

FORSCHUNGSZENTRUM
ROSSENDORF e.V.

FZR

Archiv-Ex.:
FZR-108
September 1995

FZR 1995-108-C
FZR 1995-108-1

Bernd Michael Heide

**Ein Hybrid-Modell zur Untersuchung
von Stößen schwerer Ionen bei
mittleren Energien**

Forschungszentrum Rossendorf e.V.

Postfach 51 01 19 · D-01314 Dresden

Bundesrepublik Deutschland

Telefon (0351) 591 2744

Telefax (0351) 591 3700

E-Mail heide@fz-rossendorf.de

Ein Hybrid-Modell zur Untersuchung von Stößen schwerer Ionen bei mittleren Energien

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dresden

von

Dipl. Phys. Bernd Michael Heide

geboren am 11.09.1961 in Fürth

Gutachter: Prof. Dr. G. Soff
Dr. H.-W. Barz
Prof. Dr. H. Stöcker

Tag der Einreichung: 7.09.1995

Tag der Verteidigung: 21.12.1995

Vorsitzender der Promotionskommission: Prof. Dr. H. Freiesleben

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Das BUU-Modell	5
2.1	Ableitung der BUU-Gleichung	6
2.2	Die Parametrisierung der Wechselwirkung	13
2.2.1	Das Mean-Field-Potential	13
2.2.2	Der Wirkungsquerschnitt	18
2.3	Numerische Realisierung	19
2.3.1	Stoßfreie Propagation	19
2.3.2	Berechnung des Stoßterms	21
2.4	Verlauf der Dichteverteilungen	22
3	Das Kopenhagener Modell	27
3.1	Vektor einer Partition	28
3.2	Berechnung der Entropie	29
3.3	Erwartungswerte physikalischer Größen	34
3.4	Expansion des Fragmente-Systems	35
3.5	Abdampfung leichter Teilchen	35
3.6	Numerische Realisierung	37
4	Observable	43
4.1	Der Fluß der Kernmaterie	43
4.2	Die Reaktionsebene und die Flüsse	45
4.2.1	Energieflußtensor-Methode und Fluß-Form	46
4.2.2	Transversalimpulsanalyse und Fluß-Stärke	49
4.2.3	Zusammenhang zwischen Fluß-Form und Fluß-Stärke	50
4.3	Der sphärische und der radiale Fluß	52
4.4	Das Abstoppen	54
4.5	Die Massenverteilung der Fragmente	57
4.5.1	Die Massenverteilung und der Phasenübergang	58
4.5.2	Die Massenverteilung und die Entropie	62
4.5.3	Die Massenverteilung und die Bestimmung des Stoßparameters	63

4.6	Die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion	64
5	Das Hybrid-Modell	69
5.1	Erkenntnisse aus den Vorstufen-Modellen	70
5.1.1	Das Perkulations-Expansions Modell	71
5.1.2	Ein Hybrid-Modell mit einem speziellen Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung	75
5.2	Das Modell	82
5.2.1	Bestimmung der Massenzahl des fragmentierenden Systems	83
5.2.2	Extraktion der Phasenraumverteilung der Nukleonen . . .	83
5.2.3	Das Aufbruch-Volumen	86
5.2.4	Berechnung der Anregungsenergie	86
5.2.5	Bestimmung der Fragmente-Phasenraumverteilung	89
5.2.6	Bestimmung des Aufbruch-Zeitpunktes	89
5.2.7	Numerische Realisierung	93
5.2.8	Diskussion der Ergebnisse	95
6	Zusammenfassung und Ausblick	115
	Anhang	119
A	Beziehung zwischen den verschiedenen Flüssen	119
B	Berechnung der Parameter der Nukleonen-Phasenraumverteilung . .	120
C	Relativistische Transformation der Geschwindigkeiten	121
D	Relativistische Berechnung der Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Teilchen	122
E	Numerische Berechnung der C_2 -Funktion	123
	Literaturverzeichnis	127
	Abbildungsverzeichnis	135
	Tabellenverzeichnis	137
	Danksagung	139

Kapitel 1

Einleitung

Mit der Beschleunigung schwerer Ionen eröffnete sich die Möglichkeit, extrem komprimierte und erhitzte Kernmaterie im Labor zu studieren.

Experimente dieser Art wurden zuerst am BEVALAC-Beschleuniger in Berkeley (Lawrence Berkeley Laboratory) durchgeführt. Zur Zeit werden sie beispielsweise am GANIL in Caen (Grand Accélérateur National d'Ions Lourds), sowie am Schwerionen-Synchrotron in Darmstadt (Gesellschaft für Schwerionenforschung) betrieben.

Ein wichtiges Ziel hierbei ist die Bestimmung der nuklearen Zustandsgleichung (Kernzustandsgleichung, Equation of State, EOS), also der Beziehung zwischen den thermodynamischen Zustandsgrößen; wie beispielsweise der Abhängigkeit der inneren Energie von der Dichte und der Temperatur. Die nukleare Zustandsgleichung ist für das Verständnis der Kernmaterie von großer Bedeutung. Sie spielt darüber hinaus auch in der Astrophysik eine wesentliche Rolle; zum Beispiel bei der Beschreibung einer Supernova-Explosion und der damit verbundenen Bildung eines Neutronensternes. Allerdings ist zu bemerken, daß hier die Prozesse durch hohe Dichten ($\rho \approx 3\rho_0$, $\rho_0 =$ Grundzustandsdichte) und niedrige Temperaturen ($T \leq 10$ MeV) sowie kleine Entropien (Entropie pro Baryon $S/A \leq 1$) gekennzeichnet sind [Ain87], wohingegen in Schwerionenkollisionen Materie von hoher Dichte ($\rho = 2$ bis $4\rho_0$), hoher Temperatur ($T \leq 150$ MeV) und großen Entropien ($S/A \approx 2$ bis 5) erzeugt wird [Sto86].

Abschätzungen der Kernzustandsgleichung lassen vermuten, daß bei Schwerionenkollisionen ein Phasenübergang von hadronischer Materie in ein Quark-Gluon-Plasma erzielt werden kann. Es wäre demnach möglich, im Labor einen Zustand extremer Energiedichte zu erzeugen, der ähnlich sein dürfte zum Zustand des Universums kurz (einige Mikrosekunden) nach dem Urknall.

Neben dem Phasenübergang von hadronischer Materie zum Quark-Gluon-Plasma erwartet man noch zwei weitere hochinteressante Phasenübergänge während eines Schwerionenstoßes.

Bei hohen Dichten ($\rho = 3$ bis $6\rho_0$) und relativ niedrigen Temperaturen ($T \leq 60$ MeV) erwartet man z. B. die Bildung von Pionen-Kondensaten, d. h. von Schwin-

gungsstrukturen, die die Quantenzahlen des Pions tragen [Mig72, Wei76]. Bei kleinen Dichten ($\rho \leq \frac{1}{3}\rho_0$) und Temperaturen $T \leq 16$ MeV erwartet man schließlich einen flüssig-gasförmig Phasenübergang [Bon85a, Ber83, Gro93, Mos74, Pan84, Ran81, Sie83]. Dieser Phasenübergang konnte vor kurzem nahezu bestätigt werden [Poc95]. Im Zuge dieses Phasenüberganges kommt es zur Multifragmentation. Darunter versteht man den nahezu gleichzeitigen Aufbruch eines Stücks Kernmaterie in mehrere mittelschwere Fragmente (Intermediate Mass Fragments, IMFs), d. h. in Fragmente, deren Ladungszahl größer als zwei ist. Die Multifragmentation stellt neben der Spaltung und der Spallation einen neuen Zerfallsmodus dar.

Zu ihrer Untersuchung wurden eine Reihe von Methoden vorgeschlagen. So versuchte man aufgrund der Tatsache, daß der Aufbruchprozess der Kernmaterie auch skaleninvariante Eigenschaften besitzt, die Multifragmentation im Rahmen der fraktalen Geometrie zu analysieren. Speziell die Methode der Intermittenz (unter Intermittenz versteht man, daß eine physikalische Größe nichtstochastische Fluktuationen zeigt, die mit zunehmender Auflösung stärker werden) — sie wurde von Bialas und Peschanski [Bia86, Bia88] auf die Kernphysik übertragen — diente zur Analyse der Ladungsverteilung [DeA92, Gro93, Jaq92] oder z. B. auch der Geschwindigkeitsverteilung [Hei93]. Allerdings konnten bis heute noch keine substantiellen physikalischen Aussagen erzielt werden. Dies mag daran liegen, daß die nichtstochastischen Fluktuationen gegenüber der dominierenden Coulomb-Wechselwirkung zu schwach sind.

Erfolgreich sind hingegen statistische bzw. quantenstatistische Modelle. Sie kennen jedoch nicht die Vorgeschichte der angeregten Materie und können daher beispielsweise keine Aussagen über die Massenzahl, über das Aufbruchvolumen, über den Einfluß der kollektiven Nukleonenbewegung (Fluß der Kernmaterie) oder darüber treffen, ob es in der Kernmaterie zu einem Zwei- oder Drei-Quellenaufbruch kommt. Die Beschreibung der Kern-Kern-Kollision vom Anfangszustand, an dem die beiden Kerne getrennt vorliegen und aufeinander zufliegen, bis zu einer Zeit, nach der sich aus den zwei Kernen ein System entwickelt hat, welches kurz vor der Multifragmentation steht, kann aber gut mit dynamischen Modellen, wie etwa dem Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck (BUU) Modell oder dem Quanten-Molekular-Dynamik (QMD) Modell beschrieben werden¹. Für die Beschreibung einer mittlereenergetischen Schwerionenkollision bietet es sich daher an, ein dynamisches Modell mit einem statistischen Modell zu koppeln.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das BUU-Modell mit dem Kopenhagener Statistischen Multifragmentations-Modell zu einem Hybrid-Modell zu koppeln und im Rahmen dieses Modells $^{197}\text{Au} + ^{197}\text{Au}$ Reaktionen zu untersuchen, die

¹Das BUU-Modell ist nicht geeignet für die Beschreibung der Fragmentation. Dies wird im nächsten Kapitel näher erläutert. Das QMD-Modell hat gewisse Schwierigkeiten, die experimentelle Massenverteilung hinsichtlich mittlereenergetischer Schwerionenreaktionen zu reproduzieren (vergl. [Bow91, Pei89, Sou91]).

sich bei einer Strahlenergie zwischen 100 A·MeV und 250 A·MeV ereignen.

Hierfür ist es notwendig, mit Hilfe des BUU-Modells die Charakteristika des fragmentierenden Systems (Massenzahl, Anregungsenergie, Flußenergie, Drehimpuls, etc.) zu berechnen. Daher werden in Kapitel 2 die Grundzüge des BUU-Modells erläutert.

Des weiteren ist es notwendig, das Prinzip und die Wirkungsweise des Kopenhagener Modells darzulegen, da im Zuge des Zusammenkoppelns die Randbedingungen des Modells zu beachten und mehrere Modifikationen durchzuführen sind. Das Kopenhagener Modell wird in Kapitel 3 dargestellt.

In Kapitel 4 werden einige ausgewählte Observablen diskutiert. Es wird ausführlich auf den Fluß der Kernmaterie eingegangen, da dieser für das Verständnis mittelergetischer Schwerionenstöße von zentraler Bedeutung ist. Hinsichtlich des Hybrid-Modells wird der sphärische und der radiale Fluß eingeführt. Weiterhin wird das Abstopvermögen der Kernmaterie in Verbindung mit dem BUU-Modell besprochen. Eine sehr wichtige Größe, insbesondere in bezug auf den flüssig-gasförmig Phasenübergang sowie im Hinblick auf das Kopenhagener Modell, ist die Massenverteilung der Fragmente. Sie wird ebenfalls ausführlich diskutiert. Bei der Formulierung des Hybrid-Modells spielt die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion eine zentrale Rolle. Deshalb wird auch sie eingehend erläutert.

Mit Hilfe der Kenntnisse aus den vorhergehenden Kapiteln wird schließlich in Kapitel 5 das Hybrid-Modell formuliert. Weiterhin werden die mit dem Hybrid-Modell gewonnenen Ergebnisse diskutiert.

Abschließend werden in Kapitel 6 eine Zusammenfassung der Arbeit und Anregungen hinsichtlich weiterer Studien gegeben.

Kapitel 2

Das BUU-Modell

Die Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck (BUU) Theorie dient zur Beschreibung der Nichtgleichgewichtsdynamik endlicher Fermionensysteme. Sie kommt bei mittlere-energetischen ($15 \text{ MeV/Nukleon} \leq \text{Strahlenergie} \leq 250 \text{ MeV/Nukleon}$) Schwerionenreaktionen zum Tragen, da hier der Relativimpuls pro Nukleon vergleichbar mit dem Fermi-Impuls ($p_F \approx 1.36 \text{ fm}^{-1}$) wird und daher das Pauli-Prinzip, welches bei niedrigen Strahlenergien für große mittlere freie Weglängen sorgt, an Bedeutung verliert. Deshalb wird die Reaktionsdynamik sowohl von der, bei niedrigen Laborenergien dominanten mittleren Felddynamik als auch durch die, bei relativistischen Strahlenergien relevanten, Nukleon-Nukleon-Stöße bestimmt. Dieser Sachverhalt manifestiert sich in einer Integro-Differentialgleichung für die Wigner-Transformierte der Einteilchendichte des Vielkernsystems: der BUU-Gleichung. Sie besteht aus einem Vlasov-Term, er beschreibt die Einteilchenbewegung im zeitabhängigen mittleren Feld (eine Domäne im Niederenergiebereich), und einem Stoßterm — er trägt den sequentiellen Nukleon-Nukleon-Kollisionen Rechnung, welche bei höheren Energien wichtig werden.

In der Literatur sind auch andere Namen für die BUU-Gleichung gebräuchlich. So bezeichnet man sie auch als Vlasov-Uehling-Uhlenbeck-Gleichung, Landau-Vlasov-Gleichung oder nur als Uehling-Uhlenbeck-Gleichung.

Die BUU-Gleichung ist die quantenmechanische Erweiterung der klassischen Boltzmann-Transportgleichung. Diese Erweiterung auf die Teilchen der „Neuen Statistik“ (worunter man damals Bosonen und Fermionen zusammenfaßte) wurde zuerst von L. W. Nordheim 1928 angegeben [Nor28] und phänomenologisch begründet. E. A. Uehling und G. E. Uhlenbeck verwendeten die von Nordheim angegebene Gleichung dann weiter, um Transportmechanismen in Gasen zu untersuchen [UeU33].

Die quantenmechanische Herleitung der BUU-Gleichung gelang R. F. Snider 1960 [Sni60]. Eine Verallgemeinerung dieser Herleitung auf Systeme mit gebundenen Zuständen wurde 1981 von Y. L. Klimontorovich und D. Kremp publiziert [Kli81]. P. Danielewicz konnte, ausgehend von den Kadanoff-Baym'schen Bewegungsgleichungen für Greensche Funktionen, eine quantenfeldtheoretische Begründung der

Boltzmann-Gleichung angeben [Dan84]. Im Rahmen seiner Habilitationsschrift stellte W. Cassing unter Einführung von Korrelationsfunktionen eine physikalisch sehr transparente und dem Mittelenergiebereich adäquate Ableitung der BUU-Gleichung vor [Cas86]. Dieser Ableitung wird im nächsten Abschnitt über weite Strecken gefolgt.

2.1 Quantenmechanische Ableitung der BUU-Gleichung

Zunächst stellt sich natürlich die Frage, ob die quantenmechanische Beschreibung ausreichend ist oder ob sie nicht doch einer relativistischen Erweiterung bedarf.

Bei der BUU-Theorie kommt es auf die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung an, d. h. genauer auf das mittlere, dichteabhängige Potential und auf die Nukleon-Nukleon-Stöße. Die Lorentz-Kontraktion der Teilchendichte wirkt sich für Strahlenergien um die 250 A·MeV nicht sonderlich auf das Mean-Field-Potential aus und auch der inelastische Streukanal ist bei dieser Laborenergie noch stark unterdrückt (vergl. z. B. [Ber88]), sodaß die nichtrelativistische quantenmechanische Beschreibung angemessen scheint. Dies hat zudem den Vorteil, daß die numerischen Studien weniger Rechenzeit benötigen. Denn bei einer vollständig kovarianten Erweiterung besteht das Mean-Field-Potential für ein Nukleon aus einem abstoßenden und einem, davon unabhängigen, anziehenden Anteil ($\sigma\omega$ -Modell), wodurch der statistische Fehler bzgl. des Mean-Field-Potentials größer wird als bei dem nichtrelativistischen quantenmechanischen Transportmodell, bei dem nur ein Mean-Field-Potential verwendet wird. Die statistischen Fluktuationen können durch eine größere (im Vergleich zum nichtrelativistischen Fall) Testteilchenzahl reduziert werden [Koc91]. Eine größere Testteilchenzahl bedingt jedoch mehr Rechenzeit.

