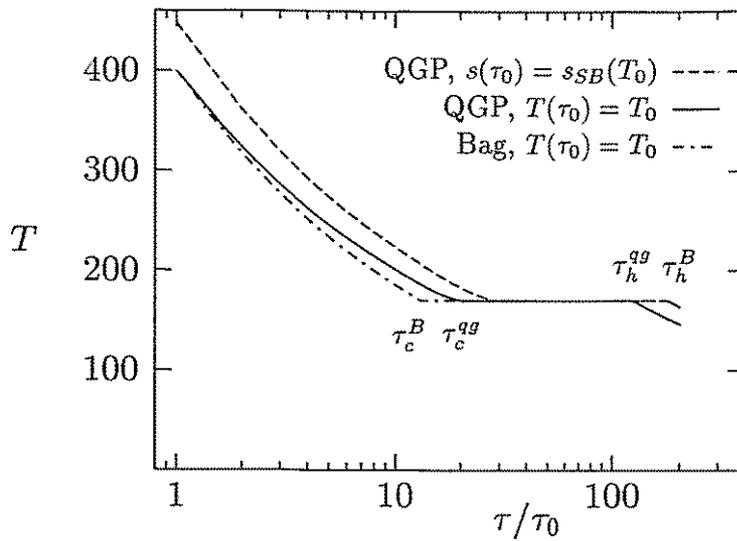


Abbildung 2.6: Das durch die Zustandsgleichung mit thermischen Massen beschriebene QGP kühlt langsamer als das Bag-QGP ab, allerdings wird aufgrund der reduzierten latenten Wärme die Lebensdauer der Mischphase verkürzt. Bei Vorgabe der Anfangsentropiedichte  $s(\tau_0)$  statt der Anfangstemperatur ist die Hadronisierungszeit  $\tau_h$  für beide QGP-Modelle gleich, wobei die Lebensdauer der reinen QGP-Phase mit unserer Zustandsgleichung etwa doppelt so lang wie für das Bag-QGP ist; die Mischphase ist entsprechend kurzlebiger.

# 3. Thermische Emission von Dileptonen

## 3.1 Thermische Leptonen als QGP-Proben

Leptonen besitzen in einem QGP große freie Weglängen und können ein QGP von nuklearer Ausdehnung ohne wesentliche Wechselwirkung durchlaufen. Emittierte Leptonen stellen daher ein mögliches Signal zur Detektierung des QGP in Schwerionenstößen dar. Die thermische Äquilibrierungszeit des QGP wird abgeschätzt.

Nicht stark wechselwirkende Teilchen wie Leptonen und Photonen besitzen einen wesentlich kleineren Wirkungsquerschnitt als stark wechselwirkende Teilchen; das Verhältnis wird in grober Abschätzung durch das Verhältnis der Kopplungskonstanten  $\alpha^2/\alpha_s^2$  bestimmt. Man kann abschätzen, daß die mittlere freie Weglänge  $l_f$  von ausschließlich der elektromagnetischen Wechselwirkung unterworfenen Teilchen um Größenordnungen über den Abmessungen eines QGP, wie es in Schwerionenstößen erzeugt werden könnte, liegt: Für Prozesse mit dem Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  ist die charakteristische Zeit zwischen zwei Wechselwirkungen in einem Gas der Teilchendichte  $n$

$$t_f^{-1} \sim \langle \sigma j \rangle \sim n \langle \sigma v \rangle,$$

wobei das Produkt (Querschnitt · Fluß) thermisch zu mitteln ist. Für elektromagnetische 2-Teilchenprozesse ist  $\sigma$  in niedrigster Ordnung ein Ausdruck der Gestalt

$$\sigma(s) \sim \alpha^2 \frac{\hbar^2}{s},$$

weil zwei Vertizes einen Faktor  $\alpha^2$  liefern und  $\hbar/\sqrt{s}$  die einzige<sup>1</sup> den Prozeß charakterisierende Länge ist, wobei die Mandelstam-Variable  $s$  ein Maß für die Energie des Prozesses ist, siehe Abschnitt 3.2. In einem heißen Plasma ist die typische Geschwindigkeit  $v \sim 1$  und die typische Energie der Teilchen von der Größenordnung der Temperatur,  $\epsilon \sim T$ , d.h.,  $s \sim \epsilon^2 \sim T^2$  ('relativistischer Gleichverteilungssatz'). Die Teilchendichte  $n$  muß aus Dimensionsgründen (für 'leichte' Teilchen) von der Größenordnung

$$n(T) \sim \frac{T^3}{\hbar^3}$$

---

<sup>1</sup>Dies gilt, falls keine weiteren Skalen wie Teilchenradien, -massen existieren, was hier in der Abschätzung angenommen wird.

sein; siehe auch Gleichung (1.19) für die Teilchendichte eines Stefan-Boltzmann-Gases. Damit erhält man

$$t_f^{-1} \sim \frac{T^3}{\hbar^3} \frac{\hbar^2 \alpha^2}{T^2} \sim \alpha^2 \frac{T}{\hbar}$$

und als charakteristische freie Weglänge

$$l_f \sim ct_f \sim \frac{1}{\alpha^2} \frac{\hbar}{T} \sim 10^4 \frac{370}{T/\text{MeV}} \text{ fm}.$$

Bei Temperaturen  $T \lesssim 400$  MeV, die man für das in Schwerionenstößen erzeugte Plasma erwartet, ist die freie Weglänge  $l_f \sim 10^4$  fm. Die radiale Ausdehnung des Plasmas ist dagegen von der Größenordnung der Kernabmessung  $r \sim 5$  fm und die Ausdehnung in Längsrichtung wird durch die Hadronisierungszeit  $\tau_h \sim 100$  fm/c bestimmt. Diese Abmessungen liegen also um einige Ordnungen unter der abgeschätzten freien Weglänge  $l_f$ . Leptonen und Photonen, die im QGP erzeugt werden, sind daher in der Lage, das Plasma ohne wesentliche Wechselwirkung zu durchlaufen und zu verlassen. Aus den Eigenschaften dieser Leptonen und Photonen kann somit auf die Bedingungen geschlossen werden, die am Ort ihrer Entstehung herrschten. Wenn insbesondere deren Eigenschaften in starkem Maße davon abhängen, ob sie tatsächlich in einem QGP oder in einer hadronischen Phase erzeugt wurden, stellen diese *elektromagnetischen Proben* ein geeignetes Signal für die Detektierung des QGP in Schwerionenstößen dar.

Andererseits zeigt die gleiche Abschätzung für stark wechselwirkende Teilchen ( $\alpha$  wird durch  $\alpha_s$  ersetzt), daß das Plasma durch starke Wechselwirkung relativ schnell thermalisieren kann: Die charakteristische Stoßzeit in starken 2-Teilchenprozessen beträgt  $t_s^{(2)} \sim \alpha_s^{-2} \hbar/T$ . Wegen  $\alpha_s \sim 1$  ist auch für andere starke Prozesse die typische Wechselwirkungsdauer bei Temperaturen  $T \sim 200$  MeV von der Größenordnung  $t_s \sim 1$  fm/c.

Durch die allgemein gültige quantenmechanische Relation  $\hbar \lesssim \Delta E \Delta t$ , die die Geschwindigkeit von Energieänderungen beschränkt, wird eine untere Grenze für die Äquilibrierungszeit bestimmt. Die Thermalisierung mit einer Energieänderung  $\Delta E \sim T \sim 400$  MeV kann nicht in wesentlich kürzeren Zeitabschnitten als  $\Delta t \sim 1$  fm/c erfolgen. Durch diese Überlegungen wird die bereits im Kapitel 2 eingeführten Äquilibrierungszeit  $\tau_0$  des QGP, welche wir als 1 fm/c angenommen hatten, semi-quantitativ bestätigt.

### 3.2 Der Wirkungsquerschnitt der Reaktion $e\bar{e} \longrightarrow \mu\bar{\mu}$

Die betrachtete Reaktion ist ein Beispiel für die elektromagnetische Umwandlung eines Fermionenpaares in ein anderes. Sind die Ausgangsteilchen statt der leichten Elektronen schwere Quarks, ist die oft gemachte Vernachlässigung der Masse der Ausgangsteilchen nicht zulässig. – Durch endliche Massen der Teilchen treten im Wirkungsquerschnitt zusätzliche Skalen auf.

Bevor im folgenden Abschnitt die Produktion von Leptonen im QGP durch Quark-Antiquark-Vernichtung betrachtet wird, soll hier der Wirkungsquerschnitt des analogen Prozesses der Elektronenerzeugung aus einem Myonenpaar abgeleitet werden. Mit den

im Anhang A.3.1 abgeleiteten Formeln und den Feynman-Regeln lassen sich Wirkungsquerschnitte wie für die Annihilation von Elektronen in Myonen einfach berechnen. Die wesentliche Arbeit liegt dabei im Auswerten der Spuren von  $\gamma$ -Matrizen. Die Techniken sind elementar und werden in üblichen Standardwerken beschrieben; da es hier (fast) keine voneinander abweichenden Konventionen gibt, sei an dieser Stelle ebenso wie zur Verwendung der Feynman-Regeln auf die Literatur verwiesen, siehe z.B. [LL4].

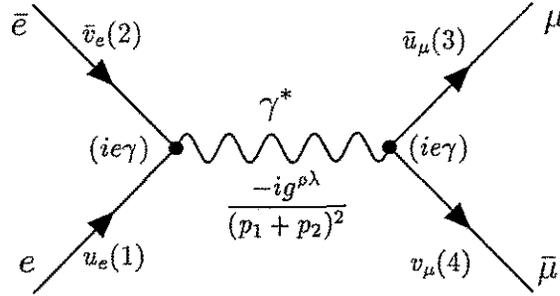


Abbildung 3.1: Die Reaktion  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  in niedrigster Ordnung. Die Zeitrichtung verläuft von links nach rechts; dargestellt ist der Impulsfluß der Teilchen.

Mit Hilfe der Feynmanschen Regeln liest man aus dem Graphen 3.1 unmittelbar den Ausdruck für die invariante Streuamplitude in niedrigster Ordnung ab,

$$T_{fi} = -i \left\{ \bar{u}_\mu(s_3, p_3) i e \gamma^\lambda v_\mu(s_4, p_4) \left( \frac{-i g^{\rho\lambda}}{(p_1 + p_2)^2} \right) u_e(s_1, p_1) i e \gamma_\rho \bar{v}_e(s_2, p_2) \right\}. \quad (3.1)$$

Es ist bequem, mit dem Photonenpropagator in der Feynman-Eichung zu arbeiten – eine andere Eichung liefert dieselben Resultate.

Im Anhang A.3.1 wird für den differentiellen Wirkungsquerschnitt einer Reaktion mit je zwei Teilchen im Anfangs- und Endzustand der invariante Ausdruck

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(s, \Omega) = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\mathcal{J}(s, m_3, m_4)}{\mathcal{J}(s, m_1, m_2)} \sum_{s_3, s_4} |T_{fi}|^2$$

abgeleitet, wobei  $\mathcal{J}$  eine Funktion der Madelstam-Variable  $s := (p_1 + p_2)^2$  und der Teilchenmassen ist,

$$\mathcal{J}(s, m_a, m_b) := \frac{1}{2} \left[ (s - (m_a + m_b)^2)(s - (m_a - m_b)^2) \right]^{1/2}.$$

Der Ausdruck  $\mathcal{J}(s, m_a, m_b)$  hängt mit der Stromdichte der Teilchen der Massen  $m_a, m_b$  in ihren Schwerpunktsystem bei gegebener Gesamtenergie  $\sqrt{s}$  zusammen, siehe Gleichung (A.18). Der angegebene Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt wird daher verständlich als die Summe über die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Endzustände geteilt durch die Stromdichte der einfallenden Teilchen.

Im betrachteten Fall sind die Massen der ein- und auslaufenden Teilchen jeweils gleich,  $m_1 = m_2 =: m_e$  und  $m_3 = m_4 =: m_\mu$ , und man kann von der Vereinfachung

$$\mathcal{J}(s, m, m) = \frac{s}{2} \left[ 1 - \frac{4m^2}{s} \right]^{1/2}$$

Gebrauch machen. Man erhält

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \left[ 1 - \frac{4m_e^2}{s} \right]^{-1/2} \left[ 1 - \frac{4m_\mu^2}{s} \right]^{1/2} \sum_{s_3, s_4} |T_{fi}|^2.$$

Für das weitere ist der Wirkungsquerschnitt interessant, bei dem über die Anfangsspinkonfiguration gemittelt wurde. Die Zahl der Spinkonfigurationen zweier Spin- $1/2$ -Teilchen ist  $(2s+1)^2 = 4$ ; man erhält also den gemittelten Querschnitt, indem man über *alle* Spins summiert und das Ergebnis viertelt. Im folgenden wird  $\sigma$  immer den Wirkungsquerschnitt bezeichnen, bei dem der Mittelwert über die Anfangsspins und die Summe über die Endspins gebildet wurde,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \left[ 1 - \frac{4m_e^2}{s} \right]^{-1/2} \left[ 1 - \frac{4m_\mu^2}{s} \right]^{1/2} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |T_{fi}|^2.$$

Nun wird der Ausdruck  $\sum_{\text{spins}} |T_{fi}|^2$ , die Summe über die Quadrate der invarianten Streuamplituden, Gleichung (3.1), weiter ausgewertet. Zunächst werden die Indexstruktur vereinfacht und die Terme  $e^{-2}$  und  $(p_1 + p_2)^2 = s$  vor die Summe gezogen. Dann beachtet man die Definition der Feinstrukturkonstanten,

$$\alpha := \frac{e^2}{4\pi \hbar} \approx \frac{1}{137}, \quad (3.2)$$

und erhält

$$\sum_{\text{spins}} |T_{fi}|^2 = (4\pi)^2 \frac{\alpha^2 \hbar^2}{s^2} \sum' \quad \text{mit} \quad \sum' := \sum_{\text{spins}} |\bar{u}_\mu(3) \gamma^\lambda v_\mu(4) \bar{v}_e(1) \gamma_\lambda u_e(2)|^2.$$

Die Argumente in Klammern stehen sowohl für die Spinvariablen wie auch für die Impulse. Im Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 \hbar^2}{16s^3} \left[ 1 - \frac{4m_e^2}{s} \right]^{-1/2} \left[ 1 - \frac{4m_\mu^2}{s} \right]^{1/2} \sum'$$

bleibt nur noch  $\sum'$  auszuwerten. Die ausführliche Rechnung im Anhang A.3.2 liefert das Resultat

$$\sum'(s, \cos \theta) = 4s^2 \left[ 1 + \left( 1 - \frac{4m_e^2}{s} \right) \left( 1 - \frac{4m_\mu^2}{s} \right) \cos^2 \theta + \frac{4(m_e^2 + m_\mu^2)}{s} \right]. \quad (3.3)$$

$\theta$  ist der Streuwinkel im Schwerpunktsystem. Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2 \hbar^2}{4s} \left[ 1 - \frac{4m_e^2}{s} \right]^{-1/2} \left[ 1 - \frac{4m_\mu^2}{s} \right]^{1/2} \\ &\quad \times \left[ 1 + \left( 1 - \frac{4m_e^2}{s} \right) \left( 1 - \frac{4m_\mu^2}{s} \right) \cos^2 \theta + \frac{4(m_e^2 + m_\mu^2)}{s} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nach den Winkelintegrationen

$$\int d\Omega = 4\pi,$$

$$\int d\Omega \cos^2 \theta = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos^2 \theta = 2\pi \int_{-1}^1 dx x^2 = \frac{4\pi}{3}$$

findet man schließlich nach Zusammenfassen aller Terme ein relativistisch invariantes und daher in jedem Bezugssystem gültiges Ergebnis für den Wirkungsquerschnitt,

$$\sigma(s) = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2 \hbar^2}{s} \left[1 - \frac{4m_e^2}{s}\right]^{-1/2} \left[1 - \frac{4m_\mu^2}{s}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{2m_e^2}{s}\right] \left[1 + \frac{2m_\mu^2}{s}\right]. \quad (3.5)$$

Dieses Ergebnis gilt in niedrigster Ordnung der Störungsentwicklung streng. Die für kleine Schwerpunktsenergien  $\sqrt{s}$  als Energieskala bedeutsamen Elektron- bzw. Myonmassen können bei relativistischen Energien vernachlässigt werden: Bei der Streuung punktförmiger, relativistischer Teilchen gibt es keine intrinsische Längen- oder Energieskalen,

$$\sqrt{s} \gg m_e, m_\mu: \quad \sigma(s) \longrightarrow \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2 \hbar^2}{s}. \quad (3.6)$$

Das Resultat (3.5) hat nicht nur als Test der QED Bedeutung, sondern auch in der hadronischen Physik, da es allgemein für die elektromagnetische Umwandlung eines beliebigen Fermionenpaares in ein anderes gilt, wenn statt  $m_e, m_\mu$  die Massen der entsprechenden Fermionen eingesetzt werden. Tragen die Fermionenpaare die Ladungen  $\pm e_a$  bzw.  $\pm e_b$  (in Einheiten der Elektronenladung), so hat dies veränderte Vertexfaktoren zur Folge und es muß  $\alpha^2 \longrightarrow e_a^2 e_b^2 \alpha^2$  ersetzt werden.

### 3.3 Thermische Raten $q\bar{q} \longrightarrow l\bar{l}$

Leptonen stellen ein mögliches Signal zur Detektierung des QGP dar. Es wird das thermische Spektrum der Leptonen betrachtet, die in einer QGP-Phase mit der Temperatur  $T$  erzeugt und emittiert werden.

Im Abschnitt 3.1 wurde gezeigt, daß Leptonen und Photonen, die im QGP erzeugt werden, in der Lage sind, das Plasma ohne wesentliche Wechselwirkung zu durchlaufen und zu verlassen. (Aus der gleichen Abschätzung folgt ebenso, daß Leptonen und Photonen auch heiße Hadronenmaterie leicht durchdringen können.) In diesem Kapitel soll untersucht werden, inwiefern sich die bei dem Phasenübergang Hadronengas  $\rightarrow$  QGP innerhalb eines kleinen Temperaturbereiches drastisch ändernden Eigenschaften der Materie auf das thermische Spektrum der emittierten Leptonen auswirken. Bevor im folgenden Abschnitt darauf eingegangen wird, welche Konsequenzen die *dynamische* Erzeugung des QGP in Schwerionenstößen hat, soll hier zunächst die rein thermische Emission von Leptonen betrachtet werden. – Diese Situation entspricht der Modellannahme der Photonen-Schwarzkörper-Strahlung.