Ausgangspunkt für die Beschreibung einer statistischen Gesamtheit aus N Nukleonen ist die N -Teilchen-Dichtematrix ρ_N im Schrödinger-Bild. Sie ist definiert durch:

$$\rho_N(x_1, \dots, x_N; x'_1, \dots, x'_N; t) := \begin{cases} \Psi^*(x_1, \dots, x_N; t) \Psi(x'_1, \dots, x'_N; t), \\ \text{für einen reinen Zustand,} \\ \\ \sum_{\alpha} \Psi_{\alpha}^*(x_1, \dots, x_N; t) w_{\alpha} \Psi_{\alpha}(x'_1, \dots, x'_N; t), \\ \text{für einen gemischten Zustand.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Die Koordinate $x_i := (\vec{r}_i, s_i, \tau_i)$ beinhaltet die Orts-, Spin- und Isospin-Freiheitsgrade von Teilchen i und w_{α} ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich das System im „Zustand“ Ψ_{α} befindet. Das Kern-Kern-System kann beispielsweise durch einen reinen Zustand beschrieben werden, wenn die Kerne aufeinander zufliegen. Während eines starken Wechselwirkungsprozesses werden sehr

viele Freiheitsgrade angeregt. Da diese nicht alle explizit berücksichtigt werden können, beschreibt man das System in einem Unterraum relevanter Freiheitsgrade durch einen gemischten Zustand, d. h. durch ein inkohärentes Gemisch von reinen Zuständen (welche zu diesem Unterraum gehören).

Die Gleichung für die zeitliche Entwicklung der Dichtematrix ist die von-Neumann-Gleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_N = [H, \rho_N]. \quad (2.2)$$

Mit H wurde der Hamilton-Operator abgekürzt. Er wird im folgenden durch

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_N} \sum_{i=1}^N \Delta_{r_i} + \sum_{j>i=1}^{N-1} V(x_i, x_j) \quad (2.3)$$

angenähert. Hierbei steht m_N für die Nukleonenmasse und V für den Zwei-Teilchen-Wechselwirkungsoperator. Auf Grund der im allgemeinen enormen Komplexität des N -Teilchen-Problems ist eine direkte Lösung der von-Neumann-Gleichung nicht möglich. Man kann aber die von-Neumann-Gleichung gewissermaßen „strukturieren“ und dann ein geeignetes Näherungsverfahren angeben. Das Strukturieren gelingt, in dem man sukzessive die von-Neumann-Gleichung über $(N-n)$ Teilchen absputzt, wobei man sogenannte „reduzierte“ Dichtematrizen einführt. Die reduzierte Dichtematrix der Ordnung n ist definiert als Spur von ρ_N über die verbleibenden $(N-n)$ Teilchen:

$$\rho_n := \frac{1}{(N-n)!} \text{Tr}_{(n+1, \dots, N)} \{ \rho_N \} \quad (2.4)$$

$$= \frac{1}{(N-n)!} \int dx_{n+1} \dots dx_N \times \rho_N(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_N; x'_1, \dots, x'_n, x_{n+1}, \dots, x_N; t), \quad (2.5)$$

mit $\int dx := \sum_{s, \tau} \int d^3r$.

Man erhält eine Hierarchie von Gleichungen, die unter dem Namen Martin-Schwinger-Hierarchie¹ bekannt ist:

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\rho}_1 &= \left[\frac{-\hbar^2}{2m_N} \Delta_{r_1}, \rho_1 \right] + \text{Tr}_{(2)} \{ [V(12), \rho_2] \}, \\ i\hbar \dot{\rho}_2 &= \left[\frac{-\hbar^2}{2m_N} (\Delta_{r_1} + \Delta_{r_2}), \rho_2 \right] + [V(12), \rho_2] + \text{Tr}_{(3)} \{ [V(13) + V(23), \rho_3] \}, \\ &\vdots \\ i\hbar \dot{\rho}_N &= [H_N, \rho_N]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

¹Sie ist das quantenmechanische Analogon zur klass. Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon (BBGKY) Hierarchie.

Um den Schreibaufwand etwas zu reduzieren wurde hier die Koordinate „ x_k “ mit „ k “ abgekürzt. Diese Hierarchie bietet nun die Basis für eine Näherungslösung des N -Teilchenproblems. Unter Näherungslösung versteht man das Abbrechen der Hierarchie durch Vernachlässigung von Terme höherer Ordnung als n . Die einfachste Lösung wäre, $\rho_{n+1} = 0$ zu setzen. Diese Näherung ist jedoch zu grob. Denn die dominanten Terme in ρ_{n+1} sind Produkte der Einteilchen-Dichtematrizen $\rho_1(i, j')$, deren Zeitentwicklung bereits durch die Gleichungen niedrigerer Ordnung beschrieben wird. Somit würde man, sozusagen, zuviel an Kopplung vernachlässigen.

Um nun wenigstens möglich an Kopplung zu vernachlässigen, schlugen S. J. Wang und W. Cassing vor [Wan85], alle symmetrisierten bzw. antisymmetrisierten Produkte von Dichtematrizen niedrigerer Ordnung als n von ρ_n abzuspalten und explizit zu berücksichtigen. Dies gelingt durch Einführen der Korrelationsfunktion c_n . Sie ist definiert als,

$$c_n := \rho_n - A_n S_n \sum_{i=1}^{n-1} \rho_{n-i} c_i. \quad (2.7)$$

Hierbei steht S_n für den Symmetrisierungsoperator, er symmetrisiert hinsichtlich aller Koordinatenpaare (ii') und (jj') , und A_n für den Antisymmetrisierungsoperator — er antisymmetrisiert bzgl. der Vertauschung zweier Koordinaten i' und j' . Die zwei niedrigsten Korrelationsfunktionen lauten beispielsweise,

$$c_1(11') = \rho_1(11') \equiv \rho(11') \quad (2.8)$$

$$c_2(12, 1'2') = \rho_2(12, 1'2') - \rho_{2_0}(12, 1'2'). \quad (2.9)$$

Dabei ist ρ_{2_0} die unkorrelierte Zweiteilchendichtematrix,

$$\rho_{2_0}(12, 1'2') = \{\rho(11')\rho(22') - \rho(12')\rho(21')\}. \quad (2.10)$$

Nach Einsetzen der Korrelationsfunktionen in die Hierarchie (2.6), gelangt man zu einem gekoppelten Gleichungssystem für die Korrelationsfunktionen. Da für die Herleitung der BUU-Gleichung, eine Gleichung für die Einteilchendichte, nur Terme der Ordnung $n \leq 2$ von Interesse sind, wird die explizite Form der niedrigsten beiden Terme angegeben:

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{\rho}(11') = & \left[\frac{-\hbar^2}{2m_N} \Delta_{r_1}, \rho(11') \right] + \\ & Tr_{(2)}\{[V(12), \rho(11')\rho(22) - \rho(12)\rho(21')]\} + \\ & Tr_{(2)}\{[V(12), c_2(12, 1'2)]\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

und

$$\begin{aligned}
i\hbar\dot{c}_2(12, 1'2') = & \left[\frac{-\hbar^2}{2m_N} (\Delta_{r_1} + \Delta_{r_2}) + V(12), c_2 \right] + \\
& [V(12), \rho(11')\rho(22') - \rho(12')\rho(21')] + \\
& Tr_{(3)} \{ -(V(13) - V(1'3))\rho(11')\rho(32')\rho(23') \\
& \quad - (V(23) - V(2'3))\rho(22')\rho(31')\rho(13') \\
& \quad + (V(13) - V(2'3))\rho(12')\rho(31')\rho(23') \\
& \quad + (V(23) - V(1'3))\rho(32')\rho(13')\rho(21') \}_{3=3'} + \\
& Tr_{(3)} \{ (V(13) - V(1'3)) \times [\rho(11')c_2(23, 2'3') \\
& \quad - \rho(13)c_2(23, 2'1') - \rho(23')c_2(13, 1'2') \\
& \quad + \rho(33)c_2(12, 1'2') - \rho(31')c_2(12, 3'2') \\
& \quad - \rho(32')c_2(12, 1'3')] \\
& \quad + (V(23) - V(2'3)) \times [-\rho(13')c_2(23, 2'1') \\
& \quad + \rho(22')c_2(13, 1'3') - \rho(23')c_2(13, 1'2') \\
& \quad + \rho(33')c_2(12, 1'2') - \rho(31')c_2(12, 3'2') \\
& \quad - \rho(32')c_2(12, 1'3')] \\
& \quad - (V(23) - V(1'3))\rho(21')c_2(13, 2'3') \\
& \quad - (V(13) - V(2'3))\rho(12')c_2(23, 1'3') \}_{3=3'} + \\
& Tr_{(3)} \{ [V(13) + V(23), c_3(123, 1'2'3')] \}_{3=3'}. \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Mit der Näherung $c_3(t) = 0$ — welche gegenüber $\rho_3(t) = 0$ weit weniger restriktiv ist — sind beide Gleichungen geschlossen und könnten im Prinzip numerisch gelöst werden, wodurch man eine Lösung bekäme, die über die BUU-Gleichung hinaus ginge. Der numerische Aufwand liegt jedoch gegenwärtig noch weit außerhalb der technischen Möglichkeiten, sodaß man aus praktischen Gründen eine weitere Näherung einführt, indem man alle Terme mit $V \cdot c_2$ in Gl. (2.12) vernachlässigt, d. h. c_2 wird in 1. Bornscher Näherung berechnet. Damit hat man die Zeitentwicklung der Einteilchendichtematrix auf die zweite Ordnung in $V(x_1, x_2)$ beschränkt. Die Näherung ist für Systeme gültig, bei denen die mittlere freie Weglänge λ der Teilchen groß ist im Vergleich zu ihrem mittleren Abstand d . Dies ist für mittlere Kern-Kern-Stöße in etwa erfüllt, da hier die maximale Nukleonendichte nicht das Zweifache der normalen Kerndichte überschreitet, wodurch d einen Wert von ca. 1.5 fm besitzt, wohingegen λ , aufgrund des Pauli-Prinzips, erheblich größer als 2 fm sein sollte [Ber78].

Mit den Näherungen $c_3 = V c_2 = 0$ kann Gl. (2.12) analytisch integriert werden. Hierbei wird über die Spin- und Isospinkoordinaten gemittelt und ausgenutzt, daß die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung translations- und rotationsinvariant ist: $V(\vec{r}, \vec{r}') = V(|\vec{r} - \vec{r}'|)$. Der Ausdruck für c_2 wird sodann in die Gleichung (2.11) eingesetzt. Um eine einfache physikalische Interpretation zu

erzielen, schreibt man das Resultat vermöge der zur Wigner-Transformation,

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \int d^3R e^{-i\vec{p} \cdot \vec{R}/\hbar} \rho(\vec{r} + \frac{\vec{R}}{2}, \vec{r} - \frac{\vec{R}}{2}, t) \quad (2.13)$$

inversen Transformation,

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}', t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3Q e^{i\vec{Q} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')/\hbar} f(\frac{\vec{r} + \vec{r}'}{2}, \vec{Q}, t) \quad (2.14)$$

auf die Wigner-Transformierte der Einteilchendichte um:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, \vec{p}, t) + \frac{1}{m_N} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f(\vec{r}, \vec{p}, t) - \frac{i}{\hbar} \int d^3q e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar} \times \\ & U(\vec{q}, t) \left[f(\vec{r}, \vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, t) - f(\vec{r}, \vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, t) \right] = \\ & \frac{-4i}{\hbar(2\pi\hbar)^{16}} \int \int \int \int d^3q_1 d^3q_2 d^3q'_1 d^3q'_2 \int d\omega \int dt' \times \\ & V(\vec{q}_2 - \vec{q}'_2) e^{i(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}'_1 - \vec{q}'_2) \cdot \vec{r}/\hbar - i\omega(t-t')} \times \\ & \left[\hbar\omega - \frac{1}{2m_N} (q_1^2 + q_2^2 - q_1'^2 - q_2'^2) + i\varepsilon \right]^{-1} \times \\ & \left[\delta^3(\vec{p} - \frac{\vec{q}_1 + \vec{q}'_1 + \vec{q}_2 - \vec{q}'_2}{2}) - \delta^3(\vec{p} - \frac{\vec{q}_1 + \vec{q}'_1 - \vec{q}_2 + \vec{q}'_2}{2}) \right] \cdot [\dots] . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Der Wert $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ der Wigner-Funktion f ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit dafür, zur Zeit t ein Teilchen innerhalb eines Volumenelementes d^3r um \vec{r} zu finden, dessen Impuls innerhalb eines Volumenelementes d^3p um \vec{p} liegt. Hierzu ist zu bemerken, daß eigentlich nur dann von einer Wahrscheinlichkeit gesprochen werden kann, wenn die Wigner-Funktion über ein Phasenraumvolumen der Größe $(2\pi\hbar)^3$, was dem klassischen Phasenraumvolumen eines Nukleons entspricht, gemittelt wird. Denn dann verschwinden die folgenden, auf Grund der Unschärferelation erlaubten, quantenmechanischen Eigenschaften der Wigner-Funktion: negative Funktionswerte, Funktionswerte größer 1, Oszillationen in Ort und Impuls. In der obigen Gleichung bezeichnen $V(\vec{q})$, $U(\vec{q}, t)$ die Fourier-Transformierten² der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, sowie des Hartree-Feldes

$$U(\vec{r}, t) = Tr_{(2)}\{V(\vec{r}, \vec{r}_2)\rho(\vec{r}_2, \vec{r}_2, t)\} . \quad (2.16)$$

Der mit [...] abgekürzte Faktor beinhaltet Integrationen der Form,

²Zur Vereinfachung der Notation werden die Fourier-Transformierten mit dem selben Symbol bezeichnet: $A(\vec{q}) = \int d^3r \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{r}/\hbar) A(\vec{r})$.

$$\begin{aligned}
& \int \int d^3q d^3Q \int \int \int d^3R_1 d^3R_2 d^3R_3 V(\vec{q}) \times \\
& e^{-i(\vec{q}_i \pm \vec{q}'_j \pm \vec{q}) \cdot \vec{R}_1 + i(\vec{q}_i \pm \vec{q}'_j \pm 2\vec{Q}) \cdot \vec{R}_2 \pm i(\vec{q}_i \pm \vec{q}'_j + \vec{q} \pm 2\vec{Q}) \cdot \vec{R}_3} \times \\
& \left[f(\vec{R}_1, \frac{\vec{q}_i \pm \vec{q}'_j \pm \vec{q}}{2}, t') - f(\vec{R}_1, \frac{\vec{q}_i \pm \vec{q}'_j \pm \vec{q}}{2}, t) \right] f(\vec{R}_2, \vec{Q}, t') f(\vec{R}_3, \frac{\vec{q}_i \pm \vec{q}'_j \pm \vec{q} \pm 2\vec{Q}}{2}, t'). \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Ausgeschrieben würde er mehr als eine Seite in Anspruch nehmen, weshalb auf eine explizite Darstellung verzichtet wurde³.

Im nächsten Schritt wird auf der linken Seite $f(\vec{r}, \vec{p} \pm \vec{q}/2, t)$ bis zur zweiten Ordnung in \vec{q} entwickelt und die rechte Seite unter einem Kollisionsterm $I(\vec{r}, \vec{p}, t)$ zusammengefaßt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m_N} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_r - \vec{\nabla}_r U(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}_p \right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) = I(\vec{r}, \vec{p}, t). \quad (2.18)$$

Für $I(\vec{r}, \vec{p}, t) = 0$ stellt Gleichung (2.18) die Vlasov-Gleichung dar. Die Vlasov-Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung der Einteilchendichte ohne die Einbeziehung von Nukleon-Nukleon-Kollisionen. Quantenmechanische Phänomene wie Durchtunneln einer Barriere oder Diffraktionseigenschaften sind infolge der Entwicklung von f verloren gegangen. Der Kollisionsterm kann beträchtlich vereinfacht werden, in dem man die Wigner-Funktion durch eine über ein Volumen ΔV gemittelte Phasenraumdichte,

$$\bar{f}(\vec{r}, \vec{p}, t) := \frac{1}{\Delta V} \int d^3r' f(\vec{r}', \vec{p}, t) e^{-\frac{(\vec{r}' - \vec{r})^2}{2\sigma^2}} \quad (2.19)$$

mit

$$\Delta V = (\sigma \sqrt{2\pi})^3 \quad (2.20)$$

ersetzt. Die Breite σ der Normalverteilung wird meist zu $\sigma \geq 2$ fm gewählt, wodurch \bar{f} zu einer „sanften“ Funktion der Variablen \vec{r} , \vec{p} und t wird. Die Einführung einer gemittelten Phasenraumdichte scheint vernünftig, da die genaue Ortsinformation in der Reaktionszone experimentell nicht nachprüfbar ist. Im Prinzip erfordert eine Mittelung über ein Ortsvolumen natürlich auch eine Mittelung über ein Volumen ΔV_p im Impulsraum. Jedoch wird nachfolgend der klassische Limes, $(2\pi\hbar)^3 = \Delta V_p \Delta V$, betrachtet, wodurch auf Grund des relativ großen Ortsvolumens auf eine Mittelung im Impulsraum verzichtet werden kann. Nach einer längeren Rechnung ergibt sich für den Kollisionsterm,

³Der Term steht ausführlich in Referenz [Cas86].

$$\begin{aligned}
I(\vec{r}, \vec{p}, t) = & \frac{4}{\hbar(2\pi\hbar)^6} \int \int \int d^3 q_2 d^3 q'_1 d^3 q'_2 \times \\
& \{V(\vec{q}'_2 - \vec{q}_2) - V(\vec{q}'_2 - \vec{q}'_1)/4\} V(\vec{q}_2 - \vec{q}'_2) \delta^3(\vec{p} + \vec{q}_2 - \vec{q}'_1 - \vec{q}'_2) \times \\
& \int_{-\infty}^t dt' 2 \cos\left(\frac{1}{2m_N}(t-t')(p^2 + q_2^2 - q_1'^2 - q_2'^2)\right) \times \\
& \{\bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_1, t') \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_2, t') [1 - \bar{f}(\vec{r}, \vec{p}, t')] [1 - \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}_2, t')] - \\
& \bar{f}(\vec{r}, \vec{p}, t') \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}_2, t') [1 - \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_1, t')] [1 - \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_2, t')]\}. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Als nächstes ersetzt man $\{V(\vec{q}'_2 - \vec{q}_2) - V(\vec{q}'_2 - \vec{q}'_1)/4\} V(\vec{q}_2 - \vec{q}'_2)$ in 1. Born'scher Näherung durch den differentiellen Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitt:

$$\{V(\vec{q}'_2 - \vec{q}_2) - V(\vec{q}'_2 - \vec{q}'_1)/4\} V(\vec{q}_2 - \vec{q}'_2) \approx |V(\vec{q}_2 - \vec{q}'_2)|^2 = \frac{16\pi^2 \hbar^4}{m_N^2} \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (2.22)$$

wobei Ω den Streuwinkel zwischen den Vektoren \vec{q}_2 und \vec{q}'_2 im Schwerpunktsystem des Nukleon-Nukleon-Systems bezeichnet. Diese Näherung stellt den wichtigsten Schritt für eine praktische Lösung des Kollisionsterms dar. Sie ist mit den, hinsichtlich der Gleichung (2.12) getroffenen Näherungen konsistent.

Zu guter Letzt nimmt man an, daß \bar{f} eine schwach veränderliche Funktion der Zeit ist. Dies ermöglicht es, allein die Kosinusfunktion über t' zu integrieren. Die Integration führt (für große Zeiten) auf eine δ -Funktion in den Einteilchenenergien, weshalb nur on-shell-Prozesse berücksichtigt werden — im Einklang mit der Näherung (2.22).

Damit ist die (quantenmechanische) Form des Kollisionsterms bestimmt. Mit ihm lautet Gl. (2.18),

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m_N} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_r - \vec{\nabla}_r U(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}_p\right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \\
\frac{4}{2\pi^3 \hbar^3 m_N^2} \int \int \int d^3 q_2 d^3 q'_1 d^3 q'_2 \times \\
\delta\left(\frac{1}{2m_N}[p^2 + q_2^2 - q_1'^2 - q_2'^2]\right) \delta^3(\vec{p} + \vec{q}_2 - \vec{q}'_1 - \vec{q}'_2) \frac{d\sigma}{d\Omega} \times \\
\{\bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_1, t) \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_2, t) [1 - \bar{f}(\vec{r}, \vec{p}, t)] [1 - \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}_2, t)] - \\
\bar{f}(\vec{r}, \vec{p}, t) \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}_2, t) [1 - \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_1, t)] [1 - \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_2, t)]\}. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Dies ist die gesuchte BUU-Gleichung. Sie beschreibt den Gewinn und Verlust an Phasenraumdichte in der Zeit vermöge unabhängiger Nukleon-Nukleon-Stöße, die dem Pauli-Prinzip genügen. Die Faktoren, die den Gewinn charakterisieren, sind $\delta\left(\frac{1}{2m_N}[p^2 + q_2^2 - q_1'^2 - q_2'^2]\right) \delta^3(\vec{p} + \vec{q}_2 - \vec{q}'_1 - \vec{q}'_2) \frac{d\sigma}{d\Omega} \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_1, t) \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_2, t)$. Die δ -Funktionen sichern die Energie- und Impulserhaltung. Das Produkt aus den

δ -Funktionen und dem Wirkungsquerschnitt ist proportional zur Wahrscheinlichkeit dafür, daß Teilchen mit den Impulsen \vec{q}'_1 und \vec{q}'_2 nach dem Stoß die Impulse \vec{p} und \vec{q}_2 besitzen. Multipliziert man dieses Produkt mit der Zweiteilchenphasenraumdichte $f_2 = \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_1, t) \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}'_2, t)$ dafür, überhaupt im Volumenelement um \vec{r} ein Teilchen mit dem Impuls \vec{q}'_1 und ein anderes mit dem Impuls \vec{q}'_2 zu finden, so erhält man den Gewinn an Phasenraumdichte.

Analoges gilt für den Verlust an Phasenraumdichte. Er wird durch den Term $\delta(\frac{1}{2m_N}[p^2 + q_2^2 - q_1'^2 - q_2'^2]) \delta^3(\vec{p} + \vec{q}_2 - \vec{q}'_1 - \vec{q}'_2) \frac{d\sigma}{d\Omega} \bar{f}(\vec{r}, \vec{p}, t) \bar{f}(\vec{r}, \vec{q}_2, t)$ beschrieben. Zu beachten ist, daß die Phasenraumdichte für zwei Teilchen als Produkt der Einteilchenphasenraumdichten dargestellt wird. Das Produkt impliziert, daß die Korrelationen (in den Impulsen und damit auch in den Orten) zwischen zwei Teilchen vernachlässigt werden, wodurch insbesondere eine mögliche Bindung zwischen den Teilchen nicht mehr beschrieben werden kann. Somit ist es mit Gl. (2.23) prinzipiell nicht möglich, die Fragmentation von Kernmaterie zu beschreiben.

Der wesentliche Unterschied zwischen der BUU-Gleichung und der klassischen Boltzmannschen Transportgleichung besteht in den Pauli-Blocking Faktoren $[1 - \bar{f}(\dots)]$. Ein Blocking Faktor reduziert die Stoßwahrscheinlichkeit in dem Maße, wie die entsprechende Phasenraumzelle besetzt ist.

Die obere Grenze in der Strahlenergie wurde bereits zu Beginn dieses Abschnittes diskutiert. Die untere Grenze von 15 A-MeV liegt darin begründet, daß in diesem Energiebereich, in bezug auf den Kollisionsterm, das Nukleonen-System nicht mehr näherungsweise als freies Fermi-Gas beschrieben werden kann. In diesem Energiebereich wird der Einfluß der Kernstruktur wichtig.

2.2 Die Parametrisierung der Wechselwirkung

In der BUU-Theorie berücksichtigt man die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung in Form des Mean-Field-Potentials und der Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitte. Die Bestimmung dieser Größen wird nun nachfolgend diskutiert.

2.2.1 Das Mean-Field-Potential

Um den Ausdruck für das im Vlasov-Teil auftretende Mean-Field-Potential U möglichst realistisch aber dennoch praktikabel zu nähern, geht man nicht von der nackten Wechselwirkung V , sondern von einer Skyrme-Parameterisierung der effektiven Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung⁴ (vergl. [Idi94, Rin80]) aus:

$$V_S = \sum_{i < j} V_S^{(2)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \quad (2.24)$$

⁴Bei einer fundamentaleren Betrachtung wird die effektive Wechselwirkung mit der Brückner-Theorie berechnet. Hier ergeben sich allerdings Schwierigkeiten in der numerischen Umsetzung und hinsichtlich dem Auffinden geeigneter experimenteller Daten.

Die Zweiteilchenwechselwirkung $V_S^{(2)}$ besteht aus einer reinen δ -Wechselwirkung mit Spinaustausch (erste Zeile), einem kurzreichweitigen attraktiven Anteil (zweite Zeile), einem Anteil für die Spin-Bahn-Wechselwirkung (dritte Zeile) und einem dichteabhängigen repulsiven Anteil (vierte Zeile; er verhindert, daß die Kernmaterie kollabiert),

$$\begin{aligned} V_S^{(2)}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) &= t_0 (1 + x_0 P^\sigma) \delta^3(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \\ &+ \frac{1}{2} t_1 \left[\delta^3(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \vec{k}^2 + \vec{k}^2 \delta^3(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \right] + t_2 \vec{k}^\dagger \delta^3(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \vec{k} \\ &+ i W_0 (\vec{\sigma}_i + \vec{\sigma}_j) \vec{k} \times \delta^3(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \vec{k} \\ &+ \frac{1}{6} t_3 \delta^3(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \rho^\gamma(\vec{r}_i), \end{aligned} \quad (2.25)$$

wobei \vec{k} der Operator des Relativimpulses,

$$\vec{k} := \frac{1}{2i} (\vec{\nabla}_i - \vec{\nabla}_j) \quad (2.26)$$

und P^σ der Spinaustauschoperator ist. Der Vektor $\vec{\sigma}$ ist ein Pseudovektor, in dessen Komponenten die Paulischen Spinmatrizen stehen. Mit $t_0, t_1, t_2, t_3, \gamma, x_0$ und W_0 werden konstante Terme bezeichnet. Wie im weiteren Verlauf gezeigt wird, genügen drei von ihnen (d. h. t_0, t_3 und γ), um das Mean-Field-Potential festzulegen.

Zur Vereinfachung wird nun das Nukleonensystem als spin- und isospingesättigt angesehen und die Spinwechselwirkung vernachlässigt.

Mit der Skyrme-Wechselwirkung und dem Operator T der kinetischen Energie erhält man für den Erwartungswert E der Gesamtenergie,

$$\begin{aligned} E &= \langle \Psi | T + V_S | \Psi \rangle \\ &= \int h(\vec{r}) d^3r. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die Schreibweise als Integral über eine Energiedichte h ist auf Grund der δ -artigen Kraft möglich. Für h gilt:

$$\begin{aligned} h(\vec{r}) &= \frac{\hbar^2}{2m_N} \tau(\vec{r}) + \frac{3}{8} t_0 \rho^2 + \frac{1}{16} t_3 \rho^{1+\gamma} + \frac{1}{16} (3t_1 + 5t_2) \rho \tau + \\ &\frac{1}{64} (9t_1 - 5t_2) (\vec{\nabla} \rho)^2, \end{aligned} \quad (2.28)$$

mit der kinetischen Energiedichte τ

$$\tau(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N |\vec{\nabla} \phi_i(\vec{r})|^2 \quad (2.29)$$

und der Nukleonendichte ρ

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N |\phi_i(\vec{r})|^2. \quad (2.30)$$

Die ϕ_i sind hierbei die (normalisierten) Einteilchenwellenfunktionen der Slaterdeterminante Ψ . Sie genügen der Schrödinger-Gleichung, die man durch Variation des Funktionals (2.27) nach den ϕ_i erhält:

$$\left(-\vec{\nabla} \frac{\hbar^2}{2m^*} \vec{\nabla} + U(\vec{r})\right) \phi_i(\vec{r}) = \varepsilon_i \phi_i(\vec{r}), \quad (2.31)$$

mit dem Mean-Field Potential

$$U(\vec{r}) = \frac{\partial h}{\partial \rho} \quad (2.32)$$

und der effektiven Masse

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial \tau} \right)^{-1}. \quad (2.33)$$

Mit der Beschränkung auf kleine Relativimpulse wird nun in Gleichung (2.28) der Term $\sim \rho \tau$ vernachlässigt. Weiterhin wird die Kernmaterie als unendlich ausgedehnt angenommen, wodurch der Term $\sim (\vec{\nabla} \rho)^2$ wegfällt ($(\vec{\nabla} \rho)^2$ liefert nur an der Kernoberfläche einen von Null verschiedenen Beitrag). Für unendlich ausgedehnte Kernmaterie sind die ϕ_i ebene Wellen. Nach dem Fermigas-Modell ergibt sich dann:

$$\tau = \frac{3}{5} k_F^2 \rho, \quad (2.34)$$

$$\rho = \frac{2}{3\pi^2} k_F^3, \quad (2.35)$$

wobei k_F der Betrag des Fermi-Impulses ist. Der Zusammenhang zwischen ρ und τ lautet somit:

$$\tau = \frac{3}{5} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \rho^{5/3}. \quad (2.36)$$

Mit den Näherungen und unter Verwendung der Beziehung (2.36) erhält man nun für Gl. (2.28),

$$h = a \rho^{5/3} + b \rho^2 + c \rho^{1+\gamma}. \quad (2.37)$$

Mit a, b, c wurden konstante Terme abgekürzt. Wegen $\vec{\nabla} \rho = \vec{0}$, $\forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3$ kann der Ausdruck (2.37) leicht über den Ort integriert werden und man erhält für die Gesamtenergie pro Nukleon,

$$\begin{aligned} E/A &= h/\rho = a \rho^{2/3} + (b\rho + c\rho^\gamma) \\ &= \frac{3}{5} E_F \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} + \frac{1}{\rho} e_{pot}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Hierbei steht ρ_0 für die Nukleonendichte im Grundzustand, E_F für die Fermi-Energie und e_{pot} für die potentielle Energiedichte. Aus dem potentiellen Anteil folgt für das Mean-Field-Potential U schließlich:

$$\begin{aligned} U(\rho) &= \frac{\partial e_{pot}}{\partial \rho} = 2b\rho + (1 + \gamma)c\rho^\gamma \\ &= A \frac{\rho}{\rho_0} + B \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma. \end{aligned} \quad (2.39)$$

In A ist der Parameter t_0 und in B der Parameter t_3 von Gl. (2.25) enthalten: $A = 3\rho_0 t_0/4$, $B = (1 + \gamma)\rho_0^\gamma t_3/16$. Die drei Konstanten A, B, γ werden über die folgenden Randbedingungen bestimmt:

- 1.) Die Gesamtenergie pro Nukleon E/A muß für den Grundzustand -15.75 MeV betragen.
- 2.) Die Bindungsenergie muß bei $\rho = \rho_0$ ein Minimum besitzen. Insbesondere ergibt sich hieraus, daß der Druck P ,

$$P = \rho^2 \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{E}{A} \right) \right)_{S=\text{const.}} \quad (2.40)$$

verschwindet.

- 3.) Aus der Bindungsenergie muß ein bestimmter Wert für die Kompressibilität

$$\chi = 9\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{E}{A} \right) \Big|_{\rho = \rho_0} \quad (2.41)$$

folgen.

Die Gesamtenergie pro Nukleon wird meist in der Form

$$\frac{E}{A} = \frac{3}{5} E_F \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} + \frac{A}{2} \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{B}{\gamma + 1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad (2.42)$$

geschrieben. Gewöhnlich bezeichnet man Gleichung (2.42) (oder auch Gleichung (2.40)) als Nukleare Zustandsgleichung (EOS).

Der Verlauf der Nuklearen Zustandsgleichung (2.42) ist in Abbildung 2.1 für drei verschiedene Kompressibilitäten $\chi = 200$ MeV, 235 MeV, 300 MeV dargestellt (wobei $\rho_0 = 0.17 \text{ fm}^{-3}$ verwendet wurde und sich daher die Fermi-Energie zu $E_F = 38.39$ MeV berechnete). Die zu $\chi = 200$ MeV gehörige EOS wird als „weich“, die zu $\chi = 235$ MeV gehörige als „mittel“ und die zu $\chi = 300$ MeV korrespondierende als „hart“ bezeichnet. Die entsprechenden Mean-Field-Potentiale

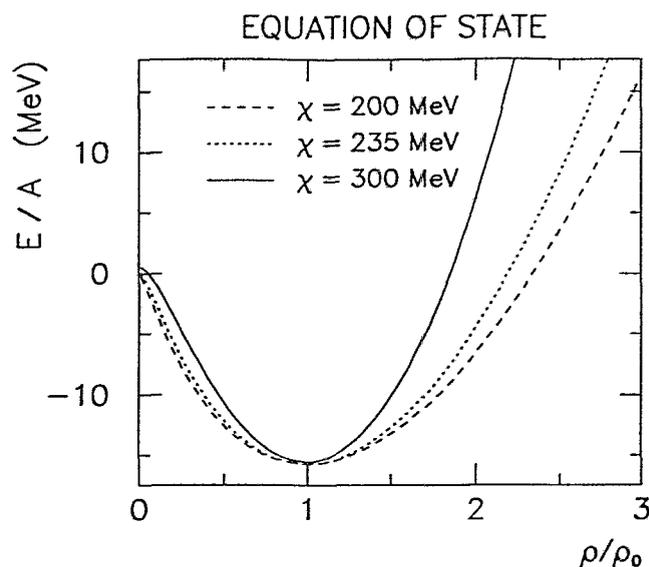


Abbildung 2.1: Nukleare Zustandsgleichung (EOS) für drei verschiedene Kompressibilitäten χ . Die zu $\chi = 200$ MeV gehörige EOS wird als „weich“, die zu $\chi = 235$ MeV gehörige als „mittel“ und die zu $\chi = 300$ MeV korrespondierende als „hart“ bezeichnet.

lauten:

$$U_{\text{soft}}(\rho) = -358.7 \text{ MeV} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} + 304.6 \text{ MeV} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{7/6}, \quad (2.43)$$

$$U_{\text{med}}(\rho) = -218.1 \text{ MeV} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} + 164.0 \text{ MeV} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{4/3}, \quad (2.44)$$

$$U_{\text{stiff}}(\rho) = -124.4 \text{ MeV} \cdot \frac{\rho}{\rho_0} + 70.3 \text{ MeV} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2. \quad (2.45)$$

Die Potentiale (2.43) und (2.45) wurden von G. F. Bertsch und Mitarbeitern [Ber84] eingeführt, wohingegen das Potential (2.44) zuerst von W. Bauer und Mitarbeitern [Bau86] verwendet wurde. Die Attribute soft, med(dium) und stiff beziehen sich auf die Krümmung der (E/A) -Kurve. Eine stärkere Krümmung bedeutet, daß mehr Energie nötig ist, um die Materie zu komprimieren.