In der Confinement-Phase, die wieder als Pionengas idealisiert wird, werden Leptonen bevorzugt durch Pionenannihilation  $\pi^+\pi^- \longrightarrow l\bar{l}$  gebildet. Diese Reaktion verläuft nach

dem Vektordominanz-Modell hauptsächlich über die Bildung und den Zerfall von intermediären  $\rho, \omega, \dots$  Teilchen ab. Das  $\rho$ -Teilchen als leichtestes Vektormeson mit einer Masse von  $M_\rho \approx 0.77$  GeV bestimmt bei Energien  $E \sim M_\rho$  die Leptonenbildung,  $\pi^+\pi^- \rightarrow \rho^* \rightarrow \ell\bar{\ell}$ . Die Existenz dieses Zwischenzustandes äußert sich im thermischen Spektrum des Pionengases durch eine charakteristisch erhöhte Leptonen-Emission bei Energien  $E \sim M_\rho$ . Dies wird als  $\rho$ -Peak bezeichnet, siehe z.B. [Rus].

In der QGP-Phase wird die Leptonenerzeugung hauptsächlich durch die in der Abbildung 3.2 dargestellten Prozesse der Ordnungen  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  und  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s)$  bestimmt; aufgrund der Erhaltung der elektrischen, der Baryonen- sowie der Leptonenladung entstehen die Leptonen paarweise als sogenannte *Dileptonen*. Obwohl die Quarks und Gluonen nicht wie in der hadronischen Phase in gebundenen Zuständen vorliegen, können selbst bei hohen Temperaturen ihre Kopplungen keineswegs vernachlässigt werden. Diese starke Kopplung haben wir in Kapitel 1 durch eine geeignete Dispersionsrelationen der Quarks und Gluonen beschrieben. Es ist einleuchtend, daß diese nicht-perturbativen Effekte Einfluß auf das Spektrum der emittierten Leptonen haben müssen.

Wir studieren hier die Konsequenzen der im QGP modifizierten Dispersionsrelationen der Quarks und Gluonen an dem Prozeß der niedrigsten Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  der elektromagnetischen Erzeugung von Dileptonen durch die Vernichtung eines Quark-Antiquark-Paares. Wir gehen dabei von der Beschreibung der Gluonen und der leichten Quarkflavors u und d als freie Teilchen aus und berücksichtigen den Einfluß der QGP-Umgebung durch die thermischen Massen dieser Quasiteilchen, siehe Kapitel 1. Die schweren Flavors werden wieder als im thermischen Gleichgewicht unterdrückt angenommen und nicht berücksichtigt. Die Modifikationen der elektromagnetischen Vertizes im QGP sind von höheren Ordnungen  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s^n)$ ,  $n \geq 1$ . Da wir die Leptonenerzeugung in der führenden Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  betrachten, können wir zunächst von den elektromagnetischen Vertizes im Vakuum ausgehen und somit die im vorangegangenen Abschnitt für die Reaktion  $e\bar{e} \rightarrow \mu\bar{\mu}$  abgeleiteten Gleichungen auf den Prozeß der Vernichtung eines Quarkpaares in ein Leptonenpaar  $q\bar{q} \rightarrow \ell\bar{\ell}$  im QGP übertragen. (Die Berechnung von in-medium Modifikationen der Vertizes bleibt späteren Untersuchungen vorbehalten.)

Quarks unterscheiden sich in elektromagnetischen Prozessen nur in ihrer Masse und durch die gebrochenen elektrischen Ladungen von Elektronen. Die kleinere Quarkladung hat im betrachteten Prozeß eine kleinere Kopplungsstärke (am 'Quarkvertex') zur Konsequenz,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{\hbar} \longrightarrow e_f \frac{e^2}{4\pi} \frac{1}{\hbar},$$

wobei  $e_f$  das Verhältnis der Ladung des Quarks mit dem Flavor  $f$  zur Elektronenladung ist. Der Wirkungsquerschnitt in der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2)$  für die Umwandlung von  $f$ -Quarks der Masse  $m_q$  in Leptonen der Masse  $m_l$  ist also nach Gleichung (3.5)

$$\bar{\sigma}(s) = e_f^2 \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2 \hbar^2}{s} \left[ 1 - \frac{4m_q^2}{s} \right]^{-1/2} \left[ 1 - \frac{4m_l^2}{s} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{2m_q^2}{s} \right] \left[ 1 + \frac{2m_l^2}{s} \right].$$

Der Wirkungsquerschnitt ist laut Definition die auf die Stromdichte bezogene Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit und Volumen. Um in einem konkreten Fall die Anzahl der auftretenden Ereignisse zu errechnen, muß der Wirkungsquerschnitt mit der entsprechenden Stromdichte  $j$  multipliziert werden. Je nach Fragestellung muß eventuell noch über

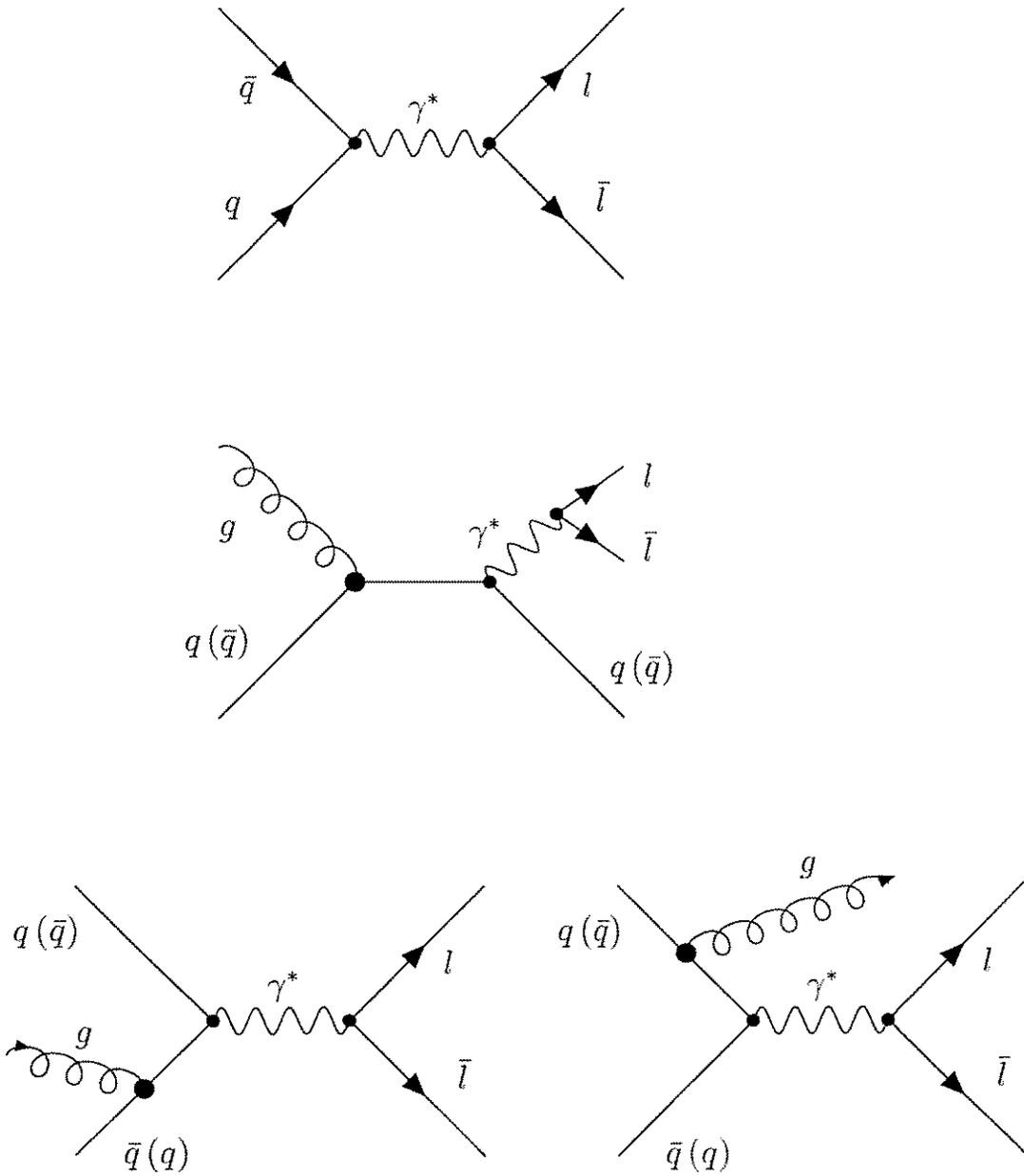


Abbildung 3.2: Die rein elektromagnetische Leptonenpaar-Erzeugung durch Quark-Antiquark-Vernichtung (Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2)$ , oben). Der Compton-artige Prozeß (Mitte) und die Prozesse mit Absorption oder Emission eines Gluons durch ein Quark bzw. Antiquark (unten) sind von der Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha^2 \alpha_s)$ .

Anfangs-/Endzustände summiert werden. Wenn man sich für die Rate  $R$  von Ereignissen 'Umwandlung eines Quarkpaares  $q\bar{q}$  in ein Leptonenpaar  $l\bar{l}$  mit dem Gesamt-4-Impuls  $Q$ ' interessiert und die Impulsverteilung der Quarks und Antiquarks durch die Funktionen  $f_q(\vec{p})$ ,  $f_{\bar{q}}(\vec{p})$  gegeben ist, so hat man den Ausdruck

$$R := \frac{dN_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}}}{d^4x d^4Q} = \sum_{s,c,f} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi\hbar)^3} f_q(\vec{p}_1) f_{\bar{q}}(\vec{p}_2) j(\vec{p}_1, \vec{p}_2) \tilde{\sigma}(s) \delta^{(4)}(Q - p_1 - p_2) \quad (3.7)$$

auszuwerten. Die Integrationen sind die mit den Verteilungsfunktionen gewichteten Summen über die Impulse  $\vec{p}_1$  und  $\vec{p}_2$  derjenigen Quarks, die sich in ein Leptonenpaar mit dem 4-Impuls  $Q$  umwandeln. Die nur angedeutete Summation über Spin-, Color- und Flavorfreiheitsgrade ( $s$ ,  $c$ , bzw.  $f$ ) berücksichtigt, daß der abgeleitete Wirkungsquerschnitt  $\tilde{\sigma}(s)$  über die Anfangsspinzustände gemittelt war. Deshalb muß nun noch über alle  $(2s+1)^2 = 4$  auftretenden Spinzustände summiert werden ( $f(\vec{p})$  ist die Verteilungsfunktion für *einen* Quantenzustand, der im Falle der Spin-Entartung  $(2s+1)$ -fach besetzt ist). Weiterhin liegt jede Flavorsorte in  $N_c = 3$  verschiedenen Farben vor. Wird jetzt noch angenommen, daß die vorliegenden Quarkflavors die gleiche Masse  $m_q$  haben<sup>2</sup>, so kann die Summe  $\sum_{s,c,f}$  durch einen Faktor ersetzt werden ( $e_d = -1/3$ ,  $e_u = 2/3$ ),

$$\sum_{s,c,f} \longrightarrow N_q := (2s+1)^2 N_c \sum_f e_f^2 = \frac{20}{3} \quad \text{für } N_f = 2, \quad (3.8)$$

wenn in Gleichung (3.7) der Wirkungsquerschnitt

$$\sigma(M) := \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2 \hbar^2}{M^2} \left[1 - \frac{4m_q^2}{M^2}\right]^{-1/2} \left[1 - \frac{4m_l^2}{M^2}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{2m_q^2}{M^2}\right] \left[1 + \frac{2m_l^2}{M^2}\right] \quad (3.9)$$

verwendet wird. Die Mandelstam-Variable  $s$  wird hier und im folgenden durch die Bezeichnung  $M^2$  ersetzt,

$$s = (p_1 + p_2)^2 = Q^2 =: M^2.$$

$M$  als Betrag des Gesamt-4-Impulses  $Q$  der zwei Leptonen wird die invariante Masse des Leptonenpaares genannt. Der Ausdruck für die Stromdichte  $j$  wird im Anhang A.3.1 berechnet, siehe Gleichung (A.17),

$$j(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{1}{V} \frac{\mathcal{J}(M^2, m_q, m_q)}{p_1^0 p_2^0} = \frac{M^2}{2e_1 e_2} \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{M^2}}.$$

Wegen der kürzeren Schreibweise wurden hier  $p_{1,2}^0$  durch  $e_{1,2}$  ersetzt.

Nach diesen Vorbetrachtungen läßt sich die Gleichung (3.7) für die Emissionsrate als ein Produkt zweier Faktoren schreiben,

$$R = A \mathcal{I}.$$

<sup>2</sup>Hierbei ist speziell an die thermischen Quarkmassen gedacht.

In  $A$  werden alle Vorfaktoren gesammelt,

$$A := \frac{N_q}{(2\pi\hbar)^6} \frac{M^2}{2} \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{M^2}} \sigma(M). \quad (3.10)$$

Aus dieser Definition liest man eine notwendige Bedingung dafür ab, daß überhaupt Leptonen gebildet werden können,

$$1 - \frac{4m_q^2}{M^2} > 0; \quad (3.11)$$

diese Bedingung ist die triviale Aussage, daß die invariante Masse des Prozesses größer als die doppelte Quarkmasse sein muß.

Das Integral  $\mathcal{I}$  ist definiert als

$$\mathcal{I}(Q) := \int \frac{d^3p_1}{e_1} \frac{d^3p_2}{e_2} f_q(\vec{p}_1) f_{\bar{q}}(\vec{p}_2) \delta^{(4)}(Q - p_1 - p_2).$$

Im Anhang A.3.3 wird  $\mathcal{I}$  unter der Annahme isotroper Impulsverteilungen ausgewertet. Für die für uns interessanten Fälle können die Impulsverteilungsfunktionen  $f_{q,\bar{q}}$  durch die Boltzmann-Verteilung approximiert werden und man erhält das einfache Resultat

$$\mathcal{I} = 2\pi \exp\left\{-\frac{E}{T}\right\} \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{M^2}}.$$

Mit dem bereits abgeleiteten Vorfaktor (3.10) ergibt sich als Formel für die Rate der aus dem QGP emittierten Dileptonen

$$R = \frac{dN_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}}}{d^4x d^4Q} = A\mathcal{I} = \frac{2\pi N_q}{(2\pi\hbar)^6} \frac{M^2}{2} \left(1 - \frac{4m_q^2}{M^2}\right) \sigma(M) \exp\left\{-\frac{E}{T}\right\}. \quad (3.12)$$

### 3.4 Leptonenemission in Schwerionenstößen

Es wird die thermische Dileptonenemission aus einem longitudinal expandierenden QGP-Schlauch betrachtet.

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die thermische Emission von Dileptonen aus einem QGP berechnet. Hier nun soll die abgeleitete Formel (3.12) speziell auf den Fall der thermischen Emission in Schwerionenstößen angewandt werden. Es wird ausschließlich die thermische Emission aus der QGP-Phase betrachtet, die in der Folge eines zentralen Schwerionenstoßes entstehen könnte, wobei die Expansion des Plasma-Schlauches durch die Bjorken-Gleichung beschrieben werden soll. Nicht betrachtet wird der Mechanismus der initialen Leptonenerzeugung in Schwerionenstößen durch Drell-Yan-artige Prozesse, Abbildung 3.3, siehe z.B. [Rus]. Ebenso bleiben die Leptonen, die vor der thermischen Äquilibrierung erzeugt werden, unberücksichtigt. (Eine Diskussion der Bildung von Leptonenpaaren in der Pre-Äquilibriumphase findet sich z.B. in [Ka92].)

Bei der Behandlung der Emission aus einem expandierenden Plasma-Schlauch ist es vorteilhaft, von einer neuen Parametrisierung des 4-Impulses  $Q$  des Leptonenpaares auszugehen, die gleichzeitig auch den experimentellen Bedürfnissen besser angepaßt ist.

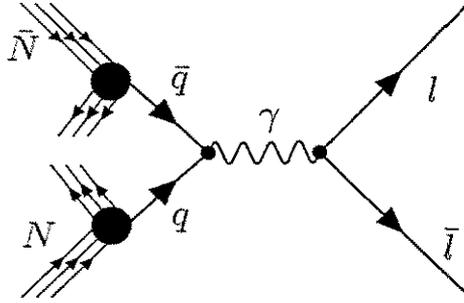


Abbildung 3.3: Die dominanten Mechanismen der nicht-thermischen Leptonenerzeugung sind bei großen Energien Drell-Yan-artige Prozesse: Quarks aus den sich passierenden Nukleonen werden in ein Leptonenpaar umgewandelt.

$Q = (E, \vec{Q})$  soll in der neuen Parametrisierung durch die invariante Masse  $M$ , die transversale Masse  $M_T$  und die Rapidität  $Y$  des Leptonenpaares ausgedrückt werden.  $M_T$  und  $Y$  werden eingeführt als

$$\begin{aligned} M_T &:= \sqrt{M^2 + Q_T^2}, \\ Y &:= \operatorname{acosh} \left( \frac{E}{M_T} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

wobei  $Q_T$  die Impulskomponente in transversaler Richtung ist, vergleiche Abbildung 2.1. In der umgekehrten Darstellung lauten die Energie und der longitudinale Impuls

$$\begin{aligned} E &= M_T \cosh Y, \\ Q_L &= \sqrt{\vec{Q}^2 - Q_T^2} = \sqrt{E^2 - M_T^2} = M_T \sinh Y. \end{aligned}$$

Für große Energien,  $|\vec{Q}| \gg M$ , besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen der Rapidität und dem Streuwinkel  $\theta$  im Schwerpunktsystem. Es gilt

$$Y = \operatorname{atanh} \left( \frac{Q_L}{E} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{E + Q_L}{E - Q_L} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{M^2 + \vec{Q}^2} + \cos \theta |\vec{Q}|}{\sqrt{M^2 + \vec{Q}^2} - \cos \theta |\vec{Q}|} \approx \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}.$$

Mit  $1 + \cos \theta = 2 \cos^2(\theta/2)$  und  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$  folgt weiter

$$Y \approx \frac{1}{2} \ln \frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} = -\ln \tan(\theta/2).$$

Der experimentell interessante Streuwinkelbereich  $\theta \sim \pi/2$  aus der zentralen Region des Plasma-Schlauches entspricht somit kleinen Rapiditäten,  $Y \sim 0$ .

Die Rate  $R$  war bezogen auf den 4-Impuls des Leptonenpaares;  $d^4Q$  in den neuen Variablen ausgedrückt, lautet

$$d^4Q = 2\pi Q_T dQ_T dQ_L dE = \frac{\pi}{2} dM^2 dM_T^2 dY. \quad (3.14)$$

Eeweis:

$$d^4Q = 2\pi Q_T dQ_T dQ_L dE = 2\pi Q_T(M^2, M_T^2, Y) \left| \frac{\partial(Q_T, Q_L, E)}{\partial(M^2, M_T^2, Y)} \right| dM^2 dM_T^2 dY$$

$Q_T$  als Funktion der neuen Größen ausgedrückt ist  $Q_T = \sqrt{M_T^2 - M^2}$ . Eine kurze Rechnung

$$\left| \frac{\partial(Q_T, Q_L, E)}{\partial(M^2, M_T^2, Y)} \right| = \left\| \begin{array}{ccc} -1/Q_T & 1/Q_T & 0 \\ 0 & \sinh Y/(2M_T) & M_T \cosh Y \\ 0 & \cosh Y/(2M_T) & M_T \sinh Y \end{array} \right\| = \frac{1}{4Q_T}$$

beweist die Behauptung.

Nach der Einführung der transversalen Masse und der Rapidität wird jetzt der expandierende Plasma-Schlauch betrachtet. Im Bjorken-Bild bewegen sich die 4-Volumenelemente  $d^4x$ , aus denen die Leptonen emittiert werden, mit *konstanten* Geschwindigkeiten in longitudinaler  $z$ -Richtung, siehe Abbildung 3.4. Um dem Rechnung zu tragen, muß die für

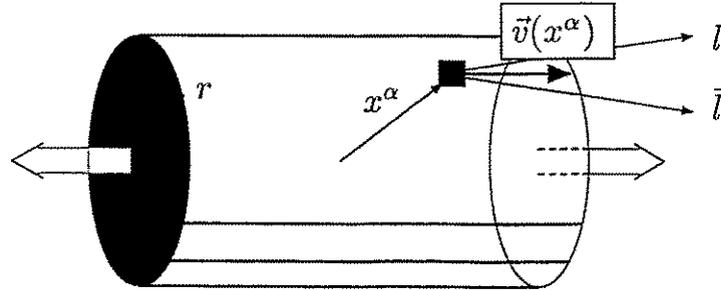


Abbildung 3.4: Bei der Bjorken-Expansion bewegen sich die 4-Volumenelemente  $d^4x$  mit einer Geschwindigkeit  $v(t, x, y, z) = z/t$  in Richtung der  $z$ -Achse.

ein ruhendes QGP abgeleitete Gleichung (3.12) nur an der Stelle abgeändert werden, an der die thermische Verteilung  $f(\vec{p})$  einging; in einem anderen Inertialsystem werden die Impulse offensichtlich anders verteilt sein. Im folgenden wird die Boltzmann-Verteilung für ein beliebiges Inertialsystem abgeleitet.

Das zweite Bezugssystem bewege sich relativ zum ersten mit einer Geschwindigkeit  $v$  in Richtung der gleich orientierten  $z$ -Achsen, d.h., die Bewegung des Koordinatenursprunges werde durch den 4-Vektor  $x^\mu = (t, 0, 0, z(t))$ ,  $z(t) = vt$ , beschrieben. Zunächst wird  $x^\mu$  durch die Koordinaten dargestellt, die sich schon bei der Behandlung der Kühlung im Bjorken-Bild als zweckmäßig erwiesen haben,

$$\tau := \sqrt{t^2 - z^2}, \quad \eta := \operatorname{atanh}(z/t).$$

$\tau$  ist die Eigenzeit des sich mit der Geschwindigkeit  $v$  oder, wie man auch sagt, des sich mit der Rapidität  $\eta = \operatorname{atanh} v$  bewegenden Bezugssystems. Die formale Ähnlichkeit dieser Koordinaten zu den Polarkoordinaten wird ebenso in der umgekehrten Darstellung sichtbar,

$$t = \tau \cosh \eta, \quad z = \tau \sinh \eta.$$

Die Boltzmann-Verteilung wird in einem Inertialsystem, welches sich mit der Geschwindigkeit  $v = \tanh \eta$  bewegt, durch die gleiche funktionale Abhängigkeit  $f$  beschrieben werden, weil die Zahl der Teilchen in einem Quantenzustand eine Invariante ist. Es ändert sich jedoch die Größe, auf welche die Teilchenzahl bezogen wird, d.h.,

$$f(E) \longrightarrow f(E').$$

Bei der Lorentz-Transformation werden die Energie- und die longitudinale Impulskomponente des 4-Impulsvektors gemischt,  $E' = (E + vQ_L)(1 - v^2)^{-1/2}$ . In der neuen Parametrisierung ausgedrückt, ergibt sich

$$\begin{aligned} E' &= M_T \frac{\sinh Y + \tanh \eta \cosh Y}{\sqrt{1 - \tanh^2 \eta}} = M_T \cosh \eta (\sinh Y + \tanh \eta \cosh Y) \\ &= M_T \cosh(Y + \eta). \end{aligned}$$

Das Ergebnis überrascht nicht, denn Lorentz-Transformationen sind eben gerade Rotationen im Minkowski-Raum, was in der vorteilhaften Koordinatenwahl in suggestiver Weise deutlich wird. Bei der Transformation geht  $Y$  in  $Y + \eta$  über (Minkowski-‘Drehung’ oder sogenannter ‘Boost’ des Bezugssystems).

Das 2-dimensionale Volumenelement  $dt dz$  transformiert sich in der  $(\tau, \eta)$ -Darstellung zu  $\tau d\tau d\eta$  (so wie das kartesische Maß  $dx dy$  in Polarkoordinaten zu  $r dr d\phi$  wird).

**Beweis:**

$$dt dz = \left| \frac{\partial(t, z)}{\partial(\tau, \eta)} \right| d\tau d\eta = \left\| \begin{array}{cc} \cosh \eta & \sinh \eta \\ \tau \sinh \eta & \tau \cosh \eta \end{array} \right\| d\tau d\eta = \tau d\tau d\eta.$$

Das 4-Volumenelement  $d^4x = dt dx dy dz$  schreibt man mit  $dx dy \rightarrow \pi r^2$  um in

$$d^4x = \pi r^2 \tau d\tau d\eta,$$

wobei  $r$  der Radius des Plasma-Schlauches und damit etwa dem Radius der kollidierenden Schwerionen ist. Im folgenden wird stets  $r = 5$  fm angenommen. Mit diesen neuen Parametrisierungen kann man die Gleichung (3.12) nach Einsetzen der transformierten Energie  $E \rightarrow E' = M_T \cosh(Y + \eta)$  umformen,

$$\begin{aligned} \frac{dN_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}}}{\pi/2 dM^2 dM_T^2 dY} = \\ \pi r^2 \int_{\tau_0}^{\tau_e} d\tau \tau \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{2\pi N_q}{(2\pi\hbar)^6} \frac{M^2}{2} \left(1 - \frac{4m_q^2}{M^2}\right) \sigma(M) \exp\left\{-\frac{M_T}{T} \cosh(Y + \eta)\right\}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck gibt die Zahl der Leptonen an, die ab der Äquilibrationszeit  $\tau_0$  bis zur Zeit  $\tau_e \leq \tau_h$  im thermisch äquilibrierten, expandierenden QGP gebildet werden, wobei  $\tau_e$

kleiner als die Hadronisierungszeit  $\tau_h$  sein soll. Durch die Wahl der  $\eta$ -Integrationsgrenzen wird berücksichtigt, daß in dem Plasma-Schlauch alle Geschwindigkeiten von  $v = 0$  (in der zentralen Region um  $z = 0$ ) bis  $v = \pm 1$  (an den 'Fronten der Expansion' bei  $z = t$ ) vorkommen. Mit der Integraldarstellung der modifizierten Besselfunktion zweiter Art<sup>3</sup> nullter Ordnung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(-z \cosh t) = 2K_0(z)$$

erhält man das Ergebnis

$$\frac{dN_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}}}{dM^2 dM_T^2 dY} = N_q \frac{r^2}{(4\pi\hbar^2)^3} \int_{\tau_0}^{\tau_e} d\tau \tau (M^2 - 4m_q^2) \sigma(M) K_0\left(\frac{M_T}{T(\tau)}\right). \quad (3.15)$$

Wegen

$$\frac{d}{dM_T^2} = \frac{\partial Q_T^2}{\partial M_T^2} \Big|_{M,Y} \frac{d}{dQ_T^2} = \frac{\partial(M_T^2 - M^2)}{\partial M_T^2} \Big|_{M,Y} \frac{d}{dQ_T^2} = \frac{d}{dQ_T^2}$$

hat die auf den transversalen Impuls bezogene Rate  $\frac{dN_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}}}{dM^2 dQ_T^2 dY}$  die gleiche Gestalt wie die Rate (3.15), es muß nur im Argument der Besselfunktion  $M_T$  durch  $Q_T$  ausgedrückt werden. Den Ausdruck (3.9) für den Wirkungsquerschnitt eingesetzt, ergibt sich schließlich die zur Querschnittsfläche  $\pi r^2$  der zentralen Region proportionale Rate

$$\mathcal{R} =: \frac{dN_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}}}{dM^2 dQ_T^2 dY} = \quad (3.16)$$

$$N_q \frac{\alpha^2 r^2}{3(4\pi\hbar^2)^2} \left[1 - \frac{4m_l^2}{M^2}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{2m_l^2}{M^2}\right] \int_{\tau_0}^{\tau_e} d\tau \tau \left[1 - \frac{4m_q^2}{M^2}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{2m_q^2}{M^2}\right] K_0\left(\frac{M_T}{T(\tau)}\right).$$

Dieses Ergebnis gilt für beliebige und insbesondere für thermische Quarkmassen, die wegen ihrer Temperaturabhängigkeit  $m_q(T)$  bei der Abkühlung eine Funktion der Eigenzeit sind,  $m_q(T(\tau))$ . Die Abkühlung  $T(\tau)$  ihrerseits wird nach Gleichung (2.8) durch die Zustandsgleichung des QGP bestimmt, die in unserem Modell (1.55) ebenfalls von der thermischen Masse der Quarks und der Gluonen abhängt. Für den Spezialfall verschwindender Quarkmassen,  $m_q = 0$ , erhält man das in [Rus] abgeleitete Ergebnis.

Die Eigenschaft der Besselfunktion

$$\frac{d}{dx}(xK_1(x)) = -xK_0(x)$$

erlaubt, auch die Integration über  $M_T^2$  in Gleichung (3.15) analytisch auszuführen. Mit  $dM_T^2 = 2M_T dM_T$  und der Zwischenrechnung

$$\int_M^{\infty} K_0\left(\frac{M_T}{T}\right) 2M_T dM_T = 2T^2 \int_{M/T}^{\infty} K_0(x) x dx = 2T^2 \frac{M}{T} K_1\left(\frac{M}{T}\right)$$

<sup>3</sup>Diese wird manchmal auch als MacDonaldsche Funktion bezeichnet.

erhält man die auf die Rapidität und die invariante Masse der Dileptonen bezogene Rate

$$\begin{aligned} \frac{dN_{q\bar{q}\rightarrow l\bar{l}}}{dM^2 dY} &= N_q \frac{r^2 \alpha^2}{24\pi^2 \hbar^4} \left[1 - \frac{4m_l^2}{M^2}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{2m_l^2}{M^2}\right] \\ &\times \int d\tau \tau \left[1 - \frac{4m_q^2}{M^2}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{2m_q^2}{M^2}\right] M T(\tau) K_1\left(\frac{M}{T(\tau)}\right). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Im folgenden Abschnitt werden die Ratengleichungen (3.16) und (3.17) für das einfache Modell verschwindender Quarkmassen und der Bag-Modell-Zustandsgleichung für das QGP ausgewertet.

### 3.5 Der Fall $T(\tau) \sim \tau^{-1/3}$ , $m_q = 0$

Die Leptonenemission bei Schwerionenstößen hängt stark von der Anfangstemperatur des Plasmas ab. Das Spektrum der aus einem Bag-QGP,  $s(T) \sim T^3$ ,  $m_q = 0$ , emittierten Dileptonen ist (fast) unabhängig von von deren invarianter Masse.

Die Dileptonenraten (3.16) und (3.17) werden hier unter den einfachen Voraussetzungen studiert, daß das Plasma in einem Schwerionenstoß erzeugt wurde und daß sich nach einer gewissen Zeit  $\tau_0$  das thermische Gleichgewicht bei einer Temperatur  $T_0$  eingestellt hat. Die Dynamik der sich anschließenden Expansion sei durch die Bjorken-Gleichung (2.8) gegeben, wobei die thermodynamischen Eigenschaften des QGP durch das Bag-Modell masseloser und freier Quarks und Gluonen beschrieben werden sollen, siehe Kapitel 1.2.2. Dies ist ein z.B. in [Rus] beschriebenes Standardmodell der thermischen Dileptonenemission aus der QGP-Phase in Schwerionenstößen.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist der Temperaturverlauf  $T(\tau)$  durch die Gleichung (2.10) gegeben,

$$T(\tau) = T_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{-1/3}.$$

Die Vernachlässigung der Quarkmassen in Gleichung (3.16),

$$m_q = 0,$$

ergibt einen einfachen Ausdruck für die Anzahl der Dileptonen, die während des Zeitintervalls  $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_e$  durch Paarkonversion gebildet werden,

$$\frac{dN_{q\bar{q}\rightarrow l\bar{l}}}{dM^2 dM_T^2 dY} = N_q \frac{\alpha^2 r^2}{3(4\pi\hbar^2)^2} \left[1 - \frac{4m_l^2}{M^2}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{2m_l^2}{M^2}\right] \int_{\tau_0}^{\tau_e} d\tau \tau K_0\left(\frac{M_T}{T(\tau)}\right).$$

Wird, wie angenommen, für den Temperaturverlauf  $T(\tau) \sim \tau^{-1/3}$  eingesetzt, kann durch eine Variablensubstitution

$$x := \frac{M_T}{T(\tau)} = \frac{M_T}{T_0} \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{1/3}, \quad \tau^2 = \tau_0^2 \left(\frac{T_0 x}{M_T}\right)^6, \quad \tau d\tau = \frac{6}{2} \left(\frac{\tau_0 T_0^3}{M_T^3}\right)^2 x^5 dx,$$

das Integral über  $\tau$  vereinfacht werden,

$$\frac{dN_{q\bar{q}\rightarrow l\bar{l}}}{dM^2 dM_T^2 dY} = N_q \frac{\alpha^2 r^2}{(4\pi\hbar^2)^2} \left[1 - \frac{4m_l^2}{M^2}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{2m_l^2}{M^2}\right] \left(\frac{\tau_0 T_0^3}{M_T^2}\right)^2 \times \int_{\frac{M_T}{T_0}}^{\frac{M_T}{T_e}} dx x^5 K_0(x).$$

$T_e$  ist die Temperatur, auf die das System nach der Zeit  $\tau_e$  abgekühlt ist. Für die Berechnung des Integrals ist es vorteilhaft, folgende Eigenschaften der modifizierten Besselfunktionen auszunutzen (' bedeutet Ableitung nach  $x$ )

$$\begin{aligned} -2K'_n(x) &= K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x), \\ -K_n(x) 2n/x &= K_{n-1}(x) - K_{n+1}(x). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Beide Eigenschaften ergeben zusammen die Gleichung

$$K_n = -K'_{n+1} - \frac{n+1}{x} K_{n+1}.$$

Mit Hilfe dieser Relation kann ein Integral wie das in der Ratengleichung ausgewertet werden,

$$\begin{aligned} \int dx x^m K_n &= - \int dx x^m K'_{n+1} - (n+1) \int dx x^{m-1} K_{n+1} \\ &= -x^m K_{n+1} + m \int dx x^{m-1} K_{n+1} - (n+1) \int dx x^{m-1} K_{n+1} \\ &= -x^m K_{n+1} + (m-n-1) \int dx x^{m-1} K_{n+1}. \end{aligned}$$

Durch rekursive Anwendung dieser Beziehung erhält man

$$\begin{aligned} \int dx x^5 K_0 &= -x^5 K_1 + 4 \int dx x^4 K_1 \\ &= -x^5 K_1 + 4 \left(-x^4 K_2 + 2 \int dx x^3 K_2\right) \\ &= -x^5 K_1 - 4x^4 K_2 + 8 \left(-x^3 K_3 + 0\right) \\ &= -x^3 \left(x^2 K_1 + 4x K_2 + 8K_3\right). \end{aligned}$$

Mit der Relation (3.18) können die modifizierten Besselfunktionen erster und zweiter Ordnung durch die der Ordnung drei ausgedrückt werden und man findet

$$\int dx x^5 K_0(x) = -x^3 (8 + x^2) K_3(x) =: -H(x). \quad (3.19)$$

Die hier definierte Funktion  $H(x)$  besitzt wie die modifizierten Besselfunktionen eine exponentiell gedämpfte Asymptotik<sup>4</sup>, siehe Abbildung 3.5. Insgesamt erhält man für die Dileptonenrate den Ausdruck [Rus]

$$\frac{dN_{q\bar{q}\rightarrow l\bar{l}}}{dM^2 dM_T^2 dY} = N_q \frac{\alpha^2 r^2}{(4\pi\hbar^2)^2} \left[1 - \frac{4m_l^2}{M^2}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{2m_l^2}{M^2}\right] \left(\frac{\tau_0 T_0^3}{M_T^2}\right)^2 \left[ H\left(\frac{M_T}{T_0}\right) - H\left(\frac{M_T}{T_e}\right) \right]. \quad (3.20)$$

<sup>4</sup>Für die Funktionen  $K_n(x)$  gilt:  $K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp\{-x\} \left[1 + \frac{4n^2-1}{8x} + \mathcal{O}(x^{-2})\right]$  für  $x \gg 1$ .