Da die Grundzustandsdichte und -energie experimentell hinreichend gut bekannt sind, ist es möglich, durch das Verwenden verschiedener Kompressibilitäten (die Kompressibilität ist die Größe, die von den Randbedingungen am schlechtesten bekannt ist) in BUU-Simulationsrechnungen und dem Vergleich mit dem Experiment, etwas über die EOS zu lernen. So kann man beispielsweise anhand des Seitwärtsflusses der Nukleonen (siehe hierzu 2.4 und Kapitel 4 und 5) den maximalen Druck abschätzen.

Auf die verschiedenen Parameterisierungen (Kompressibilitäten) der EOS wird in den Kapiteln 4 und 5 noch einmal eingegangen.

Zum Schluß dieses Abschnittes sei darauf hingewiesen, daß in der Kernphysik die Kompressibilität über die Radiusänderungen bei Riesenresonanzschwingungen von Kernen definiert wird,

$$\chi := R^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} \left(\frac{E}{A} \right) \right)_{T,A} \quad (2.46)$$

wodurch sich, in bezug auf die reziproke isotherme Kompressibilität χ_T der Thermodynamik, ein etwas anderer Ausdruck ergibt. Denn in Gleichung (2.46) kann wegen $\rho = A/V = A/(R^3 4\pi/3)$ der Gleichgewichtsradius R durch die Dichte ausgedrückt werden und mit $\rho^2 (\partial(E/A)/\partial\rho)_{T,A} = P = 0 \text{ MeV fm}^{-3}$ (für $\rho = \rho_0$) erhält man schließlich Gleichung (2.41).

Im Gegensatz dazu gilt:

$$\begin{aligned} \chi_T &:= -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_{T,A} \\ &= \rho \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{T,A} \\ &= 2P + \rho^3 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{E}{A} \right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Da im Grundzustand der Druck verschwindet, ergibt sich für χ_T hingegen,

$$\chi_T = \rho^3 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\frac{E}{A} \right) \Big|_{\rho=\rho_0}. \quad (2.48)$$

Das heist $\chi = 9\rho^{-1}\chi_T$.

2.2.2 Der Nukleon–Nukleon–Wirkungsquerschnitt

Im folgenden soll nun der Nukleon–Nukleon–Wirkungsquerschnitt besprochen werden. Der Wirkungsquerschnitt ist für das Abstoppen der Kerne sowie für die Äquilibration des Gesamtsystems wesentlich. Da er die Nukleonendichte beeinflusst, wirkt er auch indirekt auf das Mean-Field-Potential.

Um der Realität möglichst nahe zu kommen, werden Wirkungsquerschnitte für die folgenden Streuprozesse verwendet⁵:

- (a) $N + N \longrightarrow N + N$
- (b) $N + N \longrightarrow N + \Delta$
- (c) $N + \Delta \longrightarrow N + \Delta$
- (d) $N + \Delta \longrightarrow N + N$
- (e) $\Delta + \Delta \longrightarrow \Delta + \Delta$

⁵Vergleiche hierzu [Bau87].

Für die Wirkungsquerschnitte bzgl. der elastischen Nukleon–Nukleon–Streuung (a) werden die experimentellen Werte genommen. Die Streuprozesse (c) und (e) sind ebenfalls elastisch. Allerdings sind hier keine experimentellen Daten verfügbar, da mindestens ein Eingangszustand bereits zu einer Δ -Resonanz gehört. Daher werden für die Prozesse (c) und (e) ebenfalls die Wirkungsquerschnitte von (a) benutzt. Die Wirkungsquerschnitte für die Prozesse (b) können auf Grund der experimentell bekannten Daten bzgl. der inelastischen Proton–Proton–Streuung parameterisiert werden. Aus der Parameterisierung der Streuprozesse (b) werden schließlich mit Hilfe des Prinzips der detaillierten Balance die Wirkungsquerschnitte für die Reaktion (d) berechnet.

Die expliziten Parameterisierungen der eben genannten Wirkungsquerschnitte können aus Referenz [Cug81] entnommen. Hinsichtlich der besonders wichtigen Nukleon–Nukleon–Streuung (a) gilt beispielsweise für den totalen Wirkungsquerschnitt σ ,

$$\sigma = \begin{cases} \frac{35 \text{ mb}}{1 + \left(\frac{\sqrt{s}}{\text{GeV}} - 1.8966\right) \cdot 100} + 20 \text{ mb}, & \text{falls } \frac{\sqrt{s}}{\text{GeV}} > 1.8966 \\ 55 \text{ mb} & , \text{sonst} \end{cases} \quad (2.49)$$

und für die Winkelabhängigkeit $d\sigma/d\Omega$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto e^{A(s) (\Delta p)^2 (\text{GeV})^{-2}}, \quad (2.50)$$

mit

$$A(s) = 6 \cdot \frac{(3.65 \cdot [\frac{\sqrt{s}}{\text{GeV}} - 1.8766])^6}{1 + (3.65 \cdot [\frac{\sqrt{s}}{\text{GeV}} - 1.8766])^6}. \quad (2.51)$$

Die Variable \sqrt{s} steht für die Schwerpunktsenergie und Δp für den Impulsübertrag.

2.3 Numerische Realisierung

Im folgendem wird das Konzept der numerischen Simulation erläutert. Die explizite Berechnung gliedert sich in zwei Abschnitte. Im ersten Abschnitt betrachtet man nur die stoßfreie Propagation der Teilchen und löst die Vlasov–Gleichung vermöge der Pseudoteilchen–Methode. Im zweiten Abschnitt werden dann die Stöße der Pseudoteilchen berücksichtigt, d. h. es wird der Kollisionsterm berechnet.

2.3.1 Stoßfreie Propagation

Die stoßfreie Propagation der Teilchen, d. h. genauer die zeitliche Entwicklung der Einteilchendichte in Abwesenheit von Nukleon–Nukleon–Stößen, wird durch

die Vlasov-Gleichung,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{m_N} \vec{p} \cdot \vec{\nabla}_r - \vec{\nabla}_r U(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla}_p \right) f(\vec{r}, \vec{p}, t) = 0 \quad (2.52)$$

beschrieben. Selbst die Vlasov-Gleichung ist einer direkten analytischen Lösung nicht zugänglich. Dies liegt an der Ortsabhängigkeit des Mean-Field-Potentials. Die Vlasov-Gleichung kann nun aber mit Hilfe der Pseudoteilchen-Methode gelöst werden.

Hierzu verschafft man sich zunächst eine formale Lösung, in dem man die Wigner-Funktion einfach als Integral über δ -Funktionen schreibt:

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \int \int d^3 r_0 d^3 p_0 \delta^3(\vec{r} - \vec{R}(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t)) \delta^3(\vec{p} - \vec{P}(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t)) f(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t). \quad (2.53)$$

Nach dem Einsetzen von Gl. (2.53) in Gl. (2.52) ergeben sich für \vec{R} und \vec{P} die Hamiltonschen Gleichungen:

$$\frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \frac{\vec{P}}{m_N} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\vec{\nabla}_r U|_{\vec{r}=\vec{R}}. \quad (2.54)$$

Etwas salopp kann man in Gl. (2.53) das Integral als Summe über überabzählbar unendlich viele δ -Funktionen schreiben:

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{\text{Normierung}} \sum_{\{\vec{r}_0, \vec{p}_0\}} \delta^3(\vec{r} - \vec{R}(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t)) \delta^3(\vec{p} - \vec{P}(\vec{r}_0, \vec{p}_0, t)). \quad (2.55)$$

Demnach könnte man f berechnen, wenn man für alle Punkte des Phasenraums $\{\vec{r}_0, \vec{p}_0\}$ aus den Hamiltonschen Gleichungen \vec{R} und \vec{P} bestimmt und die Summe über das Produkt der δ -Funktionen bildet. Da dies natürlich nicht durchführbar ist, beschränkt man sich auf einen Satz (Ensemble) von N_p Phasenraumpunkten und nähert das Integral in Gl. (2.53) durch diese Summe an:

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) \approx \frac{(2\pi\hbar)^3}{4N_r} \sum_{i=1}^{N_p} \tilde{\delta}^3(\vec{r} - \vec{R}_i(t)) \tilde{\delta}^3(\vec{p} - \vec{P}_i(t)), \quad (2.56)$$

wobei man die Phasenraumpunkte zu sogenannten Pseudoteilchen (man spricht auch von Testteilchen) zuordnet. Ein Pseudoteilchen kann, muß aber nicht (!), einem Nukleon entsprechen. Es gilt,

$$N_p = N \cdot N_r. \quad (2.57)$$

Hierbei ist N_r die Zahl der Pseudoteilchen, die einem der $N = A_P + A_T$ ($A_P =$ Anzahl der Projektilnukleonen, $A_T =$ Anzahl der Targetnukleonen) Nukleonen

zugeteilt werden. Die Tilde über die δ -Funktion in Gleichung (2.56) symbolisiert, daß nunmehr die δ -Funktion als Gauß-Funktion (mit einer von Null verschiedenen Breite) aufgefaßt wird.

Die Computerarbeit bei der Pseudoteilchen-Methode besteht also darin, für alle Pseudoteilchen die Orte und die Impulse aus den Hamiltonschen Gleichungen zu berechnen und danach die Wigner-Funktion gemäß Gl. (2.56).

Um die Impulsanfangsbedingungen der Pseudoteilchen zu erfüllen, verwendet man eine Thomas-Fermi-Verteilung f_{TF} ,

$$f_{TF}(\vec{r}_i, \vec{p}_i, t = 0) = \Theta(p_F(\vec{r}_i) - |\vec{p}_i|). \quad (2.58)$$

Der lokale Fermi-Impuls $p_F(\vec{r}_i)$ ist darin gegeben durch,

$$p_F(\vec{r}_i) = \hbar \left(\frac{3\pi^2}{2} \rho(\vec{r}_i) \right)^{1/3}. \quad (2.59)$$

Die in Gl. (2.59) auftretende Nukleonendichte könnte man erzeugen, in dem man die Nukleonen mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators in eine Kugel verteilt. Allerdings würden dann, aufgrund der statistischen Fluktuationen, besonders im Oberflächenbereich des Kerns unphysikalisch hohe Pseudoteilchen-Impulse auftreten. Um dies zu vermeiden, wird für ρ die Woods-Saxon-Dichteverteilung

$$\rho(\vec{r}_i) = \frac{\rho_0}{1 + e^{(|\vec{r}_i| - R_{\text{Kern}})/a}} \quad (2.60)$$

verwendet. Dabei ist R_{Kern} der Radius des Projektils bzw. Targets und $a = 0.5$ fm der Parameter der Randunschärfe. Die Dichte ρ_0 wird durch die Bedingung $\int \rho(\vec{r}_i') d^3r' \stackrel{!}{=} A$ festgelegt, wodurch gilt: $\rho_0 \approx 0.16 \text{ fm}^{-3}$.

2.3.2 Berechnung des Stoßterms

Im zweiten Abschnitt berücksichtigt man nun die Teilchenstöße. Hierzu fragt man zuerst innerhalb jeden Zeitschrittes ab, ob der Relativabstand zweier Pseudoteilchen unterhalb eines bestimmten Wertes $\Delta r_{\text{cut}} = 1.32$ fm liegt. Der Wert von Δr_{cut} entspricht einem totalen Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitt von $\sigma_{\text{tot}} = \pi \cdot (\Delta r_{\text{cut}})^2 = 55$ mb. Falls nun der Relativabstand kleiner als Δr_{cut} ist und weiterhin sich der Relativabstand im nächsten Zeitschritt vergrößern würde, so wird unter Verwendung des entsprechenden Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnittes die Streuung der beiden Teilchen berechnet. Die Berechnung erfolgt zweckmäßiger Weise im Schwerpunktsystem der beiden Teilchen. Die kinematischen Transformationen werden hierbei relativistisch ausgeführt. Der Streuwinkel der beiden Stoßpartner wird über die Formel (2.50) berechnet. Der Azimutwinkel wird isotrop verteilt.

Für die Besetzung der Endzustände wird das Pauli-Prinzip beachtet. Dies ist

— wie erwähnt — der fundamentale Unterschied gegenüber einer klassischen Berechnung des Stoßintegrals. Der Pauli-Blocking-Faktor für ein Pseudoteilchen am Ort \vec{r} und mit dem Impuls \vec{p} wird gemäß

$$1 - \bar{f}(\vec{r}, \vec{p}, t) = 1 - \frac{(2\pi\hbar)^3}{\Delta V 4N_r} \sum_{i=1}^{N_p} \int_{\Delta V} d^3r' \times \\ \tilde{\delta}^3(\vec{r}' - \vec{R}_i(t)) \tilde{\delta}^3(\vec{p} - \vec{P}_i(t)) e^{-(\vec{r}' - \vec{r})^2 / (2\sigma^2)} \quad (2.61)$$

berechnet, wobei ΔV über Gl. (2.20) festgelegt wird. Sodann wählt man mit Hilfe eines Zufallsgenerators eine Zahl zwischen 0 und 1. Ist die Zahl kleiner als der in Gl. (2.61) ermittelte Wert von $1 - \bar{f}(\vec{r}, \vec{p}, t)$, so wird die Nukleon-Nukleon-Kollision als erlaubt angesehen und die Endimpulse der beiden Teilchen werden für die weitere Rechnung verwendet. Anderenfalls wird die Kollision als verboten betrachtet und für die weitere Propagation der Teilchen werden ihre Impulse vor der Kollision verwendet.

Anmerkung

Um Rechenzeit zu sparen, wird die Parallelensemble-Methode benutzt. Bei dieser Methode werden die Teilchen in Ensembles von $A_P + A_T$ Teilchen gruppiert (ein Ensemble wird als Parallel-Run bezeichnet). Kollisionen werden dann nur noch innerhalb eines Ensembles erlaubt. Dabei erfährt jedes Pseudoteilchen jedoch das mittlere Potential aller N_p Pseudoteilchen. Die Rechenzeit vermindert sich durch diesen Trick um den Faktor N_r^{-2} .

2.4 Verlauf der Dichteverteilungen während einer Kern-Kern-Kollision

Mit der Kenntnis der Wignerfunktion kann man nun Aussagen über Einteilchen-Größen treffen. Man kann beispielsweise die während einer Schwerionenreaktion auftretenden Orts- und Impulsverteilungen der Nukleonen berechnen oder die mittlere kinetische Energie der Partizipanten und so fort.

Im folgenden soll nun die zeitliche Entwicklung der Orts- und Impulsverteilung der Nukleonen diskutiert werden. In Abbildung 2.2 ist der zeitliche Verlauf der Orts- und Impulsdichte für einen zentralen Au(150 A·MeV) + Au Stoß dargestellt. Zur Zeit $t = 0$ fm/c sind die beiden Kerne noch getrennt. Im Impulsraum liegt daher eine Doppelkugel vor. Während der Reaktion kommt es infolge der Nukleon-Nukleon-Stöße zu einer ellipsoidförmigen Impulsverteilung (siehe Bild für $t = 50$ fm/c). Es treten hohe, im Anfangszustand nicht vorhandene, transversale Impulskomponenten auf. Zur Zeit $t = 80$ fm/c ist die Impulsverteilung kleiner als bei $t = 50$ fm/c. Dies liegt darin begründet, daß zum einen während

der Expansion Arbeit gegen das Potential verrichtet wird und zum anderen die schnellen Teilchen aus der Reaktionszone entkommen. Anhand der Ortsdichte ist erkennbar, daß die Kernmaterie komprimiert wird, anschließend expandiert und schließlich fast vollständig desintegriert. Die Desintegration ist aufgrund des großen Bereiches geringer Dichte ersichtlich.