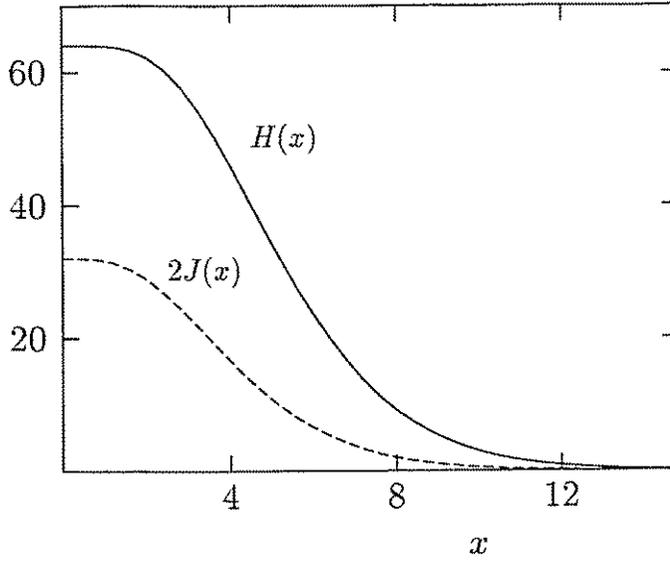


Abbildung 3.5: Die Funktionen  $H(x)$  und  $J(x)$  fallen für große  $x$  wie  $x^{n-\frac{1}{2}} \exp\{-x\}$  ( $n = 5$  bzw.  $n = 4$ ) ab.

Im Experiment werden invariante Massen  $M$  gemessen, die wesentlich größer als die Leptonenmasse  $m_l$  sind, so daß die Rate (3.20) *unabhängig* von  $M$  wird. Wesentlich für die Ableitung dieses Resultats ist die gemachte Annahme freier und masseloser Quarks. Bemerkenswert ist weiterhin, daß die Rate aufgrund der Asymptotik von  $H(x)$  für große transversale Massen,  $M_T \gtrsim 5 T_0 \gtrsim 2 \text{ GeV}$ , fast ausschließlich von der Anfangstemperatur  $T_0$  abhängt, während die späten und kalten Phasen der Expansion das Spektrum kaum beeinflussen. Wie eine genauere Betrachtung im folgenden Abschnitt zeigt, gilt dies bei hinreichend hohen Anfangstemperaturen und bei großen  $M_T$  auch für die Beiträge aus der gemischten Phase, obwohl diese eine längere Lebensdauer als die reine QGP-Phase hat. Insbesondere ist der Vorfaktor  $T_0^3$  ein direktes Maß für die Entropiedichte  $s(T) \sim T^3$  des QGP unmittelbar nach der thermischen Äquilibration. Somit kann man aus der experimentell meßbaren Rate auf die im Stoß erzeugte Anfangstemperatur schließen.

Eine analoge Rechnung für die auf die Masse und die Rapidität bezogene Rate (3.17) ergibt

$$\frac{dN_{q\bar{q} \rightarrow l\bar{l}}}{dM^2 dY} = N_q \frac{\alpha^2 r^2}{8\pi^2 \hbar^4} \left[ 1 - \frac{4m_l^2}{M^2} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{2m_l^2}{M^2} \right] \left( \frac{\tau_0 T_0^3}{M^2} \right)^2 \left[ J\left(\frac{M}{T_0}\right) - J\left(\frac{M}{T_c}\right) \right] \quad (3.21)$$

$$\text{mit } J(x) := x^2 \left( 2xK_1(x) + (8 + x^2)K_2(x) \right).$$

Aufgrund der Asymptotik von  $J(x)$  wird bei großen Massen  $M$  (analog zu Gleichung (3.20)) die Rate hauptsächlich durch die Anfangstemperatur  $T_0$  und nur in einem geringen Maße durch die kalten Phasen der Expansion bestimmt. Dies bestätigt, daß die Annahme einer rein longitudinalen Expansion in der Bjorken-Gleichung gerechtfertigt ist: Die transversale Expansion des Schlauches wird erst für Zeiten  $\tau \gtrsim 10 \text{ fm/c}$  in der Größenordnung der Hadronisierungszeit wesentlich, wenn die thermische Emission bereits sehr klein ist.

### 3.6 Konsequenzen der thermischen Masse in Schwerionenstößen

Die Annahme thermischer Quark- und Gluonenmassen beeinflusst das thermische Dileptonen-Spektrum in Schwerionenstößen.

Nach den Überlegungen im Kapitel 1 sind die Eigenschaften des QGP bei Temperaturen, die nicht deutlich größer als die Übergangstemperatur  $T_c$  sind, durch nicht-perturbative Effekte bestimmt. Dies führte uns zu der Annahme thermischer Quark- und Gluonenmassen im QGP. Für den Nachweis der Erzeugung des QGP in Schwerionenstößen ist es nun naheliegend, nach Konsequenzen dieses nicht-perturbativen Verhaltens und insbesondere nach den Konsequenzen der thermischen Massen zu suchen.

Im Vergleich zu dem im vorangegangenen Abschnitt 3.5 dargestellten Modell wird sich eine endliche thermische Masse der Quarks und Gluonen in der thermischen Dileptonenemission in Schwerionenstößen auf zweierlei Weisen auswirken:

1) Zum einen wird durch die Zustandsgleichung (1.55) mit thermischen Massen anstelle der Bag-Modell-Zustandsgleichung die Temperaturentwicklung des Plasmas modifiziert. Wie im Abschnitt 2.3 diskutiert, verläuft die Abkühlung mit thermischen Massen langsamer als die  $\tau^{-1/3}$ -Kühlung des Bag-Modells. Weil das expandierende Plasma nun mehr Zeit für die Bildung von Dileptonen besitzt, kann man eine etwas größere Rate als die durch Gleichung (3.20) beschriebene erwarten.

2) Es gibt auch einen gegenläufigen Effekt: Durch eine endliche Quarkmasse wird in der betrachteten Ordnung der Wirkungsquerschnitt der Dileptonenproduktion vermindert, vergleiche Abschnitt 3.2. Bei konstanten Quarkmassen  $m_q$  und Bag-Kühlung<sup>5</sup>  $T \sim \tau^{-1/3}$  sind die im Abschnitt 3.4 abgeleiteten Raten dann mit einem Faktor

$$\left[1 - \frac{4m_q^2}{M^2}\right]^{1/2} \left[1 + \frac{2m_q^2}{M^2}\right] \leq 1$$

zu multiplizieren. Dies führt insbesondere nahe der kinematischen Schwelle

$$M^* = 2m_q$$

zu einer Verringerung der Raten; Dileptonen mit einer kleineren Masse als  $2m_q$  können nicht erzeugt werden. In der Abbildung 3.6 ist das thermische Spektrum mit Annahme einer konstanten Masse von  $m_q = 450$  MeV, siehe Gleichung (1.57), im Wirkungsquerschnitt dargestellt. Im Falle einer temperaturabhängigen Masse wird diese Verringerung der Rate an der kinematischen Schwelle über die Zeit- bzw. die Temperaturentwicklung des expandierenden QGP-Schlauches integriert.

Das Zusammenspiel beider Effekte ist in der Abbildung 3.7 dargestellt, wobei als transversale Masse des Leptonenpaares  $M_T = 3$  GeV gewählt wurde. Das Dileptonenspektrum ist besonders sensitiv auf den Temperaturverlauf  $T(\tau)$  bzw. auf die Zustandsgleichung des QGP bei großen transversalen Massen  $M_T$ , siehe Gleichung (3.15). Bei  $M_T \sim 3.1$  GeV steigt jedoch der Anteil der aus der hadonischen Phase emittierten Dileptonen stark

<sup>5</sup>Die endliche Quarkmasse soll zunächst ausschließlich im Wirkungsquerschnitt berücksichtigt werden, wohingegen in der Zustandsgleichung weiter von einem masselosen Stefan-Boltzmann-Gas ausgegangen wird (eine Zustandsgleichung mit endlicher Teilchenmasse liefert nicht  $T \sim \tau^{-1/3}$ ).

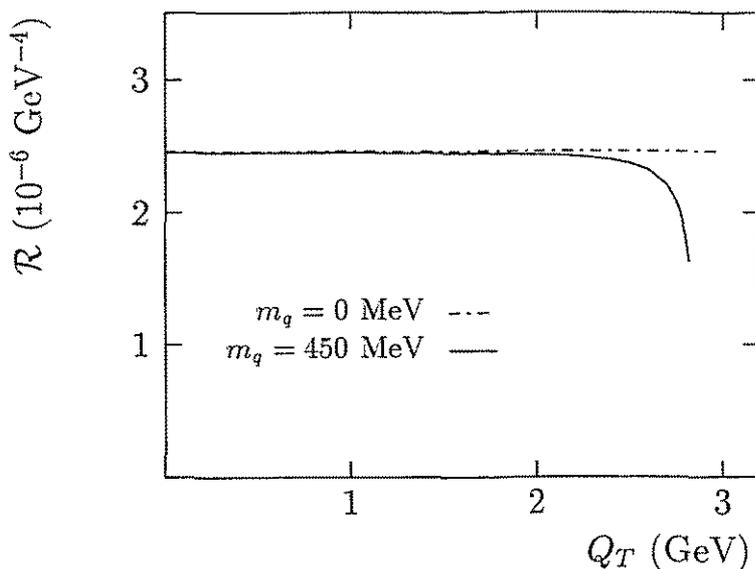


Abbildung 3.6: Die Dileptonenrate bei fixiertem  $M_T = 3$  GeV; das Plasma kühlt von einer Anfangstemperatur  $T_0 = 400$  MeV bis auf 170 MeV nach dem  $\tau^{-1/3}$ -Gesetz ab. Die Annahme einer konstanten Quarkmasse  $m_q = 450$  MeV im Wirkungsquerschnitt hat eine verringerte Rate nahe am kinematischen Limes zur Folge.

an ( $J/\psi$ -Peak, vergleiche Abschnitt 3.1) und für noch größere  $M_T$  dominieren die harten Leptonen aus Drell-Yan-Prozessen, so daß Dileptonen mit transversalen Massen leicht ‘unterhalb’ des  $J/\psi$ -Peaks offensichtlich besonders gut als QGP-Sonden geeignet sind.

Bei kleinen Transversalimpulsen  $Q_T$  ist die Rate (3.16) mit Annahme thermischer Quark- und Gluonenmassen um etwa einen Faktor  $5/4$  größer als im vorangegangenen Abschnitt durch die Gleichung (3.20) beschrieben; als Parameter für die thermischen Quark- und Gluonenmassen wurden die in Gleichung (1.55) angegebenen Werte verwendet. Die Rate hängt sensitiv sowohl von der Anfangstemperatur  $T_0$ , vergleiche Abbildung 3.7, als auch von der beobachteten transversalen Masse  $M_T$  ab, wobei die Raten in beiden Modellen ein ähnliches  $T_0$ - bzw.  $M_T$ -Skalierungsverhalten besitzen, siehe Gleichung (3.20). Die Modelle unterscheiden sich jedoch wesentlich für große Transversalimpulse  $Q_T \sim M_T$ . Das Bag-Modell liefert ein Spektrum, welches nicht von dem Transversalimpuls  $Q_T$ , sondern nur von der transversalen Masse des Leptonenpaares abhängig ist. Dies wird als  $M_T$ -Scaling bezeichnet, siehe Gleichung (3.20). Im Gegensatz dazu begrenzt die endliche Quarkmasse das thermische Spektrum bei

$$Q_T^* = \sqrt{M_T^2 - M^{*2}} \quad \text{mit} \quad M^* := 2 \min_{T(\tau)} \left\{ m_q(T(\tau)) \right\}. \quad (3.22)$$

Für große Transversalimpulse,  $Q_T > Q_T^*$ , ist die kinematische Bedingung (3.11) verletzt und es können keine Leptonen mehr gebildet werden. Die Aussagen des Modells für das zu erwartende thermische Spektrum sind dabei weitgehend unabhängig von der Wahl der  $\Gamma$ -Parameter in der thermischen Masse, vergleiche Abbildung 3.8.

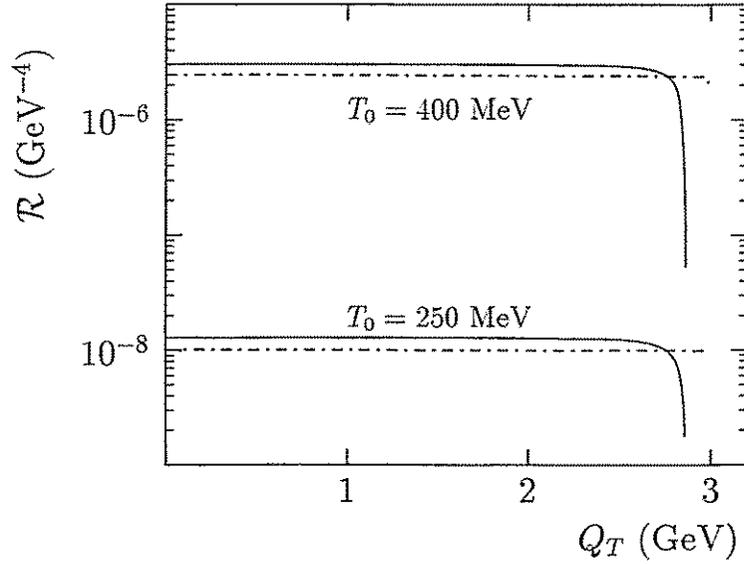


Abbildung 3.7: Die thermische Dileptonenrate aus der QGP-Phase bei  $M_T = 3$  GeV; als Anfangstemperatur wurde  $T_0 = 400$  MeV (obere Kurven) bzw.  $T_0 = 250$  MeV (untere Kurven) angenommen. Verglichen werden die Voraussagen des Bag-Modells mit Quarkmassen  $m_q = 0$  (Strich-Punkt-Linie) und die Rate mit thermischen Quark- und Gluonmassen (durchgezogene Linie).

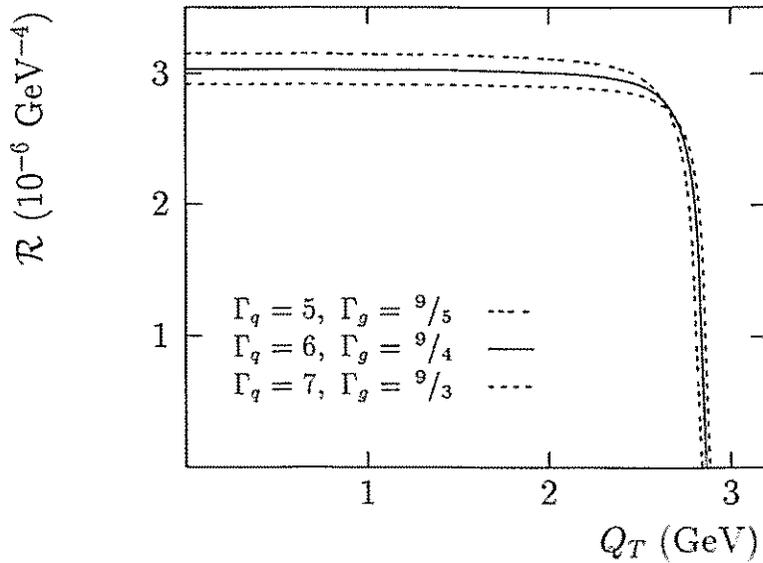


Abbildung 3.8: Die Dileptonenrate aus dem QGP ( $M_T = 3$  GeV,  $T_0 = 400$  MeV) mit thermischen Massen ist weitgehend unabhängig von der Wahl der Massenparameter  $\Gamma_{q,g}$  (Parameter wie in der Abbildung 1.24).

Wir stellen somit fest:

- 1.) *Die Annahme thermischer Massen für Gluonen und Quarks im QGP verletzt die  $M_T$ -Scaling-Voraussage des thermischen Dileptonenspektrums im Bag-Modell bei großen Transversalimpulsen  $Q_T \sim Q_T^*$ . Das Spektrum ist dabei weitgehend unabhängig von der Parametrisierung der thermischen Massen.*

Bisher wurde davon ausgegangen, daß sich nach der Zeit  $\tau_0$  ein thermisch äquilibrierter Zustand mit einer Anfangstemperatur  $T_0$  eingestellt hat. Es ist jedoch durchaus denkbar, daß nicht die Temperatur, sondern die Entropie die im Äquilibrationsprozeß wesentliche Größe darstellt, weil im Phasenraum die Äquilibration gerade das Zulaufen auf den Zustand mit minimaler Entropie ist. Nehmen wir daher in der Bjorken-Kühlung statt einer vorgegebenen Anfangstemperatur eine gegebene Anfangsentropiedichte  $s_0$  an, so erhält man bei verschiedenen Zustandsgleichungen des QGP unterschiedliche Anfangstemperaturen. Insbesondere liefert bei gegebenem  $s_0$  unsere Zustandsgleichung für das QGP eine etwas höhere Anfangstemperatur als das Bag-Modell. Da jedoch die Anfangstemperatur einen sehr starken Einfluß auf die Rate hat, unterscheiden sich die Aussagen für das Spektrum beträchtlich. Da einige Gründe dafür sprechen, daß das einfache Modell des Abschnittes 3.5 geringere Raten, als experimentell zu erwarten sind, vorhersagt, liefern die Annahmen einer bestimmten Entropiedichte nach der Äquilibration und unserer Zustandsgleichung eine mögliche Erklärung für das Problem der 'fehlenden Dileptonen' bei den CERN-SPS-Daten [Mas]. Die Abbildung 3.9 zeigt den Vergleich der beiden Modelle bei einer Anfangsentropie, die der Bag-Entropiedichte bei 400 MeV entspricht,  $s_0 = s_B(400 \text{ MeV})$ ; die dazugehörigen Kühlungskurven sind in der Abbildung 2.6 dargestellt. Wir erhalten daher als weiteres Ergebnis:

- 2.) *Die Annahme, daß sich nach der Äquilibrationszeit  $\tau_0$  eine bestimmte Anfangsentropiedichte  $s_0$  einstellt, hat für das QGP mit thermischen Massen eine deutlich höhere Dileptonenemission zur Folge, als nach dem Bag-Modell zu erwarten ist.*

Schließlich kann auch die im vorangegangenen Abschnitt gemachte Bemerkung, daß die thermische Emission hauptsächlich durch die heißen Phasen der Expansion bestimmt wird, für das Plasma mit thermischen Massen quantitativ bestätigt werden. Insbesondere ist die Anzahl der in der gemischten Phase erzeugten Leptonen (mit  $M > 2m_q(T_c)$ ) relativ klein. Zur QGP-Leptonenproduktion trägt dann nur der Volumenanteil  $x(\tau)$  bei, der noch nicht hadronisiert ist, siehe Gleichung (2.11),

$$x(\tau) = \frac{1}{\tau} \frac{s_0 \tau_0 - s_\pi(T_c) \tau}{s_{QGP}(T_c) - s_\pi(T_c)} \quad \text{für} \quad \frac{s_0 \tau_0}{s_{QGP}(T_c)} =: \tau_c \leq \tau \leq \tau_h := \frac{s_0 \tau_0}{s_\pi(T_c)},$$

wobei  $s_0$  die Anfangsentropiedichte ist,  $s_0 = s(T(\tau_0))$ . Weil die Temperatur in der Mischphase konstant ist,  $T(\tau) = T_c$ , erhält man die Rate  $\mathcal{R}^{\text{mix}}$  der QGP-Leptonen einfacher als in Gleichung (3.16) durch Integration über den Anteil  $x(\tau)$  des Plasmas,

$$\mathcal{X} := \int_{\tau_c}^{\tau_h} d\tau \tau x(\tau) = \int_{\tau_c}^{\tau_h} d\tau \frac{s_0 \tau_0 - s_\pi(T_c) \tau}{s_{QGP}(T_c) - s_\pi(T_c)} = \frac{\tau_c^2}{2} \left( \frac{s_{QGP}(T_c)}{s_\pi(T_c)} - 1 \right).$$

$\mathcal{X}$  hängt von dem relativen Sprung der Entropiedichte bei  $T_c$  ab und man erhält

$$\mathcal{R}^{\text{mix}} = N_q \frac{\alpha^2 \tau^2}{3(4\pi)^2} \left[ 1 - \frac{4m_l^2}{M^2} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{2m_l^2}{M^2} \right] \left[ 1 - \frac{4m_q^2(T_c)}{M^2} \right]^{1/2} \left[ 1 + \frac{2m_q^2(T_c)}{M^2} \right] K_0 \left( \frac{M_T}{T_c} \right) \mathcal{X}.$$

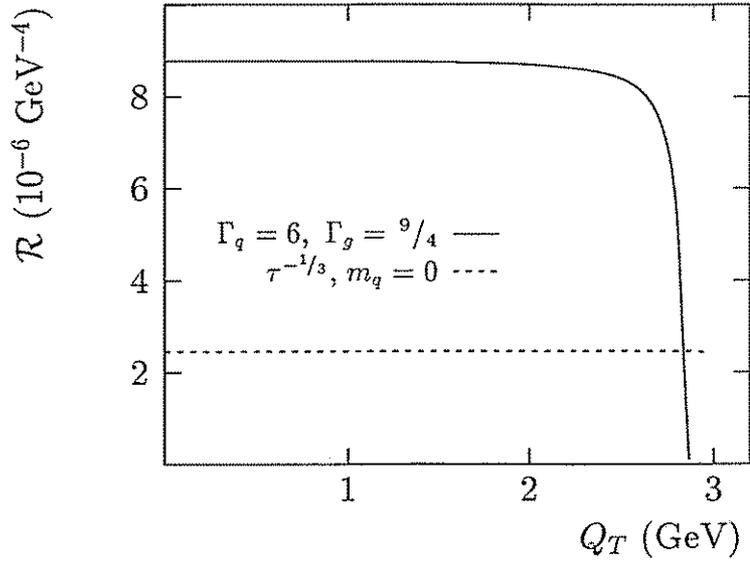


Abbildung 3.9: Die Dileptonenrate bei Annahme einer gegebenen Anfangsentropiedichte  $s_0 = s_B(400 \text{ MeV})$  statt einer für beide Modelle gleichen Anfangstemperatur  $T_0$ . Für das QGP mit thermischen Massen (volle Linie) entspricht die gegebene Entropiedichte einer Anfangstemperatur von  $T_0 = 448 \text{ MeV}$ .

Die Abbildung 3.10 zeigt die Rate der Dileptonen, die in dem Zeitintervall  $[\tau_0, \tau_e]$  bzw. bei größeren Temperaturen als  $T_e = T(\tau_e)$  produziert werden. Man erkennt, daß die Bildung von Dileptonen am effektivsten in den frühen und heißen Phasen der Expansion ist, während die späten Etappen der Ausdehnung zwar eine längere Lebensdauer haben, allerdings nur in einem geringeren Maße beitragen.

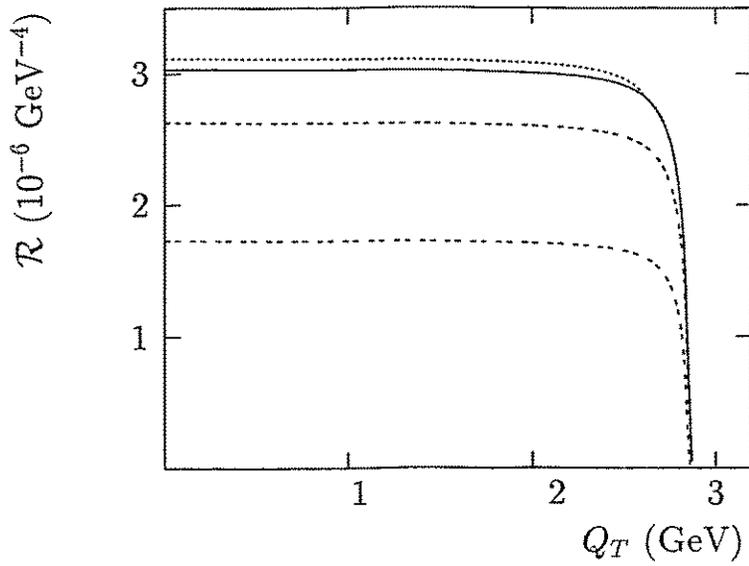


Abbildung 3.10: Die Dileptonenrate mit  $T_0 = 400$  MeV, die bis zu einer bestimmten Eigenzeit  $\tau_e$  bzw. oberhalb der Temperatur  $T(\tau_e)$  gebildet werden ( $\tau_e = 2, 4$  fm/c (gestrichelte Kurven),  $\tau_e = \tau_c = 20$  fm/c [Beginn der Hadronisierung; volle Linie],  $\tau_e = \tau_h = 124$  fm/c [vollständige Hadronisierung; gepunktete Linie]).

## 4. Resumé

Es konnte anhand existierender SU(3)-Gitterdaten gezeigt werden, daß das Gluonenplasma als ein Gas freier Quasiteilchen mit einer thermischen Masse  $m_g(T) \sim g(T)T$  beschreibbar ist. Obwohl das Gluonenplasma stark nicht-ideal ist, steht die perturbative Voraussage niedrigster Ordnung für die thermische Gluonenmasse in guter Übereinstimmung mit dem numerisch ermittelten Resultat. In einem heißen Plasma mit geringer Kopplungsstärke,  $\alpha_s \ll 1$ , verhalten sich Quarks ebenfalls wie freie Teilchen mit einer thermischen Masse  $m_q \sim g(T)T$ . Indem wir annehmen, daß dieses perturbative Ergebnis wie im rein gluonischen Fall auf den Bereich kleiner Temperaturen extrapoliert werden darf, erhalten wir eine neue Zustandsgleichung für das QGP, die sich substantiell von der bekannten Bag-Modell-Zustandsgleichung unterscheidet und beim Phasenübergang eine deutlich kleinere latente Wärme besitzt.

Als wichtige Konsequenz dieser Zustandsgleichung ergeben sich Unterschiede zu der vom Bag-Modell vorhergesagten  $\tau^{-1/3}$ -Kühlung eines QGP, welches durch einen zentralen Stoß hochenergetischer Schwerionen produziert und dessen Expansion nach der thermischen Äquilibration durch die Bjorken-Hydrodynamik beschrieben wird.

Dieser dynamische Effekt einerseits und andererseits die durch thermische Quarkmassen modifizierten Wirkungsquerschnitte der Dileptonenproduktion im QGP, die wir am Beispiel des Prozesses niedrigster Ordnung studiert haben, liefern ein thermisches Spektrum, welches für große Transversalimpulse  $Q_T$  nicht die bisher vorausgesagte  $M_T$ -Scaling-Eigenschaft besitzt. Die Konsequenzen der thermischen Massen sollten daher direkt im Experiment zu beobachten sein und könnten ein Signal zur Detektierung des QGP in Schwerionenstößen darstellen. Gleichzeitig bietet die vorgeschlagene Zustandsgleichung des QGP eine Erklärung für das derzeit diskutierte Problem der 'fehlenden Dileptonen' in Schwerionenstößen.

# A. Mathematische Nachträge

## A.1 Relativistische Bose- und Fermi-Integrale

### A.1.1 Stefan-Boltzmann-Integrale

Die im Zusammenhang mit dem Stefan-Boltzmann-Gas auftretenden Integrale können einfach ausgewertet werden. Zunächst wird der Bose-Fall betrachtet. Man entwickelt den Integranden in eine geometrische Reihe und erhält durch parametrische Ableitung eine Summe elementarer Integrale,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dx \frac{x^n}{\exp\{x\} - 1} &= \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty dx x^n \exp\{-kx\} = \sum_{k=1}^\infty (-\partial_k)^n \int_0^\infty dx \exp\{-kx\} \\ &= \sum_{k=1}^\infty (-\partial_k)^n k^{-1} = n! \sum_{k=1}^\infty k^{-(n+1)} = n! \zeta(n+1) \quad (n \geq 1), \end{aligned}$$

die auf die Riemannsche  $\zeta$ -Funktion,  $\zeta(z) := \sum_{k=1}^\infty k^{-z}$ , führt. Die analoge Rechnung für die Fermi-Verteilungsfunktion,  $(\exp\{x\} + 1)^{-1} = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} \exp\{-kx\}$ , liefert statt der Potenzreihe der  $\zeta$ -Funktion die alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} k^{-(n+1)}$ . Da gilt

$$\sum_{k=1}^\infty (-1)^{k+1} k^{-(n+1)} = \sum_{k=1}^\infty k^{-(n+1)} - 2 \sum_{k=1}^\infty (2k)^{-(n+1)} = (1 - 2^{-n}) \zeta(n+1),$$

erhält man

$$\int_0^\infty dx \frac{x^n}{\exp\{x\} \mp 1} = n! \zeta(n+1) \times \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 - 2^{-n} \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Bosonen} \\ \text{Fermionen} \end{array} \right\}. \quad (\text{A.1})$$

Für geradzahlige Argumente hängt die  $\zeta$ -Funktion mit den Bernoullischen Zahlen  $B_n$  zusammen,

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}.$$

Speziell gilt:  $\zeta(2) = \pi^2/6$ ,  $\zeta(3) = 1.202\dots$  und  $\zeta(4) = \pi^4/90$ .

### A.1.2 Die Hochtemperaturentwicklung der Bose- und Fermi-Integrale

Wir betrachten die zwei alternativen Darstellungen von  $f_\pm(a)$  als Spezialfall ( $l = 2$ ) der indizierten Funktion

$$f_\pm^{(l)}(a) := \int_0^\infty dx x^l L_\pm \quad \text{mit} \quad L_\pm := \pm \ln \left[ 1 \pm \exp \left\{ -\sqrt{x^2 + a^2} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{l+1} \int_0^\infty dx \frac{x^{l+2}}{\sqrt{x^2+a^2}} \frac{1}{\exp\{\sqrt{x^2+a^2}\} \pm 1} \quad (\text{für } l > -1), \quad (\text{A.2})$$

und führen eine (naive) Taylor-Entwicklung nach Potenzen von  $a$  durch. Weil  $f_\pm$  eigentlich von  $a^2$  abhängt, verschwinden die Ableitungen ungerader Ordnung nach  $a$ , und es gilt, wenn die Ableitung nach  $(a^2)$  mit ' gekennzeichnet wird,

$$\begin{aligned} f_\pm(a^2) &= f_\pm(0) + a^2 f'_\pm(a^2)|_{a^2=0} + \frac{(a^2)^2}{2} f''_\pm(a^2)|_{a^2=0} + \dots \\ &=: c_0^\pm + c_2^\pm a^2 + c_4^\pm a^4 + \dots \end{aligned}$$

Im folgenden wird die bosonische Funktion  $f_-(a)$  untersucht und es werden die Koeffizienten  $c_0^-$ ,  $c_2^-$ ,  $c_4^-$  bestimmt.

**Berechnung von  $c_0^- = f_-(a^2 = 0)$**

Nach Gleichung (A.1) ergibt sich  $3c_0^- = 6\zeta(4)$ ; mit  $\zeta(4) = \pi^4/90$  erhält man

$$c_0^- = \frac{\pi^4}{45}. \quad (\text{A.3})$$

**Berechnung von  $c_2^- = f'_-(a^2 = 0)$**

Man nutzt die Eigenschaft

$$\frac{\partial L_\pm}{\partial(a^2)} = \frac{\partial L_\pm}{\partial x} \frac{1}{2x}$$

aus und formt um

$$f'_-(a^2) = \int dx x^2 \frac{\partial L_-}{\partial(a^2)} = \frac{1}{2} \int dx x \frac{\partial L_-}{\partial x}. \quad (\text{A.4})$$

Die Berechnung von

$$c_2^- = f'_-(0) = -\frac{1}{2} \int dx \frac{x}{\exp\{\sqrt{x^2+a^2}\} - 1} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \Big|_{a=0} = -\frac{1}{2} \int dx \frac{x}{\exp\{x\} - 1}$$

liefert nach Gleichung (A.1)

$$c_2^- = -\frac{1}{2} \zeta(2) = -\frac{\pi^2}{12}. \quad (\text{A.5})$$

**Berechnung von  $c_4^- = f''_-(a^2)$**

Die partiell integrierte Beziehung (A.4),

$$f'_-(a^2) = -\frac{1}{2} \int dx L_-,$$

liefert durch Ableiten nach  $(a^2)$

$$f''_-(a^2) = \frac{1}{4} \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} \frac{1}{\exp\{\sqrt{x^2+a^2}\} - 1}.$$

Für kleine  $a$ ,  $x$  verhält sich der Integrand wie  $(x^2+a^2)^{-1}$ ,  $\int_0^\infty dx (x^2+a^2)^{-1} = \pi/(2a)$ , d.h., das Integral divergiert für  $a \rightarrow 0$  an der unteren Grenze in der führenden Ordnung wie  $a^{-1}$ .

Der 'Taylor-Koeffizient'  $c_4^-$  ist also selbst  $a$ -abhängig,  $c_4^- = \mathcal{O}(a^{-1})$ , und in der 'Taylor-Entwicklung' erhält man mit  $c_4^- a^4$  ein Glied der dritten (!) Ordnung statt der erwarteten Ordnung  $\mathcal{O}(a^4)$ . Dies gilt allgemein für höhere Ordnungen  $\mathcal{O}(a^{2n})$ ,  $n \geq 1$ : Durch eine naive Taylor-Entwicklung kann man keine in gegebener Potenz von  $a$  konsistente Reihe bestimmen, da die 'Taylor-Koeffizienten'  $c_{2n}^-$  divergieren,  $c_{2n}^- = \mathcal{O}(a^{-n})$ , und die Glieder  $c_{2n}^- a^{2n} = \mathcal{O}(a^{2n-n})$  Terme niedrigerer Ordnung ergeben. In einer Potenzreihe in  $a$  müßten 'Taylor-Glieder' verschiedener Ordnung entsprechend geordnet und aufsummiert werden. Um eine solche Reihe einfacher zu finden, bedient man sich einer anderen Methode und betrachtet die Funktionen (A.2) mit beliebigen Index  $l$  und macht sich die rekursive Eigenschaft

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\pm}^{[l+2]}}{\partial a} &= \int_0^{\infty} dx x^{l+2} \frac{\partial L_{\pm}}{\partial a} = \int_0^{\infty} dx x^{l+2} \frac{1}{\exp\{\sqrt{x^2+a^2}\} - 1} \frac{-a}{\sqrt{x^2+a^2}} \\ &= -a(l+1) f_{\pm}^l(a) \quad (\text{für } l > -3) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

zunutze. Es ist gerade  $-4f'' = f_-^{[-2]}$ . Die gesuchte Entwicklung der Funktion  $f_-$  kann durch zweifache Anwendung der abgeleiteten Rekursion (A.6) aus der Entwicklung von  $f_-^{[-2]}(a)$  bestimmt werden, d.h., durch die zweifache Anwendung des Operators  $(f da a)$  auf  $-f_-^{[-2]}(a)$ . Die Auswertung von  $f_-^{[-2]}$  erfolgt vorteilhaft mit Hilfe der Relation

$$\frac{1}{\exp\{z\} - 1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{z^2 + (2\pi n)^2} - \frac{1}{2}.$$

Den Integranden in dieser Weise entwickelt, ergibt

$$-f_-^{[-2]}(a) = \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2 + (2\pi n)^2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right].$$

Mit

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + A^2} = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp\{i\epsilon x\}}{x^2 + A^2} = \frac{1}{2} 2\pi i \operatorname{Res}_{x=iA} \left[ \frac{1}{x+iA} \frac{1}{x-iA} \right] = \frac{\pi}{2A}$$

ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} -f_-^{[-2]}(a) &= \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{2\sqrt{(2\pi n)^2 + a^2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + (a/2\pi)^2}} - \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (a/2\pi)^2}} \right]. \end{aligned}$$

Im Integral wurde  $x \rightarrow 2\pi x$  substituiert. Nun wird die Wurzel in der Summe entwickelt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n^2 + (a/2\pi)^2}} &= \frac{1}{n} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2\pi n} \right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left( \frac{a}{2\pi n} \right)^4 \mp \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left( \frac{a}{2\pi n} \right)^{2k} + \dots \right], \end{aligned}$$

$\left(k!! := \prod_{m=0}^K (k-2m), K := \text{int}\left(\frac{1}{2}(k-1)\right)\right)$  und eine 'nahrhafte' Null eingefügt,

$$-f_-^{-2}(a) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{a} + \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \right\} - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2\pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left( \frac{a}{2\pi} \right)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \pm \dots \right. \\ \left. - \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (a/2\pi)^2}} - \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} \right\} \right].$$

Die erste geschweifte Klammer ergibt die Eulersche Konstante  $C := \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} - \ln k \right\} = 0.5772\dots$ ; die  $n^l$ -Summationen liefern Zetafunktionen  $\zeta(l)$  und schließlich ist

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^M \frac{dx}{\sqrt{x^2 + (a/2\pi)^2}} - \int_1^M \frac{dx}{x} \right\} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \text{asinh} \left( \frac{M}{a/2\pi} \right) - \ln M \right\} \\ = \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \ln \left( \frac{M + \sqrt{(a/2\pi)^2 + M^2}}{M a/2\pi} \right) \right\} = \ln \left( \frac{2}{a/2\pi} \right).$$

Man erhält

$$-f_-^{[-2]}(a) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{a} + C + \ln \left( \frac{a}{4\pi} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2\pi} \right)^2 \zeta(3) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left( \frac{a}{2\pi} \right)^4 \zeta(5) \mp \dots \right].$$

Durch zweifache Anwendung der Rekursion (A.6) findet man schließlich

$$f_-(a) = \frac{\pi^4}{45} - \frac{\pi^2}{12} a^2 + \frac{\pi}{6} a^3 + \left[ \ln \left( \frac{a}{4\pi} \right)^2 - \frac{3}{2} + 2C \right] \frac{a^4}{32} \\ + \frac{a^4}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+4)!!} \zeta(2n+1) \left( \frac{a}{2\pi} \right)^{2n}, \quad (\text{A.7})$$

wobei die zwei Integrationskonstanten so gewählt wurden, daß die ersten beiden Terme mit den entsprechenden Termen (A.3, A.5) der 'Taylor'-Entwicklung übereinstimmen. Eine weniger elementare Entwicklung mit endlichen chemischen Potentialen ist in [Hab] angegeben.

Die Entwicklung der Funktion  $f_+(a)$  für Fermionen kann in analoger Weise erfolgen. Der wesentliche Unterschied zum bosonische Fall ist, daß hier der Integrand in  $f_+''(a)$  für  $x \rightarrow 0$  beschränkt ist und es somit im fermionische Fall kein Glied der Ordnung  $\mathcal{O}(a^3)$  gibt.

## A.2 Zur relativistischen Hydrodynamik

Betrachtet wird die relativistische Hydrodynamik einer idealen Flüssigkeit. Aus den vier Gleichungen der Energie-Impulsbilanz

$$0 = \partial_\nu T^{\mu\nu} = \partial_\nu [(e + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}] \quad (\text{A.8})$$

erhält man durch die Projektion auf die 4-Geschwindigkeit  $u_\mu$  eine skalare Gleichung,

$$\begin{aligned} 0 &= u_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} = u_\mu [(e + p)_{,\nu} u^\mu u^\nu + (e + p) \{ \underline{u^\mu_\nu} u^\nu + u^\mu u^\nu_{,\nu} \} - p_{,\nu} g^{\mu\nu}] \\ &= (e + p)_{,\nu} u^\nu + (e + p) \underline{u^\nu_\nu} - p_{,\nu} u^\nu. \end{aligned}$$

Hier wurde ausgenutzt, daß aufgrund der Normierung  $u_\mu u^\mu = u^2 = 1$  der Term  $u_\mu \underline{u^\mu_\nu} = \frac{1}{2} \partial_\nu u^2$  verschwindet; insgesamt erhält man

$$0 = u^\nu \partial_\nu e + (e + p) \partial_\nu u^\nu. \quad (\text{A.9})$$

Diese Beziehung kann im eindimensionalen Fall mit den im Kapitel 2 eingeführten Koordinaten  $\tau, \eta$ ,

$$\begin{aligned} x^0 &= \tau \cosh \eta, & \partial_0 &= \cosh \eta \partial_\tau - \tau^{-1} \sinh \eta \partial_\eta, \\ x^1 &= \tau \sinh \eta, & \partial_1 &= -\sinh \eta \partial_\tau + \tau^{-1} \cosh \eta \partial_\eta, \end{aligned}$$

und der Parametrisierung

$$u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} (1, v, 0, 0) = (\cosh y, \sinh y, 0, 0) \quad \text{mit } v = \tanh y$$

einfach ausgewertet werden. Wenn  $\dot{\phantom{x}}$  und  $\prime$  die Ableitungen nach  $\tau$  bzw.  $\eta$  bezeichnen, gilt

$$\begin{aligned} \partial_\nu u^\nu &= (\cosh \eta \partial_\tau - \tau^{-1} \sinh \eta \partial_\eta) \cosh y + (-\sinh \eta \partial_\tau + \tau^{-1} \cosh \eta \partial_\eta) \sinh y \\ &= (\cosh \eta \dot{y} - \tau^{-1} \sinh \eta y') \sinh y + (-\sinh \eta \dot{y} + \tau^{-1} \cosh \eta y') \cosh y \\ &= \dot{y} \sinh(y - \eta) + \tau^{-1} y' \cosh(y - \eta) \end{aligned}$$

und ebenfalls nach Anwendung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} u^\nu \partial_\nu &= \cosh y (\cosh \eta \partial_\tau - \tau^{-1} \sinh \eta \partial_\eta) + \sinh y (-\sinh \eta \partial_\tau + \tau^{-1} \cosh \eta \partial_\eta) \\ &= \cosh(y - \eta) \partial_\tau + \tau^{-1} \sinh(y - \eta) \partial_\eta. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Diese Beziehungen in Gleichung (A.9) eingesetzt, ergeben

$$0 = \cosh(y - \eta) \dot{e} + \tau^{-1} \sinh(y - \eta) e' + (e + p) [\dot{y} \sinh(y - \eta) + \tau^{-1} y' \cosh(y - \eta)].$$

Als Evolutionsgleichung für die Energiedichte erhält man

$$\dot{e} = -\frac{e+p}{\tau} y' - \tanh(y - \eta) \left[ \frac{e'}{\tau} + \dot{y} (e+p) \right]. \quad (\text{A.11})$$

Durch diese Gleichung wird bei gegebener Zustandsgleichung  $p(T)$  der Temperaturverlauf  $e(T(\tau))$  in impliziter Form bestimmt, wenn das 'Geschwindigkeitsfeld'  $y(\tau, \eta)$  bekannt ist. Wenn dagegen nur die Anfangsverteilung  $y(\tau_0, \eta)$  gegeben ist, wird auch die Zeitentwicklung des Feldes  $y(\tau, \eta)$  durch eine Differentialgleichung festgelegt; diese kann aus (A.8)

wie folgt gewonnen werden. Man betrachtet den allgemeinen Tensor zweiter Stufe, der unter Verwendung der 4-Geschwindigkeit konstruiert werden kann,  $u_\alpha u_\mu + c g_{\alpha\mu}$ . Durch die spezielle Wahl der Konstanten  $c = -1$ ,

$$P_{\alpha\mu} := u_\alpha u_\mu - g_{\alpha\mu},$$

wird ein Operator mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} P_{\alpha\mu} u^\mu &= u_\alpha - u_\alpha = 0 \\ P_{\alpha\mu} P^\mu_\beta &= u_\alpha u_\beta - u_\alpha u_\beta - u_\alpha u_\beta + g_{\alpha\beta} = -P_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

definiert.  $P_{\alpha\mu}$  ist der (Pseudo-) Projektor auf einen zu  $u^\alpha$  orthogonalen Unterraum.  $P^\alpha_\mu$  angewandt auf die Gleichung (A.8) liefert

$$\begin{aligned} 0 &= P^\alpha_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} = P^\alpha_\mu \left[ (e+p)_{,\nu} \underline{u}^\mu u^\nu + (e+p) \left\{ \underline{u}^\mu_{,\nu} u^\nu + \underline{u}^\mu u^\nu_{,\nu} \right\} - p_{,\nu} g^{\mu\nu} \right] \\ &= (u^\alpha u_\mu - g^\alpha_\mu) \left[ (e+p) \underline{u}^\mu_{,\nu} u^\nu - p_{,\nu} g^{\mu\nu} \right] \\ &= -(e+p) u^\nu \partial_\nu u^\alpha - u^\alpha u^\nu \partial_\nu p + g^{\alpha\nu} \partial_\nu p. \end{aligned}$$

Aufgrund der Projekteigenschaften von  $P^\alpha_\mu$  und der Normierung der 4-Geschwindigkeit verschwinden die unterstrichenen Terme. Unter Verwendung der Gleichung (A.10) und der Additionstheoreme ergibt sich für die  $(\alpha = 0)$ -Komponente des Operators  $-u^\alpha u^\nu \partial_\nu + \partial^\alpha$

$$\begin{aligned} -u^0 u^\nu \partial_\nu + \partial^0 &= -\cosh y \left( \cosh(y-\eta) \partial_\tau + \tau^{-1} \sinh(y-\eta) \partial_\eta \right) \\ &\quad + \cosh \eta \partial_\tau - \tau^{-1} \sinh \eta \partial_\eta \\ &= -\sinh y \left[ \sinh(y-\eta) \partial_\tau + \tau^{-1} \cosh(y-\eta) \partial_\eta \right]; \\ \left[ -u^0 u^\nu \partial_\nu + \partial^0 \right] p &= -\sinh y \left[ \sinh(y-\eta) \dot{p} + \tau^{-1} \cosh(y-\eta) p' \right]. \end{aligned}$$

Mit  $u^\nu \partial_\nu u^0 = [\cosh(y-\eta) \partial_\tau + \tau^{-1} \sinh(y-\eta) \partial_\eta] \cosh y$  findet man

$$\begin{aligned} 0 &= P^0_\mu \partial_\nu T^{\mu\nu} \\ &= -(e+p) \left[ \cosh(y-\eta) \dot{y} + \tau^{-1} \sinh(y-\eta) y' \right] \sinh y \\ &\quad - \sinh y \left[ \sinh(y-\eta) \dot{p} + \tau^{-1} \cosh(y-\eta) p' \right]. \end{aligned}$$

Das 'Geschwindigkeitsfeld'  $y(\tau, \eta)$  entwickelt sich also nach der Gleichung<sup>1</sup>

$$\dot{y} = -\frac{(e+p)^{-1}}{\tau} p' - \tanh(y-\eta) \left[ \frac{y'}{\tau} + \dot{p} (e+p)^{-1} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Das System der Differentialgleichungen (A.9, A.12) bestimmt bei gegebenen Anfangsverteilungen die Evolution  $e(\tau, \eta)$ ,  $y(\tau, \eta)$ . Insbesondere wird die bereits in Kapitel 2 festgestellte Tatsache bestätigt, daß unter der Scaling-Voraussetzung  $y(\tau, \eta) = \eta$  Lösungen mit der speziellen Anfangsbedingung  $p'(\tau_0, \eta) \equiv 0$  für alle Zeiten  $\eta$ -unabhängig sind. Genauer erzwingt die Scaling-Forderung  $y(\tau, \eta) \stackrel{!}{=} \eta \forall \tau$  sogar verschwindende 'Druckgradienten',  $p'(\tau, \eta) \stackrel{!}{=} 0$ . Andererseits erkennt man, daß die 'Scaling'-Voraussetzung abgeschwächt werden kann: Aus der Gültigkeit von  $y(\tau, \eta) = \eta$ ,  $p'(\tau, \eta) \equiv 0$  für einen Zeitpunkt (z.B.  $\tau = \tau_0$ ) folgt die Gültigkeit dieser Beziehung für alle Zeiten.

<sup>1</sup>Die  $(\alpha = 1)$ -Komponente führt auf dasselbe Ergebnis.

## A.3 Anhang zum Kapitel 3

### A.3.1 Zur Streutheorie

In diesem Kapitel ist die Plancksche Konstante  $\hbar = 1$  gesetzt. Eine Streuung läßt sich durch die Angabe der Streumatrix (S-Matrix) beschreiben. Deren Elemente  $S_{fi}$  sind die Amplituden für einen Übergang aus einem gewissen Anfangs- (initialen) Zustand mit  $I$  Teilchen in einen bestimmten End- (finalen) Zustand mit  $F$  Teilchen. Der Streuprozess wird meist als stationäres Problem behandelt, alle Zustände sind zeitunabhängig. Da die End- wie auch die Anfangszustände, die in den Detektoren gemessen werden, quasifreie Teilchen sind, nimmt man als Wellenfunktionen ebene Wellen an. Ein Teilchen wird demnach charakterisiert durch seinen 4-Impuls  $p^\mu$ , seinen Spin  $s$  und eventuell durch noch weitere, innere Freiheitsgrade,

$$i_1(p_1, s_1) + \dots + i_I(p_I, s_I) \longrightarrow f_1(p'_1, s'_1) + \dots + f_F(p'_F, s'_F)$$

oder

$$|i\rangle \longrightarrow S|i\rangle = \sum_{|f\rangle} |f\rangle \langle f|S|i\rangle =: \sum_{|f\rangle} S_{fi} |f\rangle .$$

$|i\rangle$  steht hier für die Wellenfunktion der Teilchen im Ausgangszustand und entsprechend  $|f\rangle$  für die der Teilchen im Endzustand,

$$|i\rangle = |i_1, \dots, i_I\rangle, \quad i_k := |p_k s_k\rangle, \quad k = 1 \dots I,$$

$$|f\rangle = |f_1, \dots, f_F\rangle, \quad f_k := |p'_k s'_k\rangle, \quad k = 1 \dots F.$$

Die Normierung der Einteilchen-Zustände wird folgendermaßen gewählt

$$\langle p_k s_k | p_k s_k \rangle = 2p_k^0 V;$$

dies entspricht der Konvention 'ein Teilchen pro Volumen  $V$ '. Die Norm der Anfangs- bzw. der Endzustände ist

$$\|i\|^2 := \langle i|i\rangle = \prod_{k=1}^I (2p_k^0 V),$$

$$\|f\|^2 := \langle f|f\rangle = \prod_{k=1}^F (2p_k^0 V).$$
(A.13)

Ohne Wechselwirkung gäbe es zwischen verschiedenen Zuständen keine Übergänge und die S-Matrix wäre eine Einheitsmatrix. Die S-Matrix läßt sich daher in einen trivialen und einen für den Streuprozess relevanten Anteil aufspalten,

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta_{[T,V]}^{(4)}(P_f - P_i) T_{fi}.$$

$P_i$  und  $P_f$  sind die Gesamt-4-Impulse des Anfangs- bzw. Endzustandes. Die Wahl der Vorfaktoren und das Abseparieren der  $\delta_{[T,V]}$ -Funktion sind zweckmäßige Konventionen; der Gesamt-4-Impuls ist ohne äußeres Potential natürlich eine erhaltene Größe und bis auf die Unschärfe aufgrund der endlichen Beobachtungszeit  $T$  und des endlichen Volumens  $V$  bestimmt. Mit den von Feynman aufgestellten Regeln läßt sich der Ausdruck für die invariante Streuamplitude  $T_{fi}$  aus dem Graphen eines gegebenen Prozesses einfach ableiten.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  während der Zeit  $T$  im Volumen  $V$  ist

$$dW_{fi} := \frac{|S_{fi}|^2}{\|i\|^2 \|f\|^2},$$

wobei das entstehende Quadrat der  $\delta_{[T,V]}$ -Funktion im Grenzübergang  $T, V \rightarrow \infty$  zu verstehen ist als

$$\begin{aligned} [\delta^{(4)}(P_f - P_i)]^2 &= \left[ \lim_{T, V \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{T, V} d^4x \exp\{i(P_f - P_i)x\} \right]^2 \\ &= \lim_{T, V \rightarrow \infty} \delta_{[T, V]}^{(4)}(P_f - P_i) \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{T, V} d^4x \exp\{i(P_f - P_i)x\} \\ &= \delta^{(4)}(P_f - P_i) \frac{TV}{(2\pi)^4}. \end{aligned}$$

Die Nicht-Diagonalelemente der S-Matrix beschreiben Übergänge in Endzustände, die von den Anfangszuständen verschieden sind. Diese Übergänge im eigentlichen Sinne sind von Interesse, für diese ist die physikalisch relevante Größe 'Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit'

$$\frac{dW_{fi}}{T} = \frac{1}{\|i\|^2 \|f\|^2} V (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 \quad \text{falls } f \neq i. \quad (\text{A.14})$$

Die Größe  $dW_{fi}/T$  in Gleichung (A.14) ist noch von der konkreten physikalischen Situation abhängig; je größer der Strom der einfallenden Teilchen ist, desto größer wird die Übergangswahrscheinlichkeit sein. Um eine charakteristische Größe zu finden, die die Natur der Reaktion beschreibt, muß man also die Wahrscheinlichkeit pro Zeit  $dW_{fi}/T$  noch auf die Stromdichte beziehen.

Gleichzeitig lautet die Fragestellung oft: 'Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegen die Teilchen  $f_k$  in *irgendwelchen* Endzuständen vor?' – Dann müssen die Wahrscheinlichkeiten sämtlicher in Frage kommenden Endzustände aufsummiert werden, zu berücksichtigen sind also Impulse und Spins, sowie weitere, innere Freiheitsgrade der  $F$  auslaufenden Teilchen. Auch kennt man häufig nur die Impulse der einlaufenden Teilchen, weiß aber nichts über deren Spins. In bestimmten Fällen kann man von einer Gleichverteilung ausgehen und über alle möglichen Spinzustände der einlaufenden Teilchen mitteln.