Ein etwas anderes Bild bietet sich dem Betrachter in Abbildung 2.3. Hier ist der zeitliche Verlauf der Orts- und Impulsdichte für einen semizentralen Au(150 A·MeV) + Au Stoß dargestellt. Die Bilder der Ortsdichte verdeutlichen, daß die anfänglich hohe Dichte im Überlappungsbereich bereits bei $t = 50$ fm/c wieder abgenommen hat. Während der Reaktion dreht sich das Gesamtsystem und bei $t \approx 80$ fm/c fliegen die zwei Restkerne auseinander. Die Impulsverteilung zeigt während der ganzen Reaktion die Form einer Doppelkugel. Sie wird zudem aus der Strahlachse (z-Achse) herausgedreht. Das hierfür zugrunde liegende Phänomen nennt man (kollektiven) Seitwärtsfluß der Teilchen. Der Seitwärtsfluß wird ausführlich in den Kapiteln 4 und 5 besprochen.

Um den Zusammenhang zwischen den Konturflächen und der Dichte plastisch zu verdeutlichen, wurde in Abbildung 2.4 für einen bestimmten Zeitschritt und Stoßparameter der Kontur-Plot gemeinsam mit der Nukleonendichte dargestellt. Auf diese Abbildung wird noch einmal im Abschnitt 5.2 Bezug genommen.

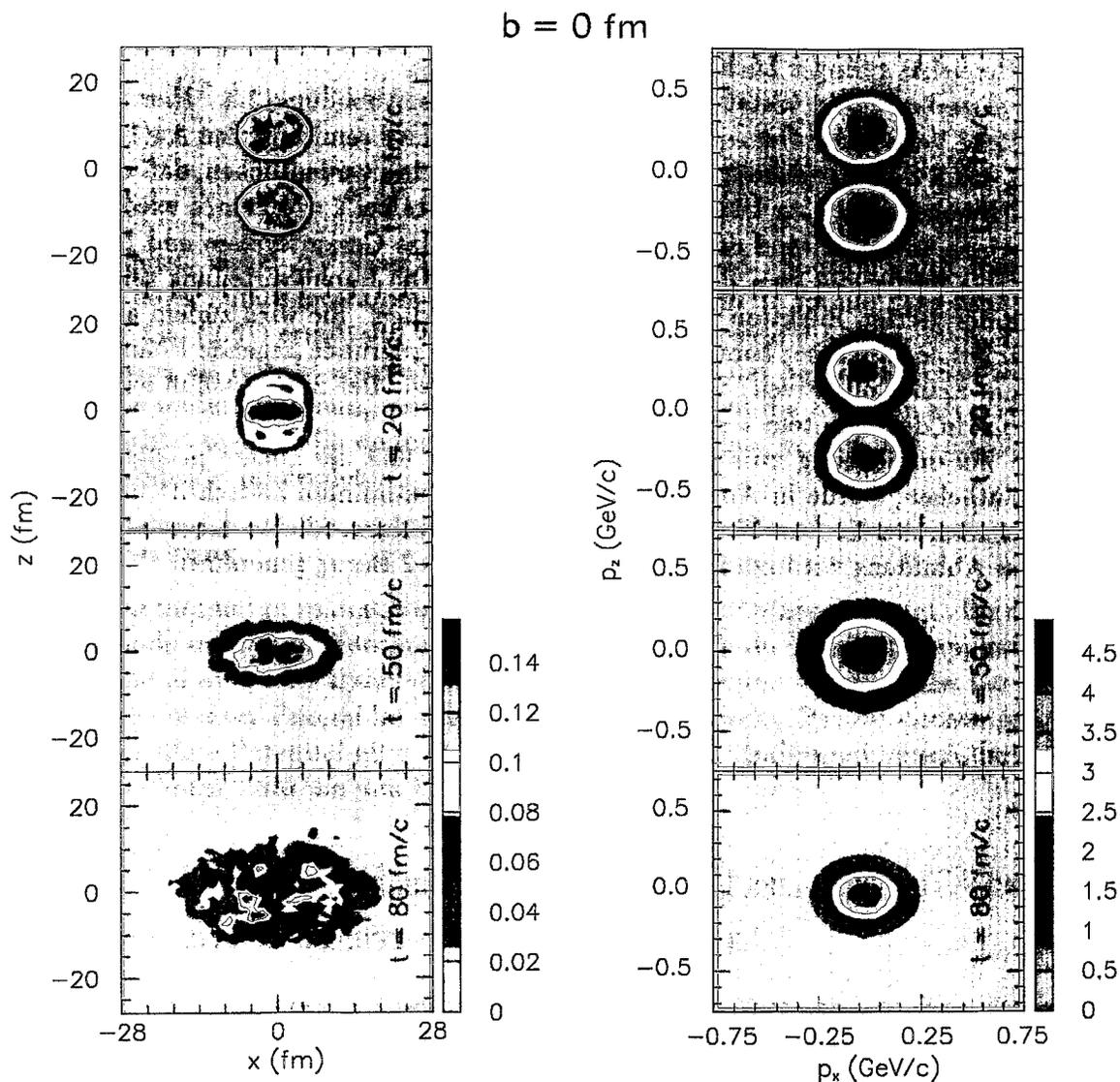


Abbildung 2.2: Konturflächen-Plot der Orts- und Impulsdichte bzgl. einer $\text{Au}(150 \text{ A-MeV}) + \text{Au}$ Reaktion für verschiedene Zeiten. Der Stoßparameter b betrug $b = 0 \text{ fm}$. Der Farbbalken setzt die unterschiedlichen Dichtezonen in Beziehung. Die Skala des Farbbalkens bezieht sich auf die Zeit $t = 80 \text{ fm/c}$. Die Einheit der Skala ist hinsichtlich der Ortsdichte fm^{-3} und bzgl. der Impulsdichte $(\text{GeV}/c)^{-2}$.

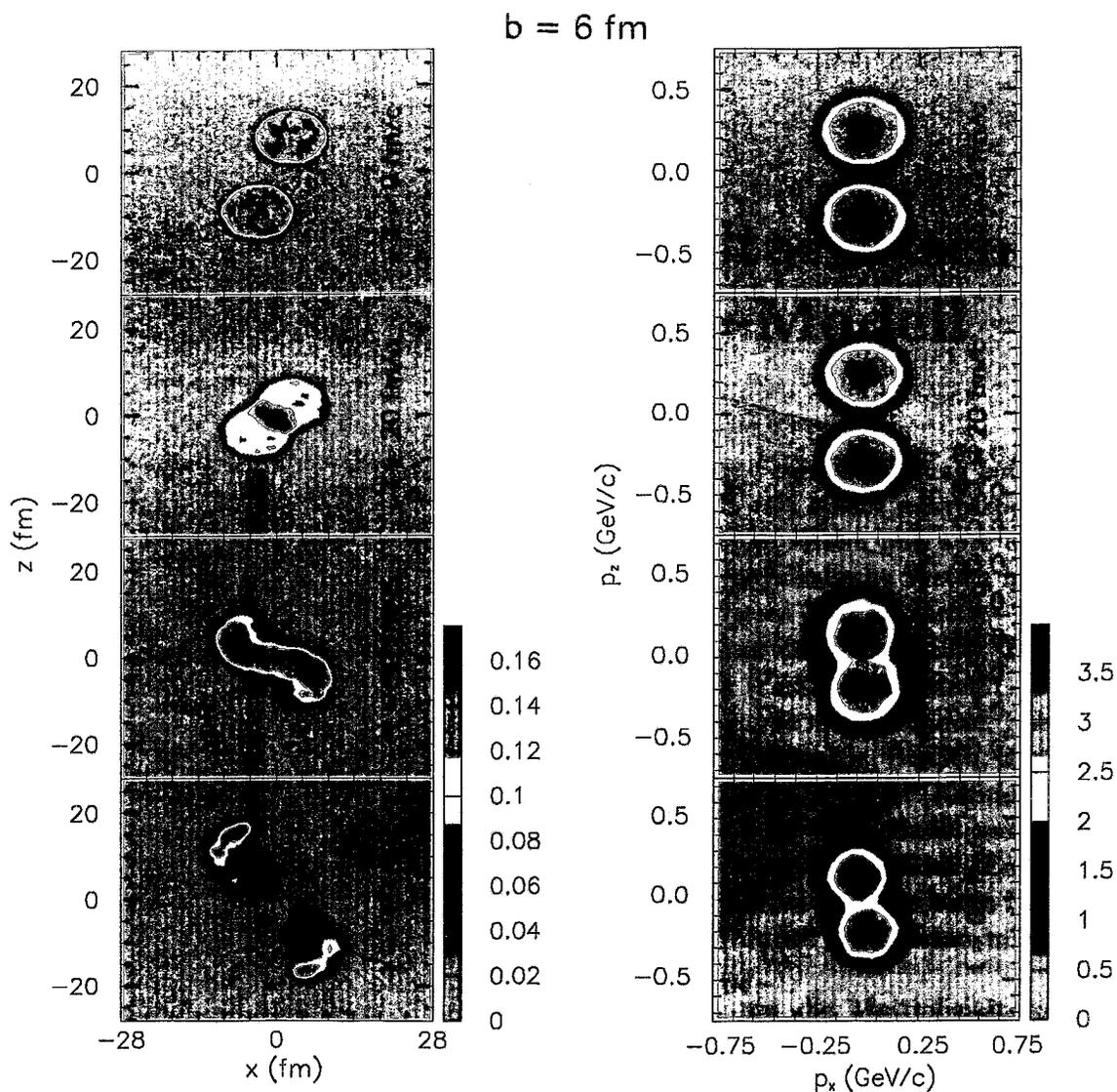


Abbildung 2.3: Konturflächen-Plot der Orts- und Impulsdichte bzgl. einer $\text{Au}(150 \text{ A} \cdot \text{MeV}) + \text{Au}$ Reaktion für verschiedene Zeiten. Der Stoßparameter b betrug $b = 6 \text{ fm}$. Der Farbbalken setzt die unterschiedlichen Dichtezonen in Beziehung. Die Skala des Farbbalkens bezieht sich auf die Zeit $t = 80 \text{ fm}/c$. Die Einheit der Skala ist hinsichtlich der Ortsdichte fm^{-3} und bzgl. der Impulsdichte $(\text{GeV}/c)^{-2}$.

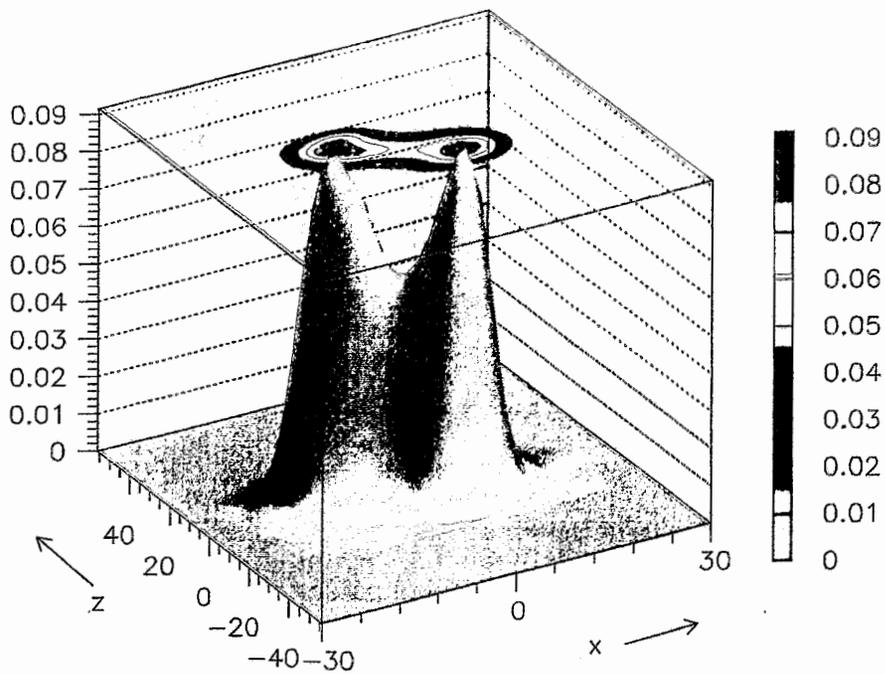


Abbildung 2.4: Ortsdichte in Verbindung mit dem dazugehörigen Konturflächen-Plot für eine $Au(150 \text{ A}\cdot\text{MeV}) + Au$ Reaktion nach einer Zeit von $70 \text{ fm}/c$. Der Stoßparameter beträgt 6 fm . Die Einheit der Koordinaten x und z ist fm . Die Skala des Farbbalkens besitzt die Einheit fm^{-3} .

Kapitel 3

Das Kopenhagener Statistische Multifragmentations-Modell

Wegen der sehr komplizierten Prozesse, die bei der Fragmentbildung auftreten, ist es bis heute nicht gelungen, die Fragmentation mit einem mikroskopischen dynamischen Modell zufriedenstellend zu beschreiben. Wenn nun aber die Dynamik sehr kompliziert wird, kann man meist das physikalische System mit den Methoden der statistischen Physik untersuchen. Diesen Weg beschritt — neben anderen Gruppen, wie zum Beispiel D. H. E. Gross und Mitarbeiter [BHS85, Gro83, Gro85, Gro86] J. Randrup und Mitarbeiter [Fai82, Fai83, Ran81], sowie D. Hahn und H. Stöcker [HSt88a, HSt88b] — die Gruppe um J. Bondorf. Sie entwickelte ein Statistisches Multifragmentations-Modell [Bon85a, Bon85b, Bar86c], welches auf den Annahmen beruht, daß erstens sich das System (Kernmaterie) kurz vor dem Zerfall im thermodynamischen Gleichgewicht befindet und zweitens jeder Quantenzustand, der nicht aufgrund der Erhaltungssätze (Energie-, Impuls-, Drehimpuls-, Baryonenzahl- und Ladungserhaltung) verboten ist, mit gleicher Wahrscheinlichkeit erreicht wird. Dieses Modell wird fortan mit SM-Modell bezeichnet.

Das SM-Modell wurde vornehmlich konstruiert, um die Multiplizitätsverteilungen, die Temperatur, die Entropie, die Wärmekapazität und die Dichte des fragmentierenden Systems zu untersuchen. Insbesondere ist es mit diesem Modell möglich, Aussagen über den flüssig-gasförmig Phasenübergang zu treffen, welchen man aufgrund der Ähnlichkeit zwischen der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung und der Van-der-Waals-Kraft bei kleinen Dichten ($\rho \leq \frac{1}{3}\rho_0$) und nicht zu hohen Temperaturen ($T \leq 16$ MeV) erwartet. Ein großer Vorteil des SM-Modells gegenüber Modellen, bei denen die Kernmaterie in der großkanonischen Näherung beschrieben wird [Bon82, Gro83, Mek78, Ran81, Sto83], ist seine mikrokanonische Formulierung. Sie gestattet es, die finite-size-Effekte der Kernmaterie zu berücksichtigen.

Ausgangspunkt des SM-Modells ist ein Stück Kernmaterie, dessen Dichte klein ($\rho \leq \rho_0/2$) und dessen Anregungsenergie (die Temperatur wird für jede

Partition aus der Anregungsenergie berechnet; siehe weiter unten) kleiner als 15 MeV/Nukleon ist. Darüberhinaus wird angenommen, daß das Aufbruchvolumen V_b der Kernmaterie sphärisch symmetrisch ist.

Die Idee des SM-Modells besteht darin, für alle theoretisch möglichen Partitionen des vorliegenden Systems die Entropie S zu berechnen und dann für jedes Event mit Hilfe des Boltzmannschen Prinzips eine Partition mit großer Entropie auszuwählen. Dies wird nun näher erläutert.

Das Boltzmannsche Prinzip lautet:

$$W(\{N_{A,Z}\}) = e^{S(\{N_{A,Z}\}, T, V_b)}, \quad (3.1)$$

mit

$$S(\{N_{A,Z}\}, T, V_b) = \sum_{A,Z} N_{A,Z} S_{A,Z}(T, V_b). \quad (3.2)$$

Hierbei bezeichnet W die thermodynamische Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System in die Partition $\{N_{A,Z}\}$ zerfällt. $N_{A,Z}$ gibt die Zahl (Multiplizität) der Fragmente mit der Massenzahl A und der Ladungszahl Z an und $S_{A,Z}$ ist die Entropie solch eines Fragments.

3.1 Vektor einer Partition

Unter einer Partition (Zerteilung) versteht man einen Satz von Bruchstücken, in die das System zerfallen kann. Der Vektor $\{N_{A,Z}\}$ ist ein Vektor (Partitionsvektor), in dessen Komponenten die Multiplizitäten $N_{A,Z}$ der einzelnen Fragmente stehen.