Diese Überlegungen führen auf die Größe des Wirkungsquerschnitts bzw. des spingemittelten Wirkungsquerschnitts,

$$\sigma := \sum_{|f\rangle} \frac{1}{j} \frac{dW_{fi}}{T} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{\bar{s}_i} := \overline{\sum_{|f\rangle}^{s_i} \frac{1}{j} \frac{dW_{fi}}{T}}. \quad (\text{A.15})$$

Da als End- wie auch als Anfangszustände oftmals ebene Wellen angenommen werden, wird der Endzustand durch die Angabe der Impulse und der Spins (und eventuell weiterer Quantenzahlen) aller  $F$  Teilchen bestimmt. Großes Volumen  $V$  des Kastens vorausgesetzt, kann die Summation über die Impulse der Teilchen durch Integrationen ersetzt werden,

$$\sum_{|f\rangle} \rightarrow \sum_{s'_{1\dots F}} \prod_{k=1}^F \left( \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p'_k \right). \quad (\text{A.16})$$

Während die bisherigen Betrachtungen für Anfangs- und Endzustände mit beliebig vielen Teilchen Gültigkeit hatten, interessieren wir uns im folgenden nur für Reaktionen mit zwei Teilchen im Anfangszustand, d.h.,  $I = 2$ . Die Berechnung des Teilchenflusses  $j$  erfolgt zunächst im Ruhesystem eines Teilchens; das Ergebnis wird anschließend verallgemeinert.

Der Fluß der Teilchen  $i_2$  im Ruhesystem  $\Sigma_1$  der Teilchen  $i_1$  ist mit der gewählten Normierung 'ein Teilchen in  $V$ '

$$j_{\Sigma_1} = \frac{1}{V} |\vec{v}| = \frac{1}{V} \frac{|\vec{p}_2|}{p_2^0}.$$

In  $\Sigma_1$  sind die 4-Impulse der Teilchen 1 und 2

$$p_1 = (m_1, \vec{0}), \quad p_2 = (p_2^0, \vec{p}_2).$$

Mit  $p_2^0 := (m_2^2 + p^2)^{1/2}$ ,  $p := |\vec{p}_2|$  ergibt sich die Lorentz-invariante Größe

$$s := (p_1 + p_2)^2 = (m_1 + p_2^0)^2 - p^2 = m_1^2 + 2m_1\sqrt{m_2^2 + p^2} + (m_2^2 + p^2) - p^2.$$

Wie üblich wird mit  $s$  die erste Mandelstam-Variable bezeichnet. Somit gilt weiter

$$p^2 = \frac{[s - (m_1^2 + m_2^2)]^2}{4m_1^2} - m_2^2,$$

$$p = \frac{1}{2m_1} \left[ [s - (m_1^2 + m_2^2)]^2 - 4m_1^2 m_2^2 \right]^{1/2}.$$

Durch Anwendung der binomischen Formel  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$  ergibt sich für den Relativimpuls

$$p = \frac{1}{2m_1} \left[ (s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2) \right]^{1/2}.$$

Man erhält also für den Fluß der Teilchen  $i_2$  im Ruhesystem  $\Sigma_1$  der Teilchen  $i_1$

$$j_{\Sigma_1} = \frac{1}{V} \frac{1}{2m_1 p_2^0} \left[ (s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2) \right]^{1/2}.$$

Die Verallgemeinerung auf ein beliebiges Koordinatensystem  $\Sigma$  erfolgt dadurch, daß man  $m_1$  im Nenner durch  $p_1^0$  ersetzt. Das ist im System  $\Sigma_1$  natürlich erlaubt und liefert gleichzeitig in jedem anderen System einen Lorentz-invarianten Ausdruck, in den die beiden Teilchen gleichberechtigt eingehen (wie es sein muß),

$$j = \frac{1}{V} \frac{\mathcal{J}(s, m_1, m_2)}{p_1^0 p_2^0}. \quad (\text{A.17})$$

Hier wurde die wichtige Größe

$$\mathcal{J}(s, m_1, m_2) := \frac{1}{2} \left[ (s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2) \right]^{1/2} \quad (\text{A.18})$$

eingeführt. Die Ausdrücke (A.13), (A.14), (A.16) sowie (A.17) zusammengefaßt, ergeben für den Wirkungsquerschnitt

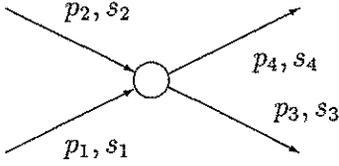
$$\sigma = \frac{1}{2p_1^0 V 2p_2^0 V} \sum_{s_{1\dots F}} \prod_{k=1}^F \left( \int d^3 p'_k \frac{1}{2p'_k{}^0 V} \frac{V}{(2\pi)^3} \right) \\ \times \left( \frac{V p_1^0 p_2^0}{\mathcal{J}(s, m_1, m_2)} V (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - p_1 - p_2) |T_{fi}|^2 \right)$$

oder umgeformt

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{4-3F}}{4\mathcal{J}(s, m_1, m_2)} \sum_{s'_1 \dots s'_F} \prod_{k=1}^F \left( \int \frac{d^3 p'_k}{2p'_k{}^0} \right) \delta^{(4)}(P_f - p_1 - p_2) |T_{fi}|^2. \quad (\text{A.19})$$

Dieses Ergebnis ist relativistisch invariant. Betont werden muß, daß hier noch nicht über die Spins der Teilchen  $i_1$  und  $i_2$  gemittelt wurde.

Es wird nun der Fall von je zwei Teilchen im Anfangs- und Endzustand betrachtet.



Die Eingangsimpulse werden hier mit  $p_1, p_2$  und die Ausgangsimpulse mit  $p_3, p_4$  bezeichnet.

Im Schwerpunktsystem verschwindet der Gesamtimpuls,  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 \equiv 0$ ; die Mandelstam-Variable  $s$  ist daher das Quadrat der Gesamtenergie  $s = (p_1 + p_2)^2 = (e_1 + e_2)^2$ . Im Schwerpunktsystem ist der Wirkungsquerschnitt (A.19) demnach gegeben als

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{16\mathcal{J}(s, m_1, m_2)} \sum_{s_3, s_4} \int \frac{d^3 p_3}{e_3} \int \frac{d^3 p_4}{e_4} \delta(e_3 + e_4 - \sqrt{s}) \delta^{(3)}(\vec{p}_3 + \vec{p}_4) |T_{fi}|^2.$$

Die Integration über  $p_3$  ist wegen der Impuls- $\delta$ -Funktion trivial, man muß nur überall  $\vec{p}_4 \rightarrow -\vec{p}_3$  ersetzen. Es gilt natürlich  $e_4(-\vec{p}_3) = e_4(\vec{p}_3)$ , so daß man mit  $p := |\vec{p}_3|$  weiter schreiben kann

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{16\mathcal{J}(s, m_1, m_2)} \sum_{s_3, s_4} \int d\Omega \int dp \frac{p^2}{e_3(p) e_4(p)} \delta(F(p)) |T_{fi}|^2,$$

mit  $F(p) := e_3(p) + e_4(p) - \sqrt{s} = \sqrt{m_3^2 + p^2} + \sqrt{m_4^2 + p^2} - \sqrt{s}$ .

Die (Energie-) $\delta$ -Funktion wird wie üblich integriert. Dazu benötigt man die Nullstelle<sup>2</sup>  $p^*$  der Funktion  $F(p)$ , für die gilt

$$e_3(p^*) + e_4(p^*) = \sqrt{s},$$

sowie deren Ableitung

$$\left. \frac{\partial F(p)}{\partial p} \right|_{p^*} = \frac{p^*}{e_3(p^*)} + \frac{p^*}{e_4(p^*)}.$$

$p^*$  ist der Betrag des Relativimpulses (im Schwerpunktsystem). Somit ergibt sich

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{16\mathcal{J}(s, m_1, m_2)} \sum_{s_3, s_4} \int d\Omega \frac{(p^*)^2}{e_3(p^*) e_4(p^*)} \frac{1}{p^* e_3(p^*) + e_4(p^*)} |T_{fi}|^2$$

oder, wenn die Winkelintegration nicht ausgeführt wird,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 \mathcal{J}(s, m_1, m_2)} \frac{p^*}{\sqrt{s}} \sum_{s_3, s_4} |T_{fi}|^2.$$

<sup>2</sup>Es kann nur eine Nullstelle geben, da die 4-Impulserhaltung die Impulsbeträge eindeutig festlegt.

Der hier eingeführte differentielle Wirkungsquerschnitt (im Schwerpunktsystem) hängt noch von  $p^*$  ab. Der invariante Ausdruck für den Relativimpuls lautet<sup>3</sup>

$$p^* = \frac{1}{\sqrt{s}} \mathcal{J}(s, m_3, m_4). \quad (\text{A.20})$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} e_3 + e_4 &= \sqrt{s} \quad \text{mit} \quad e_i^2 = m_i^2 + p^{*2}, \\ (m_3^2 + p^{*2}) + (m_4^2 + p^{*2}) + 2\sqrt{(m_3^2 + p^{*2})}\sqrt{(m_4^2 + p^{*2})} &= s, \\ 4(m_3^2 + p^{*2})(m_4^2 + p^{*2}) &= s^2 - 2s(m_3^2 + m_4^2 + 2p^{*2}) + (m_3^2 + m_4^2 + 2p^{*2})^2, \\ 4sp^{*2} &= s^2 - 2s(m_3^2 + m_4^2) + (m_3^2 - m_4^2)^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \left[ s^2 - 2s(m_3^2 + m_4^2) + (m_3^2 - m_4^2)^2 \right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{s}} \left[ (s - (m_3 + m_4)^2)(s - (m_3 - m_4)^2) \right]^{1/2} \\ &\equiv \frac{\mathcal{J}(s, m_3, m_4)}{\sqrt{s}} \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Als differentielle Wirkungsquerschnitt (summiert über die Spinzustände der auslaufenden Teilchen, jedoch nicht über die Anfangsspins gemittelt) für die Streuung von zwei Teilchen erhält man das einfache Resultat

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\mathcal{J}(s, m_3, m_4)}{\mathcal{J}(s, m_1, m_2)} \sum_{s_3, s_4} |T_{fi}|^2 \quad (\text{A.21})$$

Wie aus der Herleitung ersichtlich, sind natürlich in  $|T_{fi}|$  die 4-Impulse so zu wählen, daß Energie- und Impulssatz erfüllt sind.

### A.3.2 Auswertung der Spinsumme

Zur Auswertung der bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes im Abschnitt 3.2 benötigten Spinsummation formt man unter Verwendung der Feynmanschen Dagger-Schreibweise um

$$\begin{aligned} \sum' &= \sum_{\text{spins}} \left[ \bar{u}_\mu(3) \gamma^\lambda v_\mu(4) \bar{v}_e(2) \gamma_\lambda u_e(1) \right] \left[ \bar{u}_e(1) \gamma_\rho v_e(2) \bar{v}_\mu(4) \gamma^\rho u_\mu(3) \right] \\ &= \text{tr} \left[ \gamma^\lambda (\not{p}_3 + m_\mu) \gamma^\rho (\not{p}_4 - m_\mu) \right] \text{tr} \left[ \gamma_\lambda (\not{p}_1 + m_e) \gamma_\rho (\not{p}_2 - m_e) \right]. \end{aligned}$$

Man erhält ein Produkt einer 'myonischen Spur' mit einer 'elektronischen' Spur. Die Berechnung der ersten Spur führt auf

$$\begin{aligned} &\text{tr} \left[ \gamma^\lambda \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta p_{3\alpha} p_{4\beta} \right] - m_\mu^2 \text{tr} \left[ \gamma^\lambda \gamma^\rho \right] \\ &= 4 \left[ g^{\lambda\alpha} g^{\rho\beta} + g^{\lambda\beta} g^{\alpha\rho} - g^{\lambda\rho} g^{\alpha\beta} \right] p_{3\alpha} p_{4\beta} - 4m_\mu^2 g^{\lambda\rho} \\ &= 4 \left[ p_3^\lambda p_4^\rho + p_3^\rho p_4^\lambda - (m_\mu^2 + p_3 p_4) g^{\lambda\rho} \right]. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Es sei bemerkt, daß das gleiche Problem (die Bestimmung des Schwerpunktsimpulses bei gegebenem  $s$ ) schon bei der Berechnung der Stromdichte auftrat. Der dort auf 'heuristischem' Wege gefundene Ausdruck wird jetzt streng bewiesen.

Analog ergibt sich für die 'elektronische' Spur  $4[p_{1\lambda}p_{2\rho} + p_{1\rho}p_{2\lambda} - (m_e^2 + p_1p_2)g_{\lambda\rho}]$ . Für  $\Sigma'$  als Produkt beider Spuren folgt daher

$$\Sigma' = 16 [p_3^\lambda p_4^\rho + p_3^\rho p_4^\lambda - (m_\mu^2 + p_3p_4)g^{\lambda\rho}] [p_{1\lambda}p_{2\rho} + p_{1\rho}p_{2\lambda} - (m_e^2 + p_1p_2)g_{\lambda\rho}].$$

Beachtet man die Symmetrie der Indizes sowie  $g^{\lambda\rho}g_{\rho\lambda} = 4$ , erhält man

$$\begin{aligned} \Sigma' &= 16 [2(p_1p_3)(p_2p_4) + 2(p_1p_4)(p_2p_3) \\ &\quad - 2(p_1p_2 + m_e^2)p_3p_4 - 2(p_3p_4 + m_\mu^2)p_1p_2 + 4(p_1p_2 + m_e^2)(p_3p_4 + m_\mu^2)] \\ &= 32 [(p_1p_3)(p_2p_4) + (p_1p_4)(p_2p_3) + m_e^2p_3p_4 + m_\mu^2p_1p_2 + 2m_e^2m_\mu^2] \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird wieder im Schwerpunktsystem  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 =: \vec{p}$ ,  $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4 =: \vec{p}'$  berechnet. Wird mit  $\theta$  der Streuwinkel im Schwerpunktsystem bezeichnet, so gilt

$$\begin{aligned} p_1p_3 &= \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, \vec{p}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{s}}{2}, -\vec{p}'\right) = p_2p_4 = \frac{s}{4} - \vec{p}\vec{p}' = \frac{s}{4} - pp' \cos \theta, \\ p_1p_4 &= p_2p_3 = \frac{s}{4} + \vec{p}\vec{p}' = \frac{s}{4} + pp' \cos \theta, \\ p_1p_2 &= \frac{s}{4} + p^2 = \frac{s}{4} + \left(\frac{s}{4} - m_e^2\right) = \frac{s}{2} \left(1 - \frac{2m_e^2}{s}\right), \\ p_3p_4 &= \frac{s}{4} + p'^2 = \frac{s}{2} \left(1 - \frac{2m_\mu^2}{s}\right). \end{aligned}$$

Hier findet die Beziehung (A.20) Verwendung, die den Zusammenhang zwischen den 4-Impulsbeträgen  $p$  bzw.  $p'$  im Schwerpunktsystem mit der Invarianten  $s$  und den Massen der Teilchen herstellt.  $pp'$  ist nach Gleichung (A.20)

$$pp' = \frac{\mathcal{J}(s, m_e, m_e)}{\sqrt{s}} \frac{\mathcal{J}(s, m_\mu, m_\mu)}{\sqrt{s}} = \left[1 - \frac{4m_e^2}{s}\right]^{1/2} \left[1 - \frac{4m_\mu^2}{s}\right]^{1/2} \frac{s}{4}.$$

Somit erhält man im Schwerpunktsystem für  $\Sigma'$  den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Sigma' &= 32 \left[ \frac{s^2}{16} \left(1 - \frac{4pp'}{s} \cos \theta\right)^2 + \frac{s^2}{16} \left(1 + \frac{4pp'}{s} \cos \theta\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + m_e^2 \frac{s}{2} \left(1 - \frac{2m_\mu^2}{s}\right) + m_\mu^2 \frac{s}{2} \left(1 - \frac{2m_e^2}{s}\right) + 2m_e^2m_\mu^2 \right] \\ &= 32 \left[ \frac{s^2}{8} \left(1 + \left(\frac{4pp'}{s}\right)^2 \cos^2 \theta\right) + \frac{s}{2} (m_e^2 + m_\mu^2) \right]. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich für den gesuchten Ausdruck

$$\Sigma'(s, \cos \theta) = 4s^2 \left[ 1 + \left(1 - \frac{4m_e^2}{s}\right) \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{s}\right) \cos^2 \theta + \frac{4(m_e^2 + m_\mu^2)}{s} \right]. \quad (\text{A.22})$$

### A.3.3 Auswertung des Integrals $\mathcal{I}$

Zur Berechnung von  $\mathcal{I}$  wird die vierdimensionale Impulsbilanz im Integranden in den Zeit- und Raumanteil separiert und die Integration über  $p_2$  ausgeführt,

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int \frac{d^3 p_1}{e_1} \frac{d^3 p_2}{e_2} f_q(\vec{p}_1) f_{\bar{q}}(\vec{p}_2) \delta(E - e_1 - e_2) \delta^{(3)}(\vec{Q} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \\ &= \int \frac{d^3 p_1}{e_1} \frac{1}{e_2(\vec{p}_2)} f_q(\vec{p}_1) f_{\bar{q}}(\vec{p}_2) \delta(E - e_1 - e_2(\vec{p}_2)) \Big|_{\vec{p}_2 = \vec{Q} - \vec{p}_1}.\end{aligned}$$

Hier bezeichnen  $E$  und  $\vec{Q}$  die Energie- bzw. die Impulskomponenten des Gesamt-4-Impulses,  $Q = (E, \vec{Q})$ . Wird der Winkel zwischen  $\vec{p}_1$  und  $\vec{Q}$  mit  $\theta$  bezeichnet, so kann man wegen  $\vec{p}_2^2 = \vec{Q}^2 + \vec{p}_1^2 - 2|\vec{Q}||\vec{p}_1| \cos \theta$  schreiben

$$e_2(\vec{p}_2) = (m_q^2 + \vec{p}_2^2)^{1/2} = (e_1^2 + \vec{Q}^2 - 2|\vec{Q}||\vec{p}_1| \cos \theta)^{1/2}. \quad (\text{A.23})$$

In einer ruhenden homogenen QGP-Phase ist keine Richtung ausgezeichnet, so daß  $f(\vec{p})$  nur vom Betrag  $|\vec{p}|$  abhängen kann (isotrope Impulsverteilung). Wegen  $e_{1,2} = (m_q^2 + \vec{p}_{1,2}^2)^{1/2}$  läßt sich  $f$  dann als Funktion der Energie ausdrücken,

$$f(\vec{p}) \longrightarrow f(e).$$

Die verbleibende Integration wird dann zweckmäßigerweise über  $e_1$  und  $x := \cos \theta$  geführt.