Angenommen, das Gesamtsystem bestehe aus A_0 Baryonen, wobei davon Z_0 Protonen seien,

$$A_0 = \sum_{A,Z} N_{A,Z} A, \quad (3.3)$$

$$Z_0 = \sum_{A,Z} N_{A,Z} Z. \quad (3.4)$$

Dann lautet der Partitionsvektor $\{N_{A,Z}\}$,

$$\{N_{A,Z}\} := N_{10}, N_{11}, N_{20}, N_{21}, N_{22}, \dots, N_{A_0 Z_0}. \quad (3.5)$$

Für ein $(A_0 = 4, Z_0 = 2)$ -System sind z. B. neun Partitionen möglich; siehe Tabelle 3.1.

M	N_{10}	N_{11}	N_{20}	N_{21}	N_{22}	N_{30}	N_{31}	N_{32}	N_{33}	N_{40}	N_{41}	N_{42}
4	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Tabelle 3.1: Zerfallskanäle eines $(A_0 = 4, Z_0 = 2)$ -Systems. Die Multiplizität M gibt die Anzahl der Fragmente einer Partition an.

3.2 Berechnung der Entropie

Etwas schwieriger als die Angabe der Partitionen ist die Bestimmung der Gesamtentropie S , bzw. der Fragmententropien $S_{A,Z}$ in Gleichung (3.2). Hierzu werden die Fragmententropien im Rahmen eines auf endliche Temperaturen verallgemeinerten Tröpfchenmodells berechnet.

Da schon das konventionelle Tröpfchenmodell [Wei35] nicht für die Beschreibung von leichten Teilchen geeignet ist, wird das Tröpfchenbild nur auf Teilchen angewandt, deren Masse größer als vier ist. Leichtere Teilchen werden als elementare Partikel betrachtet. Sie besitzen also keine angeregten Zustände und tragen demnach nur über ihre thermische Bewegung zur Gesamtentropie bei. Daß die Fragmententropie über ein verallgemeinertes Tröpfchenmodell bestimmt werden kann, ist folgendermaßen einsichtig:

Die Fragmententropie erhält man aus

$$S_{A,Z} = - \left(\frac{\partial F_{A,Z}}{\partial T} \right)_{V_b}, \quad (3.6)$$

wobei sich die freie Energie $F_{A,Z}$ zusammensetzt aus einem translatorischen Anteil $F_{A,Z}^t$ und einem inneren Anteil $F_{A,Z}^{\text{int}}$:

$$F_{A,Z} = F_{A,Z}^{\text{int}} + F_{A,Z}^t. \quad (3.7)$$

$F_{A,Z}^t$ wird aus der Zustandssumme des Fragmente-Gases berechnet, wohingegen $F_{A,Z}^{\text{int}}$ schließlich über das verallgemeinerte Tröpfchenmodell ermittelt wird.

Die Temperatur T erhält man aus der Anregungsenergie E^* ,

$$E^* = \frac{3 Z_0^2 e^2}{5 R_b} + \sum_{A,Z} N_{A,Z} \left(F_{A,Z} - T \left(\frac{\partial F_{A,Z}}{\partial T} \right)_{V_b} \right) - E^{\text{ground}}. \quad (3.8)$$

Mit E^{ground} wurde die Grundzustandsenergie des Kerns notiert, e ist die Elementarladung und R_b steht für den Radius des Aufbruchvolumens. Die Temperatur wird für jede Partition neu berechnet — sie schwankt also. Fest hingegen ist die Gesamtenergie E_{tot} des fragmentierenden Systems:

$$E_{\text{tot}} = E^{\text{ground}} + E^*. \quad (3.9)$$

Für die Berechnung der inneren freien Energie muß der Beitrag des Volumenterms, $F_{A,Z}^B$, der Beitrag des Oberflächenterms, $F_{A,Z}^S$, sowie der Beitrag des Coulomb-Terms $F_{A,Z}^C$, und der des Symmetrieterms $F_{A,Z}^{\text{sym}}$ bestimmt werden:

$$F_{A,Z}^{\text{int}} = F_{A,Z}^B + F_{A,Z}^S + F_{A,Z}^C + F_{A,Z}^{\text{sym}}. \quad (3.10)$$

Für die Berechnung von $F_{A,Z}^B$ geht man von der Volumenenergie $E_{A,Z}^B$ des herkömmlichen Tröpfchenmodells aus. Da sich die Fragmente nicht im Grundzustand befinden, ist sie temperaturabhängig zu parameterisieren. Hierzu orientiert man sich an der quadratischen Temperaturabhängigkeit des chemischen Potentials eines Fermi-Gases, sie gilt für kleine Temperaturen ($T < E_{\text{Fermi}}$), und schreibt:

$$E_{A,Z}^B = \left(W_0 + \frac{T^2}{\varepsilon_0} \right) A. \quad (3.11)$$

Hierbei ist $\varepsilon_0 = 16 \text{ MeV}$ der Niveaudichte-Parameter des Fermi-Gases und $W_0 = -16 \text{ MeV}$ steht für die Bindungsenergie unendlich ausgedehnter Kernmaterie. Unter Verwendung von $S_{A,Z}^B = -\left(\frac{\partial}{\partial T}(E_{A,Z}^B - TS_{A,Z}^B)\right)_V$ ergibt sich mit (3.11) für die Entropie,

$$S_{A,Z}^B = \frac{2T}{\varepsilon_0} A, \quad (3.12)$$

und nach einer Legendre-Transformation berechnet sich der Volumenanteil der freien Energie zu:

$$F_{A,Z}^B = \left(W_0 - \frac{T^2}{\varepsilon_0} \right) A. \quad (3.13)$$

Der Oberflächenterm muß ebenfalls temperaturabhängig parameterisiert werden. Da die Oberflächenspannung σ_S die freie Energie pro Einheitsfläche ist, gilt offensichtlich ($R_{A,Z} = r_0 A^{1/3}$):

$$F_{A,Z}^S = 4\pi r_0^2 A^{2/3} \sigma_S(T). \quad (3.14)$$

Die Oberflächenspannung eines Tröpfchens muß am kritischen Punkt verschwinden. In der Nähe der kritischen Temperatur T_c ist $\sigma_S(T)$ proportional zu

$(T_c - T)^{5/4}$ (siehe [Lat85]). Von diesem Verhalten interpoliert man zu dem bekannten Wert der Oberflächenspannung bei $T = 0$ MeV vermöge,

$$\sigma_S(T) = \sigma_S(T=0) \cdot \left[\frac{T_c^2 - T^2}{T_c^2 + T^2} \right]^{5/4}. \quad (3.15)$$

Die Werte der Konstanten betragen: $\sigma_S(T=0)4\pi r_0^2 = 18$ MeV, $T_c = 16$ MeV. Mit der Parameterisierung von $F_{A,Z}^S$ wurde explizit ein flüssig-gasförmig Phasenübergang in das Modell hineingebracht. Die Parameterisierung bezieht sich allerdings auf eine unendlich ausgedehnte, homogene Materie.

Ausgangspunkt für die Berechnung des Coulomb-Terms ist die Coulomb-Energie $E_{A,Z}^C$. Sie wird über die Wigner-Seitz-Näherung ermittelt. Bei der Wigner-Seitz-Näherung unterteilt man das fragmentierende System in Zellen verschiedener Größe. Vor der Fragmentation werden die Ladungen in jeder Zelle als homogen verteilt angesehen. Nach der Fragmentation soll sich in jeder Zelle (und zwar am Mittelpunkt der Zelle) nur ein Fragment befinden. Für die Differenz zwischen der Coulomb-Energie einer Zelle vor und nach der Fragmentation erhält man dann

$$E_{A,Z}^C = \frac{3 Z^2 e^2}{5 R_{A,Z}} \left(1 - \frac{R_{A,Z}}{R_{\text{cell}}} \right), \quad (3.16)$$

mit

$$\frac{R_{A,Z}}{R_{\text{cell}}} = \left(\frac{(Z_0/A_0) \rho_{bu}}{(Z/A) \rho_0} \right)^{1/3}. \quad (3.17)$$

Hierbei ist $R_{A,Z}$ der Radius des Fragments im Grundzustand, R_{cell} ist der Zellenradius, $Z_0 (A_0)$ bezeichnet die Gesamtladung (Gesamtmasse) des fragmentierenden Systems, ρ_{bu} steht für seine Break-up-Dichte und ρ_0 für die Dichte im Grundzustand.

Da die Coulomb-Energie eines Fragmentes nicht von der Temperatur abhängt¹, gehört zu ihr nur ein Mikrozustand und somit ist die Entropie null. Daraus folgt:

$$F_{A,Z}^C = E_{A,Z}^C. \quad (3.18)$$

Die Coulomb-Energie ist bedeutsam für die Multifragmentation. Sie bewirkt, daß die Bildung kleiner Fragmente begünstigt wird.

Für die Berechnung der inneren freien Energie muß schließlich noch der Symmetrieterm parameterisiert werden. Hier wird die Parameterisierung der Symmetrienergie $E_{A,Z}^{\text{sym}}$ des herkömmlichen Tröpfchenmodells benutzt,

$$E_{A,Z}^{\text{sym}} = \gamma (A - 2Z)^2 / A, \quad \text{mit } \gamma = 25 \text{ MeV}. \quad (3.19)$$

¹Genaugenommen hängt die Coulomb-Energie schwach von der Temperatur ab. Diese Abhängigkeit wird jedoch vernachlässigt.

Damit ist man schon fertig, denn die Symmetrieenergie hängt, ebenso wie die Coulomb-Energie, nicht von der Temperatur ab, wodurch gilt: $F_{A,Z}^{\text{sym}} = E_{A,Z}^{\text{sym}}$. Somit lautet der Term für $F_{A,Z}^{\text{int}}$,

$$F_{A,Z}^{\text{int}} = \left(W_0 - \frac{T^2}{\varepsilon_0} \right) A + 4\pi r_0^2 A^{2/3} \sigma_S(T) + \frac{3 Z^2 e^2}{5 R_{A,Z}} \left(1 - \left[\frac{(Z_0/A_0) \rho_{bu}}{(Z/A) \rho_0} \right]^{1/3} \right) + \gamma (A - 2Z)^2 / A. \quad (3.20)$$

Für die Bestimmung der freien Fragmentenergie muß noch der Ausdruck für $F_{A,Z}^f$ abgeleitet werden. Hierzu wird angenommen, daß sich die Teilchen in einem effektiven „freien Volumen“ V_f bewegen, welches sich aus der Differenz zwischen dem Aufbruchvolumen V_b und dem Anfangsvolumen $V_0 = \frac{4\pi}{3} r_0^3 A_0$ ($r_0 \approx 1.2$ fm) ergibt:

$$V_f = V_b - V_0 = \chi V_0. \quad (3.21)$$

Mit V_f , d. h. mit der Einschränkung des für die Bewegung zur Verfügung stehenden Volumens, hat man in gewisser Weise die Wechselwirkung zwischen den Fragmenten berücksichtigt. Der Parameter χ hängt von der Gesamtmultiplizität $M = \sum_{A,Z} N_{A,Z}$ ab und lautet:

$$\chi = \left[1 + \frac{d}{(A_0 4\pi/3)^{1/3} r_0} (M^{1/3} - 1) \right]^3 - 1. \quad (3.22)$$

Hierbei ist d ein frei wählbarer Parameter. Er gibt den mittleren Abstand zwischen den Fragmenten an und wird daher meist als „Ritz-Breite“ (crack width) bezeichnet. Die Formel für χ ist folgendermaßen einsichtig:

Betrachtet sei eine Partition aus M Fragmenten unterschiedlicher Volumina. Ferner sei es möglich, das Kernvolumen als würfelförmig anzusetzen und anstelle der gegebenen Partition mit einer Partition zu rechnen, die aus M Ausgaben eines Fragmentes des Volumens b^3 besteht, wobei dieses Fragment aus der Mittelung über die unterschiedlichen Fragmente der ursprünglichen Partition hervorgeht. Für die Kantenlänge des Kerns gilt dann (vergl. Abbildung 3.1):

$$V^{1/3} = b M^{1/3} + d(M^{1/3} - 1). \quad (3.23)$$

Unter Verwendung von $(A_0/M)/b^3 = 1/(4\pi r_0^3/3)$ ergibt sich für b ,

$$b = r_0 \left(\frac{4\pi A_0}{3M} \right)^{1/3} \quad (3.24)$$

und Einsetzen von Gl. (3.24) in Gl. (3.23) führt auf,

$$V = \left[1 + \frac{d}{(A_0 4\pi/3)^{1/3} r_0} (M^{1/3} - 1) \right]^3 V_0. \quad (3.25)$$

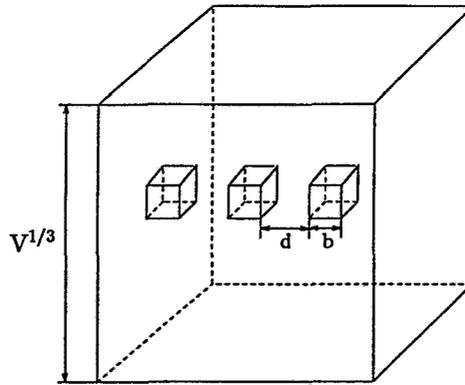


Abbildung 3.1: Durchschnittliche räumliche Verteilung der Fragmente kurz vor dem Aufbruch des Kerns.

Das Volumen V ist natürlich das Aufbruchvolumen $V_b = (\chi + 1) V_0$, woraus sofort der in Gl. (3.22) angegebene Ausdruck für χ folgt.

Zur Berechnung von $F_{A,Z}^t$ wird zunächst vorausgesetzt, daß sich die Fragmente wie Teilchen eines Boltzmann-Gases verhalten. Somit gilt für die Zustandssumme $Z_{A,Z}^{t,1}$ eines einzelnen Fragmentes [Lan66]:

$$\begin{aligned} Z_{A,Z}^{t,1} &= g_{A,Z} V_f \int e^{-\vec{p}_{A,Z}^2 / (2 m_N A T)} \frac{d^3 p_{A,Z}}{(2 \pi \hbar)^3} \\ &= g_{A,Z} A^{3/2} \frac{V_f}{\lambda^3}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

mit der thermischen deBroglie-Wellenlänge für Nukleonen

$$\lambda = \sqrt{\frac{2 \pi \hbar^2}{m_N T}} \quad (3.27)$$

und dem Spin-Entartungsfaktor $g_{A,Z} = 2S_{A,Z} + 1$. Ferner bezeichnet $\vec{p}_{A,Z}$ den Impuls des Fragments und m_N die Nukleonenmasse.

Für die Zustandssumme $Z_{A,Z}^{t,g}$ des Fragmente-Gases ergibt sich somit,

$$Z_{A,Z}^{t,g} = (g_{A,Z} A^{2/3} V_f / \lambda^3)^{N_{A,Z}}. \quad (3.28)$$

De facto sind die Fragmente aber keine Boltzmann-Teilchen, sondern ununterscheidbar. Darum muß der Ausdruck (3.28) noch durch die Zahl

der möglichen Permutationen der $N_{A,Z}$ Fragmente geteilt werden: $Z_{A,Z}^{t,g} = (g_{A,Z} A^{2/3} V_f / \lambda^3)^{N_{A,Z}} / N_{A,Z}!$. Unter Verwendung dieser Gleichung und der bekannten Beziehung, $F = -T \ln(Z)$, findet man schließlich für die translatorische freie Energie,

$$F_{A,Z}^t = -T \ln \left(g_{A,Z} A^{3/2} \frac{\chi V_0}{\lambda^3} \right) + \frac{T}{N_{A,Z}} \ln(N_{A,Z}!). \quad (3.29)$$

Damit ist nun auch $F_{A,Z}$ bestimmt und gemäß Gleichung (3.6) erhält man für die Fragmententropie,

$$S_{A,Z} = \frac{3}{2} + \ln \left(g_{A,Z} A^{3/2} \frac{\chi V_0}{\lambda^3} \right) - \frac{1}{N_{A,Z}} \ln(N_{A,Z}!) + \frac{2T}{\varepsilon_0} A - 4\pi r_0^2 A \frac{d\sigma_S}{dT}, \quad (3.30)$$

wodurch Gleichung (3.2) zufolge nunmehr auch die Gesamtentropie festgelegt wäre.

3.3 Erwartungswerte physikalischer Größen

Mit der Kenntnis der Gesamtentropie liegt nach Gleichung (3.1) auch die thermodynamische Wahrscheinlichkeit $W(\{N_{A,Z}\})$ fest, mit der das System in die Partition $\{N_{A,Z}\}$ zerfällt. Ist $W(\{N_{A,Z}\})$ für jede Partition bekannt, so ist der Erwartungswert \bar{Q} einer physikalischen Größe Q über

$$\bar{Q} = \sum_{\{N_{A,Z}\}} W_n(\{N_{A,Z}\}) Q(\{N_{A,Z}\}) \quad (3.31)$$

berechenbar. Hierbei ist $Q(\{N_{A,Z}\})$ der Wert, den die Größe Q in bezug auf die Partition $\{N_{A,Z}\}$ annimmt und $W_n(\{N_{A,Z}\})$ ist die auf Eins normierte thermodynamische Wahrscheinlichkeit,

$$W_n(\{N_{A,Z}\}) = \left(\sum_{\{N_{A,Z}\}} W(\{N_{A,Z}\}) \right)^{-1} W(\{N_{A,Z}\}). \quad (3.32)$$

In den letzten beiden Formeln erstreckt sich die Summe über alle möglichen Partitionen des fragmentierenden Kerns. Die Größe Q kann beispielsweise sein: die isochore Wärmekapazität $C_V = T(\partial S / \partial T)_{V_b}$, die Temperatur T , die Multiplizität M oder irgendeine Fragmentmultiplizität $N_{A,Z}$.

3.4 Expansion des Fragmente-Systems

Bisher wurde die Kernmaterie kurz vor und kurz nach dem Aufbruch betrachtet. Im folgenden soll nun die zeitliche Entwicklung des Viel-Fragmente-Systems nach dem Aufbruch behandelt werden.

Im SM-Modell wird hierfür angenommen, daß sich die Fragmente auf klassischen Trajektorien bewegen. Dies scheint aufgrund der üblicher Weise kleinen deBroglie-Wellenlänge zweier Fragmente gegenüber ihrem kleinstmöglichen Abstand gerechtfertigt [Eis75]. Ordnet man dem Wellenpaket, welches die zwei Fragmente charakterisiert, die reduzierte Wellenlänge $\lambda = \frac{\hbar}{\mu v}$ ($\mu =$ reduzierte Masse, $v =$ Betrag der Relativgeschwindigkeit) zu und berechnet den kleinstmöglichen Abstand zu $a = Z_1 Z_2 e^2 / (2E)$ ($e =$ Elementarladung, Z_1 und Z_2 sind die Ladungszahlen der Fragmente und E ist ihre Relativenergie, $E = \mu v^2 / 2$), dann bewegen sich die Fragmente auf klassischen Trajektorien, falls gilt:

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \gg 1. \quad (3.33)$$

Diese Bedingung ist im allgemeinen für Fragmente mit $Z \geq 3$ erfüllt.

Die Geschwindigkeiten und Orte der Fragmente werden aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen,

$$m_k \frac{d^2 r_k}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^M \frac{Z_k Z_j e^2 (\vec{r}_k - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|^3}, \quad (3.34)$$

berechnet. Man erkennt, daß es sich um ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung handelt. Da schon für das Drei-Körper-Problem keine Lösung in geschlossener Form möglich ist, wird das Gleichungssystem numerisch nach dem Numerow-Verfahren² gelöst.

3.5 Abdampfung leichter Teilchen

Hoch angeregte Fragmente gehen durch Abdampfen leichter Teilchen in einen Zustand niedriger Energie über. Die Abdampfung wirkt sich auf die Massen- und Impulsverteilung der Fragmente aus und damit auch auf alle Observablen, welche von der Massen- bzw. Impulsverteilung abhängen. Folglich muß für einen Vergleich mit dem Experiment die Verdampfung leichter Teilchen berücksichtigt werden. Dies geschieht im SM-Modell auf der Grundlage des Compound-Kern-Verdampfungsmodells von V. F. Weisskopf und D. H. Ewing [Wei37, Wei40, Bla59]. In diesem Modell wird angenommen, daß der Zerfall unabhängig von der Bildung des Compound-Kerns sei und ferner die Dynamik des Zerfallsprozesses im (inversen) Wirkungsquerschnitt für die Bildung des

²Siehe z. B. Referenz [Koo90].

Compound-Kerns aus Ejektil und Restkern enthalten sei.

Zur Ableitung der Verdampfungsformel wird ein Compound-Kern C betrachtet, dessen Anregungsenergie E_c^* gleich einer Resonanzenergie E_R^c ist. Der Kern C zerfalle in ein Ejektil b und in einen Restkern X mit einer Anregungsenergie E_x^* . Dieser Ausgangskanal wird mit β bezeichnet.

Zunächst wird der Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\beta,c}$ für die Bildung des Compound-Kerns aus Ejektil und Restkern nach der Mehr-Niveau-Breit-Wigner-Formel,

$$\sigma_{\beta,c} = \frac{\pi}{k_\beta^2} g_\beta \sum_R \frac{\Gamma_\beta \Gamma_R}{(E_c^* - E_R^c)^2 + \Gamma_R^2/4} \quad (3.35)$$

bestimmt. Die Summe erstreckt sich hierbei über alle möglichen Resonanzen (unter Berücksichtigung der Spinprojektionen) des Kerns. $g_\beta = [(2S_b + 1)(2S_x + 1)]^{-1}$ ist der reziproke Spinentartungsfaktor ($S_b =$ Spin des Ejektils, $S_x =$ Spin des Restkerns), k_β ist die Wellenzahl und Γ_β die Partialbreite des Ausgangskanals. Ferner bezeichnet Γ_R die totale Zerfallsbreite.

Der über ein Energieintervall ΔE_c^* gemittelte Wirkungsquerschnitt ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{\beta,c} \rangle &= \frac{1}{\Delta E_c^*} \int_{E_c^* - \Delta E_c^*}^{E_c^*} \sigma_{\beta,c}(E_c^{*'}) dE_c^{*'} \\ &= \frac{2\pi^2}{k_\beta^2} g_\beta \Gamma_\beta \frac{N_c}{\Delta E_c^*}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Der Term $N_c/\Delta E_c^* =: D_c$ beschreibt die mittlere Niveaudichte des Kerns C innerhalb ΔE_c^* . Diese Gleichung wird nun nach Γ_β aufgelöst und sodann in den Ausdruck für die Zerfallsrate pro Energieintervall,

$$\frac{d^2 N_\beta}{dE_{\text{kin}} dt} = \frac{N_x \Gamma_\beta}{\Delta E_x^* \hbar} \quad (3.37)$$

($\Gamma_\beta/\hbar =$ mittlere Lebensdauer von C vor dem Zerfall in den Kanal β , $N_x/\Delta E_x^* =: D_x =$ mittlere Niveaudichte des Restkernes X innerhalb ΔE_x^*), eingesetzt. Man erhält:

$$\frac{d^2 N_\beta}{dE_{\text{kin}} dt} = \frac{k_\beta^2}{2\pi^2 \hbar} \frac{\langle \sigma_{\beta,c} \rangle}{g_\beta} D_x D_c^{-1}. \quad (3.38)$$

Da die Entropie S gleich dem Logarithmus der verfügbaren Quantenzustände ist,

$$S(E) = (k=1) \cdot \ln \left(\frac{D(E)}{D^0} \right), \quad (3.39)$$

ergibt sich:

$$\frac{d^2 N_\beta}{dE_{\text{kin}} dt} = \frac{k_\beta^2}{2\pi^2 \hbar} \frac{\langle \sigma_{\beta,c} \rangle}{g_\beta} \frac{D_x^0}{D_c^0} e^{S(A_x, T_x) - S(A_c, T_c)}. \quad (3.40)$$

D_c^0 ist die Einteilchen-Niveaudichte des Kerns C an der Fermi-Oberfläche. Sie stellt die Summe von Protonen- und Neutronen-Niveaudichten dar und wird näherungsweise durch $D_c^0 \approx 3A_c/(2E_{\text{Fermi}})$ beschrieben (vergl. [Boh75]). Analoges gilt für D_x^0 . Damit kann $D_x^0/D_c^0 \approx 1$ gesetzt werden. Unter Verwendung von $k_\beta^2 \hbar^2/(2m_\beta) = E_{\text{kin}}$ (m_β ist die reduzierte Masse von Ejektil und Restkern) findet man für die Verdampfungsformel letztendlich:

$$\frac{d^2 N_\beta}{dE_{\text{kin}} dt} = \frac{m_\beta}{g_\beta \pi^2 \hbar^3} E_{\text{kin}} \langle \sigma_{\beta,c} \rangle e^{S(A_x, T_x) - S(A_c, T_c)}. \quad (3.41)$$

Die Fragmententropien $S(A_x, T_x)$ und $S(A_c, T_c)$ werden nach dem in Abschnitt 3.2 vorgestellten Verfahren berechnet. Hierzu bestimmt man die Temperaturen aus Gleichung (3.8), wobei die freie Energie nur noch aus dem Term $F_{A,Z}^{\text{int}}$ besteht. Die Anregungsenergie E_c^* wird aus der für die Quelle gewählten Anregungsenergie berechnet. Die Anregungsenergie E_x^* gewinnt man aus der Energieerhaltung:

$$E^*(A_x, T_x) + E_{\text{kin}} + Q = E^*(A_c, T_c). \quad (3.42)$$

Die Variable Q steht für die Separationsenergie, die vom Kern C zur Abtrennung des Ejektils verbraucht wird.

Der Wirkungsquerschnitt $\langle \sigma_\beta \rangle$ wird näherungsweise durch

$$\langle \sigma_\beta \rangle = \pi r_0^2 (A_b^{1/3} + A_x^{1/3})^2 (1 - V_x/E_{\text{kin}}) \Theta(E_{\text{kin}} - V_x) \quad (3.43)$$

beschrieben, wobei Θ die Stufenfunktion, V_x die Coulomb-Schwelle für die Teilchenemission und A_b die Massenzahl des Teilchens b bezeichnet.

Die Gleichung (3.43) beruht auf der Annahme, daß in der inversen Reaktion $b + X \rightarrow C$ das Teilchen oberhalb der Coulomb-Schwelle vollständig absorbiert wird.

3.6 Numerische Realisierung

Sowohl aufgrund der komplexen Struktur der Bewegungsgleichungen (3.34) als auch im Hinblick darauf, daß im SM-Modell stochastische Größen berechnet werden, können die Vorhersagen des Modells nur mit Hilfe computerunterstützter Simulationsrechnungen getroffen werden.

Die Grundstruktur solch einer Simulationsrechnung ist in Abbildung 3.2 in Form eines Struktogramms dargestellt.

Hiernach werden zunächst die Nukleonenzahl A_0 des fragmentierenden Kerns, seine Anregungsenergie E^* , sein Aufbruchvolumen V_b (Break-up-Volumen, Freeze-out-Volumen), sowie die Zahl der Events N_E und die Zahl der Partitionen N_M eingelesen. Die Zahl der Partitionen dürfte im Prinzip nicht vorgegeben werden. Die Begrenzung der Fragmentationskanäle ist jedoch aus rechentechnischer Sicht für schwere Kerne unbedingt erforderlich. Denn selbst wenn man den

Kern als einkomponentiges System behandelt, d. h. den Isospin nicht berücksichtigt, ergibt sich aufgrund kombinatorischer Überlegungen für die Anzahl der Partitionen, P , eine exponentielle Abhängigkeit von der Nukleonenzahl ($A_0 \gg 1$) [AbS65]:

$$P(A_0) \approx \frac{1}{4 A_0 \sqrt{3}} e^{\pi \sqrt{2 A_0 / 3}}. \quad (3.44)$$

Für einen Goldkern gibt es demnach rund $3 \cdot 10^{12}$ verschiedene Partitionen. So immens viele Partitionen können natürlich nicht alle explizit berechnet werden. In der vorliegenden Arbeit wurde die Anzahl der Partitionen auf 6 Millionen festgelegt. Einen gewissen Anhaltspunkt dafür, daß damit die richtige Anzahl der Partitionen getroffen wurde, erhält man aus der Verteilung der mit diesen Partitionen berechneten thermodynamischen Wahrscheinlichkeiten W : Wenn die W -Werte, ihrer Größe nach sortiert, glatt abfallen, so kann man davon ausgehen, daß man den in der Natur realisierten Partitionen hinreichend nahe gekommen ist. Dies war in dieser Arbeit immer der Fall.

Nach dem Einlesen der Parameter wird N_M mal

- mit Hilfe eines Random-Generators eine Partition angefertigt,
- für jede Partition die Temperatur, die Entropie sowie die thermodynamische Wahrscheinlichkeit berechnet und
- es werden all diese Werte (einschließlich der Partition) abgespeichert, falls sich die Wahrscheinlichkeit der Partition unter den 2000 größten Werten befindet.

Um Speicherplatz und unnötige Rechenzeit zu sparen, werden nur 2000 und nicht alle N_M Partitionen abgespeichert. Hinsichtlich Gold auf Gold Reaktionen³ scheint dies ausreichend zu sein. Das ergab eine Rechnung, bei der die Massenverteilung (vor der Verdampfung) einmal mit 2000 und das andere Mal mit 4000 Partitionen berechnet wurde und kein Unterschied in den Massenverteilungen festgestellt werden konnte.

Nach der Vorauswahl der Partitionen werden die Größen, deren Mittelwerte berechnet werden sollen, initialisiert.

Danach wird für jedes Event

- eine von diesen 2000 Partitionen — entsprechend ihres W -Wertes — sowie die dazugehörigen Werte für die Temperatur und die Entropie ausgewählt.
- Sodann würfelt man die Fragmente der Partition in eine Kugel. Die Gewichtsfunktion g , nach der die Positionen der Fragmente verteilt werden, ist proportional zur Stufenfunktion,

$$g(\vec{r}_i(t=0)) \propto \Theta(R - |\vec{r}_i(t=0)|), \quad (3.45)$$

³Diese werden in Kapitel 5 analysiert.

mit

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| > R_i + R_j. \quad (3.46)$$

Zur Veranschaulichung und zur Erklärung der Symbole wurde der Sachverhalt in Abbildung 3.3 skizziert.

Als 2. Anfangsbedingung wählt man die Geschwindigkeiten der Fragmente nach der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung aus.

- Die Expansion des Fragmente-Systems wird nun mit Hilfe der in Gleichung (3.34) angegebenen Bewegungsgleichungen berechnet, wobei die Abdampfung leichter Teilchen gemäß Abschnitt 3.5 berechnet wird. Im wesentlichen sind für die Simulation der Teilchenverdampfung pro Zerfallsakt die folgenden Schritte auszuführen:

1.) Alle relevanten Zerfallswahrscheinlichkeiten

$$\lambda_{n,p,d,\dots} = \int_{V_z}^{E_c^* - E_z^*} \left(\frac{d^2 N_{bx}}{dE_{kin} dt} \right) dE_{kin} \quad (3.47)$$

(n = Neutron, p = Proton, d = Deuteron) berechnen.

- 2.) Die mittlere Lebensdauer τ des Kerns bestimmen, $\tau^{-1} = \sum_{\beta} \lambda_{\beta}$, und unter Benutzung des Zerfallsgesetzes den Zeitpunkt des Zerfalls würfeln.
 - 3.) Unter Verwendung der Zerfallswahrscheinlichkeiten λ_{β} den Ausgangskanal würfeln.
 - 4.) Mit einem Monte-Carlo-Verfahren die kinetische Energie E_{kin} nach der Funktion (3.41) zu wählen.
 - 5.) Die Bewegungsgleichungen bzgl. der neu entstandenen Teilchen modifizieren.
- Zu guter Letzt werden die Größen hochgezählt, deren Erwartungswerte berechnet werden sollen. Das Hochzählen muß natürlich nur am Schluß erfolgen, wenn die Größen von der Expansion des Systems abhängen. Dies trifft z. B. für die Gesamt- oder irgendeine Fragmentmultiplizität zu. Für die Berechnung der Break-up-Temperatur wäre hingegen das Hochzählen vor dem Würfeln der Fragmentpositionen angebracht.

Die letzte Sequenz des Struktogramms berücksichtigt die endgültige Berechnung der Erwartungswerte.