Es gilt  $d|\vec{p}_1| = \left| \frac{\partial |\vec{p}_1|}{\partial e_1} \right| de_1 = \left| \frac{e_1}{|\vec{p}_1|} \right| de_1$ . Weil der Integrand nicht  $\phi$ -abhängig ist, wird

$$\int d^3 p_1 = \int_0^\infty d|\vec{p}_1| |\vec{p}_1|^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta = 2\pi \int_{m_q}^\infty de_1 e_1 |\vec{p}_1| \int_{-1}^1 dx.$$

Mit diesem neuen Integrationsmaß ist

$$\mathcal{I} = 2\pi \int_{m_q}^\infty de_1 |\vec{p}_1| f_q(e_1) \int_{-1}^1 dx \frac{f_{\bar{q}}(e_2(x))}{e_2(x)} \delta(F(x)) \quad (\text{A.24})$$

$$\text{mit } F(x) := E - e_1 - e_2(x) = E - e_1 - (e_1^2 + \vec{Q}^2 - 2|\vec{Q}||\vec{p}_1|x)^{1/2}.$$

Hier wurde für  $e_2(x)$  die Beziehung (A.23) eingesetzt. Falls die Nullstelle  $x^*$  der Funktion  $F(x)$  im Intervall  $[-1, 1]$  liegt, ergibt das Intergral  $\mathcal{I}_x$  über  $x$

$$\mathcal{I}_x := \int_{-1}^1 dx \frac{f_{\bar{q}}(e_2(x))}{e_2(x)} \delta(F(x)) = |F'(x)|^{-1} \frac{f_{\bar{q}}(e_2(x))}{e_2(x)} \Big|_{x=x^*}.$$

Offensichtlich gilt  $e_2(x^*) = E - e_1$  und  $F'(x^*) = 2|\vec{Q}||\vec{p}_1|/(2e_2(x^*)) = |\vec{Q}||\vec{p}_1|/(E - e_1)$ ; man erhält

$$\mathcal{I}_x = \begin{cases} \frac{f_{\bar{q}}(E - e_1)}{|\vec{Q}||\vec{p}_1|} & \text{falls } x^* \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Nullstelle  $x^*$  selbst kann man einfach bestimmen,

$$\begin{aligned}(E - e_1)^2 &= e_1^2 + \vec{Q}^2 - 2|\vec{Q}||\vec{p}_1|x^*, \\ x^* &= \frac{2Ee_1 - M^2}{2|\vec{Q}||\vec{p}_1|} = x^*(e_1).\end{aligned}$$

$x^*$  ist bei gegebenem 4-Impuls  $Q = (E, \vec{Q})$  eine Funktion von  $e_1$ . Der  $e_1$ -Integrationsbereich wird durch die Forderung

$$x^{*2} \leq 1$$

eingeschränkt. Das ist der formale Ausdruck der Tatsache, daß bei gegebenem Ablenkwinkel  $\theta = \arccos(x)$  aus kinematischen Gründen nur Teilchen mit bestimmten Energien für die Streuung zu einem Gesamt-4-Impuls  $Q$  in Frage kommen. Die kinematischen Grenzen werden durch die Bestimmungsgleichung  $x^{*2}(e) = 1$  festgelegt. Ausgeschrieben und unter Verwendung der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung umgeformt,

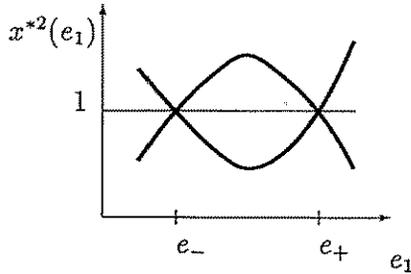
$$\left( Ee - \frac{M^2}{2} \right)^2 = |\vec{Q}|^2 (e^2 - m_q^2),$$

$$e^2 - Ee + \frac{M^2}{4} + |\vec{Q}|^2 \frac{m_q^2}{M^2} = 0,$$

liefert die Bestimmungsgleichung mit  $M^2 = E^2 - \vec{Q}^2$  die Lösungen

$$e_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ E \pm \sqrt{E^2 - M^2 - |\vec{Q}|^2 \frac{4m_q^2}{M^2}} \right] = \frac{1}{2} \left[ E \pm |\vec{Q}| \sqrt{1 - \frac{4m_q^2}{M^2}} \right]. \quad (\text{A.25})$$

Es können nun folgende Situationen vorliegen:



$$1) \ x^{*2}(e_1) < 1 \text{ für } e_1 \in [e_-, e_+]$$

$$2) \ x^{*2}(e_1) > 1 \text{ für } e_1 \in [e_-, e_+]$$

Man sieht leicht, daß hier Situation 1) vorliegt, wenn man  $x^*(e_1)$  z.B. in der Mitte des Intervalls  $[e_-, e_+]$  bei  $e_1 = E/2$  berechnet,

$$\frac{E^2 - M^2}{2\sqrt{E^2 - M^2}\sqrt{E^2/4 - m_q^2}} = \sqrt{\frac{E^2 - M^2}{E^2 - 4m_q^2}} < 1.$$

Der Ausdruck ist kleiner als 1 wegen der Bedingung (3.11); die  $e_1$ -Integration ist also nur über ein endliches Intervall zu führen. (Das war auch von vornherein zu erwarten, da die Gesamtenergie  $E$  des Prozesses endlich sein muß.) Damit ist das Integrationsintervall gerade  $[e_-, e_+]$ , denn es wurde von vornherein  $e_- = (m_q^2 + \vec{p}_1^2)^{1/2} \geq m_q$  angenommen. Mit den vorangegangenen Überlegungen vereinfacht sich das Integral (A.24) zu

$$\mathcal{I} = 2\pi \int_{e_-}^{e_+} de_1 |\vec{p}_1| f_q(e_1) \frac{f_{\bar{q}}(E - e_1)}{E - e_1} \frac{E - e_1}{|\vec{Q}||\vec{p}_1|} = \frac{2\pi}{|\vec{Q}|} \int_{e_-}^{e_+} de_1 f_q(e_1) f_{\bar{q}}(E - e_1).$$

Das verbleibende Integral

$$I_{\text{Fer}} := \int_{e^-}^{e^+} de_1 f_q(e_1) f_{\bar{q}}(E - e_1), \quad (\text{A.26})$$

die Faltung der Fermi-Verteilungsfunktionen (1.12) für Quarks bzw. Antiquarks

$$f_{q,\bar{q}}(e) = \left( \exp\{e/T\} + 1 \right)^{-1},$$

kann durch eine Variablensubstitution  $\exp\{e_1/T\} = z$  einfach ausgewertet werden,

$$I_{\text{Fer}} = \frac{T}{\exp\{E/T\} - 1} \ln \frac{1 + \exp\{z\}}{\exp\{E/T\} + \exp\{z\}} \Big|_{e^-/T}^{e^+/T}.$$

Nach Einsetzen der Integrationsgrenzen und einer kurzen Umformung erhält man

$$I_{\text{Fer}} = \frac{T}{\exp\{E/T\} - 1} \left[ \frac{e_+ - e_-}{T} + 2 \ln \frac{1 + \exp\{-e_+/T\}}{1 + \exp\{-e_-/T\}} \right].$$

Das Verhältnis des zweiten Summanden in der Klammer zu dem ersten ist, wie man leicht abschätzen kann, für  $M \rightarrow E$ ,  $e_+ - e_- = |\vec{Q}| \sqrt{1 - 4m_q^2/M^2} \ll T$  in der Größenordnung  $\mathcal{O}(\exp\{-E/(2T)\})$ . Weil in den uns interessierenden Fällen mit  $E \gtrsim 10T$  auch der Vorfaktor gut durch  $T \exp\{-E/T\}$  abgeschätzt wird, kann  $I_{\text{Fer}}$  in diesem Falle durch die Faltung (A.26) von Boltzmann-Verteilungsfunktionen approximiert werden,

$$I_{\text{Fer}} \approx I_{\text{Boltz}} = \int_{e^-}^{e^+} de_1 \exp\{-e_1/T\} \exp\{-(E - e_1)/T\} = \exp\{-E/T\} (e_+ - e_-).$$

Für  $2m_q < M \sim 0$ ,  $e_+ - e_- \sim E$  ist das Verhältnis der Summanden von der Ordnung  $\mathcal{O}(T/E)$ . Es zeigt sich jedoch, daß insbesondere für höhere Quarkmassen  $m_q$  die Approximation von  $I_{\text{Fer}}$  durch  $I_{\text{Boltz}}$  nicht nur für  $M \rightarrow E$ , sondern für beliebige  $M$  möglich ist. Für die uns interessierenden Größenordnungen von  $E$ ,  $T$  und  $m_q$  ist der Fehler kleiner als 1%, siehe Abbildung A.1. Mit  $e_+ - e_- = |\vec{Q}| \sqrt{1 - 4m_q^2/M^2}$  erhält man in dieser Näherung

$$I = |\vec{Q}| \sqrt{1 - 4m_q^2/M^2} \exp\{-E/T\}.$$

Insgesamt ergibt sich mit der hier möglichen Vernachlässigung der quantenstatistischen Eigenschaften der Quarks als Resultat

$$\mathcal{I} = 2\pi \sqrt{1 - 4m_q^2/M^2} \exp\{-E/T\}. \quad (\text{A.27})$$

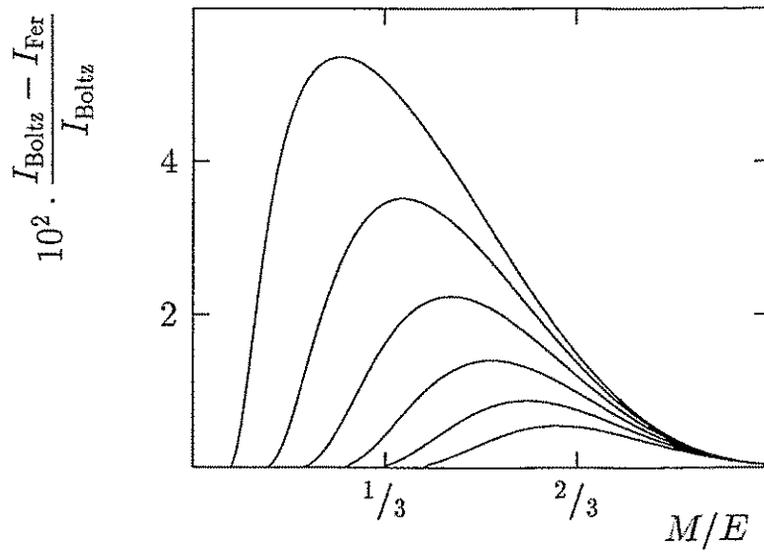


Abbildung A.1: Die Approximation der Funktion  $I_{\text{Fer}}$  durch  $I_{\text{Boltz}}$  bei  $E = 3 \text{ GeV}$ ,  $T = 170 \text{ MeV}$  und verschiedenen Quarkmassen als Parameter ( $m_q = 100, 200, \dots 600 \text{ MeV}$ , von oben nach unten).

# Literaturverzeichnis

- [Ber] C. Bernard, Feynman rules for gauge theories at finite temperature, Phys. Rev. **D9** (1974) 3312
- [Bir] T. S. Biro, Massive gluons and quark gluon plasma signatures, J. Mod. Phys. E, Vol. 1, No. 1 (1992) 39
- [Blu] T. Blum, L. Kärkkäinen, D. Toussaint, S. Gottlieb, The  $\beta$  function and equation of state for QCD with two flavors of quarks, AZPH-TH/94-22
- [Bro] F. R. Brown, N. C. Christ, Y. Deng, M. Gao, T. J. Woch, Nature of the deconfining phase transition in SU(3) lattice gauge theory, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 2058,  
Y. Deng, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **9** (1989) 334
- [En82] J. Engels, F. Karsch, H. Satz, Finite size effects in Euclidian lattice thermodynamics for non-interacting Bose and Fermi systems, Nucl. Phys. **B205** [FS5] (1982) 239
- [En90] J. Engels, J. Fingberg, F. Karsch, D. Miller, M. Weber, Non-perturbative thermodynamics of SU(N) gauge theories, Phys. Lett. **B252** (1990) 625
- [Gei] K. Geiger, QCD based space-time description of high energy nuclear collisions, Nucl. Phys. **A566** (1994) 257
- [Gol] V. Goloviznin, H. Satz, The refractive properties of the gluon plasma in SU(2) gauge theory, Z. Phys. **C57** (1993) 671
- [Got] S. Gottlieb, A. Krasnitz, Thermodynamics of lattice QCD with two light quarks on a  $16^3 \times 8$  lattice, Phys. Rev. **D47** (1993) 3619
- [Gro] D. J. Gross, R. D. Pisarski, L. G. Yaffe, QCD and instantons at finite temperature, Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 43
- [Hab] H. E. Haber, H. A. Weldon, On the relativistic Bose-Einstein integrals, J. Math. Phys. **23** (1982) 1852
- [Kaj] K. Kajantie, J. Kapusta, Behaviour of gluons at high temperature, Ann. Phys. **160** (1985) 477
- [Kal] O. K. Kalashnikov, V. V. Klimov, Polarization operator in QCD at finite temperatures and densities, Sov. J. Nucl. Phys. **31**(5) (1980) 699

- [Ka92] B. Kämpfer, O. P. Pawlenko, Dilepton radiation from non-equilibrated parton matter produced in ultra-relativistic heavy-ion collisions, *Phys. Lett.* **B289** (1992) 127
- [Ka94a] B. Kämpfer, O. P. Pawlenko, Transverse momentum dependence of dileptons from parton matter produced in ultrarelativistic heavy-ion collisions, *Phys. Rev.* **C49** (1994) 2716
- [Ka94b] B. Kämpfer, B. Lukács, G. Paál, *Cosmic Phase Transitions*, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart-Leipzig (1994)
- [Kap79] J. I. Kapusta, *Quantum Chromodynamics at High Temperature*, *Nucl. Phys.* **B148** (1979) 461
- [Kap89] J. I. Kapusta, *Finite-Temperature Field Theory*, Cambridge University Press (1989)
- [LL2] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band II (Klassische Feldtheorie)*, Akademie-Verlag, Berlin (1989)
- [LL4] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band IV (Relativistische Quantentheorie)*, Akademie-Verlag, Berlin (1989)
- [LL5] L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band V (Statistische Physik 1)*, Akademie-Verlag, Berlin (1987)
- [Mas] M. A. Massoni (HELIOS/3 collaboration), Dimuon and vector-meson production in p-W and S-W interactions at 200 GeV/c/nucleon, *Nucl. Phys.* **A566** (1994) 95c
- [Mül] B. Müller, *The physics of the quark-gluon plasma*, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 225, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg (1985)
- [Pe1] A. Peshier, B. Kämpfer, G. Soff, Thermal masses in a strongly interacting gluon gas, *Contribution to the Annual Report '94 of the Research Center Rossendorf* (1994) 14,
- [Pe2] A. Peshier, B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, G. Soff, A new thermodynamical model of the quark-gluon plasma with non-perturbative thermal masses, *NATO ASI, Series B* (1994), Plenum Press, New York, (Ed.) J. Rafelski et al.
- [Pe3] A. Peshier, B. Kämpfer, O. P. Pavlenko, G. Soff, An effective model of the quark-gluon plasma with thermal parton masses, *Phys. Lett.* **B337** (1994) 235
- [Ris] D. H. Rischke, J. Schaffner, M. I. Gorenstein, A. Schäfer, H. Stöcker, W. Greiner, Quasi-confinement in the SU(3)-gluon plasma, *Z. Phys.* **C56** (1992) 325
- [Rot] H. J. Rothe, *Lattice Gauge Theory, An Introduction*, *World Scientific Lecture Notes in Physics - Vol. 43*, World Scientific Publishing Co., Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1992)

- [Rus] P. V. Ruuskanen, Electromagnetic probes of quark-gluon plasma in relativistic heavy-ion collisions, Nucl. Phys. **A544** (1992) 169c
- [Shu] E. Shuryak, Dilepton and photon production in the 'hot-gluon' scenario, Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 3270
- [Wel] H. A. Weldon, Effective fermion masses of order  $gT$  in high-temperature gauge theories with exact chiral invariance, Phys. Rev. **D26** (1982) 2789
- [Wil] K. G. Wilson, Confinement of quarks, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445

## Danksagung

Den Herren Prof. Gerhard Soff und Dr. Burkhard Kämpfer bin ich für die Vergabe und Betreuung des interessanten Forschungsthemas (allen bürokratischen Hindernissen zum Trotz) dankbar. Die Mitglieder der Arbeitsgruppe und des Institutes, insbesondere die Herren Dr. Christian Hofmann und Dr. Günter Plunien, sowie Herr Dr. Oleg P. Pavlenko, haben in Diskussionen und durch viele Anregungen zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen. Wichtige Hinweise zum Umgang mit den Computern gab Thomas Klotz. Bei Problemen bei der Erstellung der Arbeit in  $\text{\LaTeX}$  wußte Jörg Binder immer guten Rat.

Ihnen allen meinen herzlichen Dank!

## Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit unter der Betreuung von Herrn Prof. Soff und Herrn Dr. Kämpfer selbständig verfaßt habe. Alle angeführten Zitate wurden als solche kenntlich gemacht.