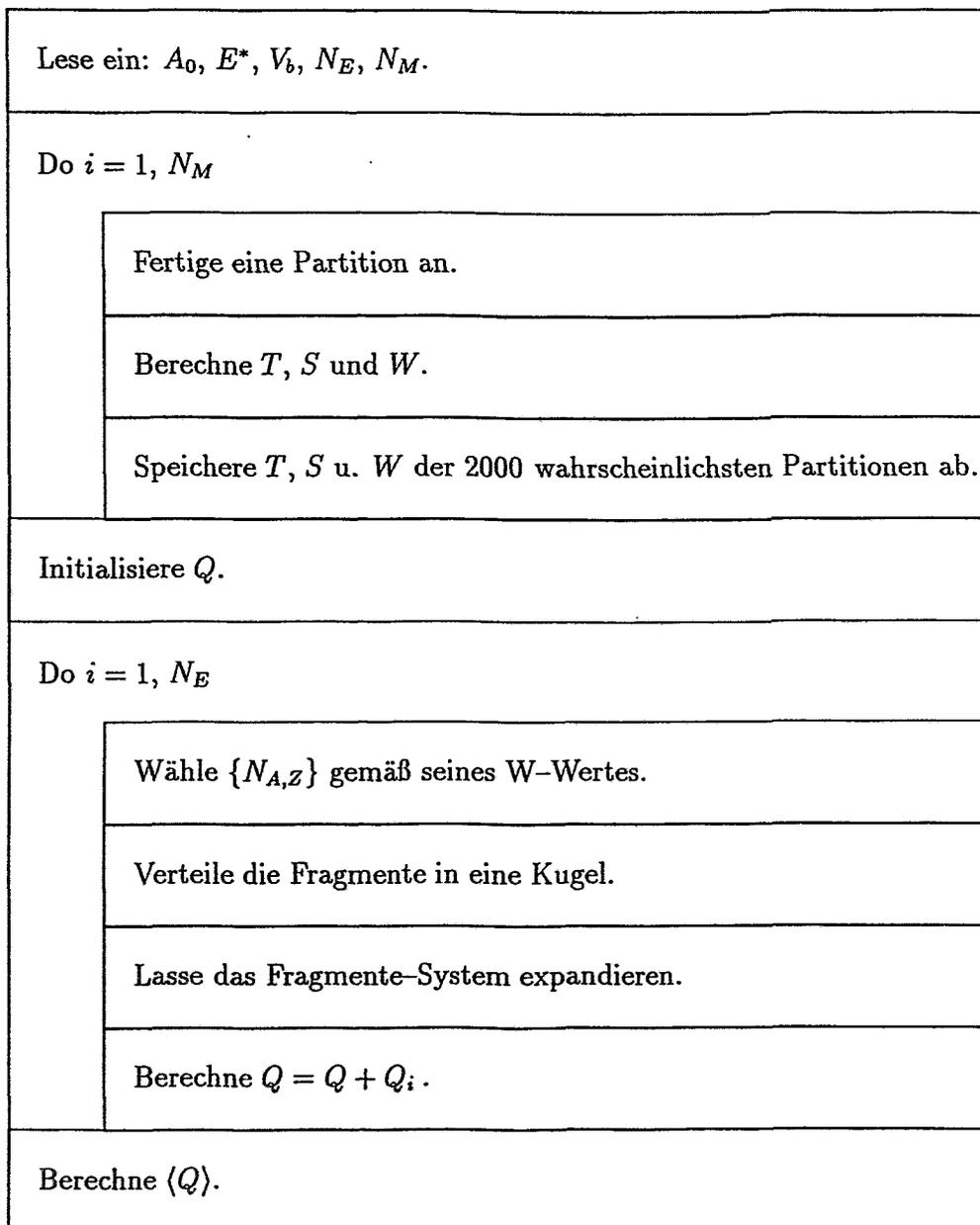


Abbildung 3.2: Struktogramm für die numerische Realisierung des SM-Modells.

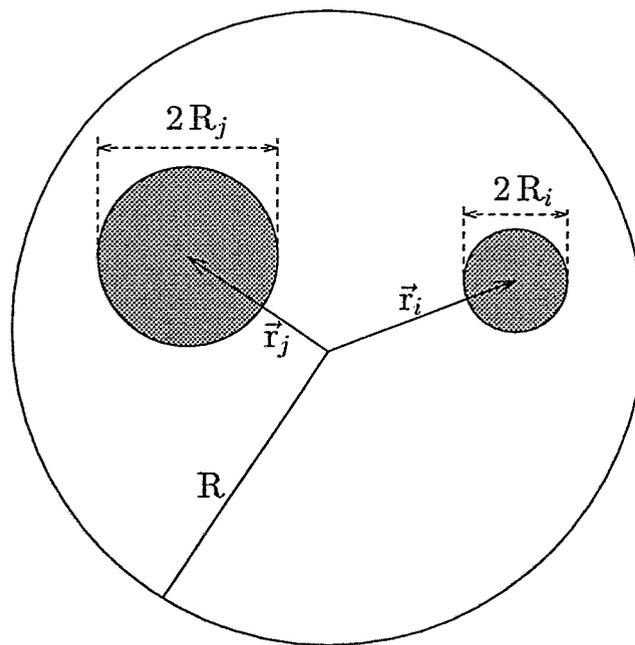


Abbildung 3.3: Verteilung von Fragmenten innerhalb einer Kugel.

Kapitel 4

Observable mittelergetischer Schwerionenreaktionen

Bei mittelergetischen Schwerionenreaktionen kommt es zu einem Nebeneinander verschiedenartiger Reaktionsprozesse. Dies erschwert naturgemäß das Auffinden geeigneter Observablen.

Im folgenden werden nun — auch im Hinblick auf das in Kapitel 5 zu formulierende Hybrid-Modell — einige markante Observablen mittelergetischer Schwerionenreaktionen diskutiert.

4.1 Der Fluß der Kernmaterie

Für das Verständnis der Reaktionsdynamik hinsichtlich mittelergetischer Schwerionenstöße ist der Fluß der Kernmaterie, d. h. die kollektive Bewegung der Nukleonen, von zentraler Bedeutung. Insbesondere beeinflusst der Fluß die Fragmentation, da er zum einen die Anregungsenergie des Systems mindert¹ und zum anderen sich auf die Korrelationen zwischen den Teilchen auswirkt². Der Fluß ist ferner sensitiv auf die Zustandsgleichung³. Die Zustandsgleichung ist nun aber (gewissermaßen) eine Eingabegröße von dynamischen Modellen, wie etwa dem BUU-Modell [Ber84], dem QMD-Modell [Aic86, Aic88, Boa88, Pei88] oder dem hydrodynamischen Modell [Sch74, Sto79a, Sto79b]. Daher kann man durch den Vergleich zwischen den über Computersimulationen berechneten Flußwerten und denen des Experimentes Aussagen über die Zustandsgleichung treffen.

Am einfachsten kann man den in der Reaktion insgesamt auftretenden Fluß abschätzen, in dem man die mittlere kinetische Energie⁴ pro Nukleon $\langle E \rangle / A$ über

¹Hierdurch wird eine Teilchen-Bindung begünstigt.

²Bei radial nach außen fließenden Teilchen vergrößern sich die Relativabstände der Teilchen. Dies wirkt einer Bindung entgegen.

³Und auf den Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitt. Dies wird im Abschnitt 5.2.8.3 demonstriert.

⁴Eines aus A Nukleonen bestehenden Fragmentes.

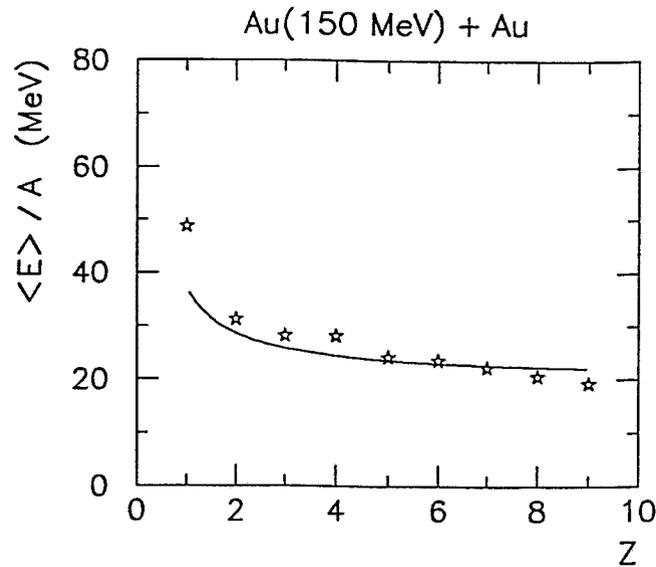


Abbildung 4.1: *Mittlere kinetische Energie pro Nukleon $\langle E \rangle / A$ als Funktion der Ladungszahl Z bzgl. Au(150 A·MeV) + Au Reaktionen. Es wurde $A = 2Z$ angenommen. Die experimentellen Werte stammen aus Referenz [Kot95].*

die Massenzahl A aufträgt und die Punkte durch

$$\frac{\langle E \rangle}{A} = \frac{3T}{2} \frac{1}{A} + E_{\text{flow}} \quad (4.1)$$

anfitet. Man nimmt hierbei also an, daß sich die mittlere kinetische Energie der Fragmente zusammensetzt aus einem thermischen Anteil, $3T/2$, und einem Fluß-Anteil, E_{flow} . Die Flußenergie ist demzufolge der Ordinatenwert von der Asymptote der Fit-Kurve. Zur Illustration dieses Sachverhalts sind in der Abbildung 4.1 die experimentellen Werte für eine Gold auf Gold Reaktion angefitet. Die Strahlenergie betrug 150 A·MeV/Nukleon. Der Fit ergab eine Temperatur von ca. 11 MeV und eine Flußenergie von ungefähr 21 MeV.

Für eine detaillierte Analyse des Flusses bezieht man den Fluß meist auf die Richtung, in die die Nukleonen fließen und spricht z. B. vom Seitwärtsfluß, Ausquetschfluß oder sphärischen Fluß (siehe nachfolgende Abschnitte).

Aufgrund des Seitwärtsflusses konnte gezeigt werden, daß die Nukleonenwechselwirkung nicht allein als eine Folge von einzelnen Nukleon-Nukleon-Stößen beschrieben werden kann, diese Annahme liegt dem Kaskadenmodell [Cug80, Yar79, Yar81] zugrunde, sondern daß kooperative Phänomene berücksichtigt werden müssen. Der Nachweis gelang anhand Niob auf Niob Kollisionen bei einer Strahlenergie von 400 A·MeV, indem die experimentelle Flußwinkelverteilung [Gus84] mit der Flußwinkelverteilung des Kaskadenmodells und mit der des hydrodynamischen Modells [Buc81a, Buc81b, Buc83a, Buc83b] — im hydro-

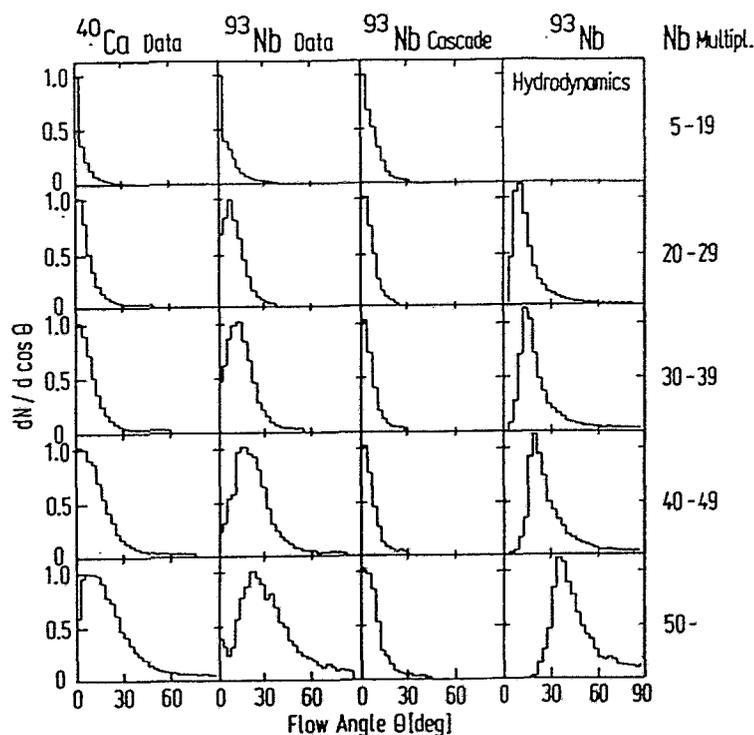


Abbildung 4.2: Vergleich der experimentellen Flußwinkelverteilungen mit den Ergebnissen des Kaskadenmodells und des hydrodynamischen Modells für Nb + Nb Kollisionen bei $E_{\text{Lab}} = 400 \text{ A} \cdot \text{MeV}$; nach [Rit85]. Die Ergebnisse sind in Multiplizitätsintervalle (welche wiederum zu Stoßparameterintervalle korrespondieren; vergl. Abschnitt 4.5.3) aufgeteilt.

dynamischen Modell hängt der Flußwinkel von der Zustandsgleichung (Druck als Funktion von Dichte und Temperatur) ab, welche direkt in die Bewegungsgleichungen eingeht — verglichen wurde. Der Vergleich der Flußwinkelverteilungen ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Man erkennt, daß die hydrodynamischen Rechnungen den Verlauf der experimentellen Kurven qualitativ gut widerspiegeln, wohingegen dies bei den Rechnungen mit dem Kaskadenmodell nicht der Fall ist.

4.2 Die Reaktionsebene und die Flüsse

Grundlegend für die Beschreibung einer Schwerionenreaktion ist der Begriff der Reaktionsebene. Sie ist die Ebene, in welcher sich (im Schwerpunktsystem) die um einen Stoßparameter b ($b \neq 0 \text{ fm}$) versetzten Mittelpunkte von Projektil- und Targetkern aufeinander zubewegen; siehe linkes Bild der Abbildung 4.3. Üblicherweise wählt man die Flugrichtung des Projektils als positive z -Richtung.

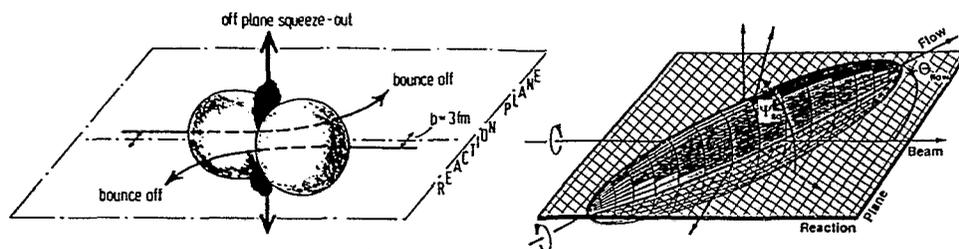


Abbildung 4.3: Beschreibung einer Kern-Kern-Kollision mit Bezug auf die Reaktionsebene. Auf der linken Seite ist die seitliche Ablenkung der Fragmente (Bounce-off) und das Ausquetschen von Kernmaterie senkrecht zur Reaktionsebene (Squeeze-out) für einen Stoßparameter $b \approx 3 \text{ fm}$ angedeutet (entnommen aus [Nei90]). Auf der rechten Seite ist der Impulsellipsoid gezeichnet (nach [Gut90]). Der Seitwärtsfluß ist längs zur größten Halbachse gerichtet und um den Flußwinkel Θ_{flow} gegenüber der Strahlachse ausgelenkt. Der Ausquetschfluß ist längs zur zweitgrößten Halbachse gerichtet; er schließt mit der Reaktionsebene den Squeeze-Winkel Ψ_{sq} ein.

Weiterhin soll die y -Koordinate des Projektils null, seine x -Koordinate hingegen positiv sein und der Mittelpunkt des Targetkerns soll auf der z -Achse liegen. Die Reaktionsebene ist nach dieser Konvention also die xz -Ebene.

Die experimentelle Bestimmung der Reaktionsebene ist nicht so einfach, da hierzu (für jedes Event) die Richtung des Stoßparameters⁵ festgelegt werden muß.

In den folgenden zwei Abschnitten werden nun zwei Verfahren für die Bestimmung der Reaktionsebene vorgestellt.

4.2.1 Energieflußtensor-Methode und Fluß-Form

Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Reaktionsebene ist ein Verfahren, welches auf der Konstruktion eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe, des Energieflußtensors Θ beruht [Cug83]. Der Energieflußtensor ist definiert als,

$$\Theta_{ij} := \frac{1}{2M_E} \sum_{\nu=1}^{M_E} \frac{p_i^{(\nu)} p_j^{(\nu)}}{m_\nu}. \quad (4.2)$$

⁵Mit „Richtung des Stoßparameters“ ist die Richtung der x -Achse gemeint.

Die Indizes i, j bezeichnen die Impulskomponenten ($i, j = x, y, z$ bzw. 1, 2, 3) und ν durchläuft alle gemessenen, geladenen Teilchen (mit Massen m_ν) eines Events. Da der Energieflußtensor symmetrisch ist, besitzt die ihm zugeordnete Matrix drei reelle Eigenwerte: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. O.B.d.A. wird in dieser Arbeit $\lambda_3 \geq \lambda_2 \geq \lambda_1 \geq 0$ gewählt. Die zu diesen Eigenwerten gehörenden orthonormalen Eigenvektoren werden mit $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ notiert. Sie sind die Hauptachsen des zu Θ gehörigen Ellipsoids (Impulsellipsoids) und bilden somit die Basisvektoren eines Koordinatensystems (Hauptachsensystems) bzgl. dessen die Matrix Θ diagonal ist. Der zum größten Eigenwert λ_3 gehörende Eigenvektor \vec{e}_3 weist in Richtung des größten Energieflusses. Er wird deshalb meist als Flußachse bezeichnet. Die Elongation der Ellipse (aspect ratio) ist durch das Verhältnis der größten zur kleinsten Hauptachse gegeben:

$$R_{31} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}. \quad (4.3)$$

Man definiert nun bei diesem Verfahren den Normalenvektor \vec{n}_0 der Reaktionsebene als Kreuzprodukt von Strahlachse \vec{e}_z und Flußachse, $\vec{n}_0 := \vec{e}_z \times \vec{e}_3$.

Bei semizentralen Stößen — das sind Stöße, die sich bei einem Stoßparameter $b \leq 8$ fm ereignen — nennt man den zum größten Energiefluß korrespondierenden Teilchenfluß im allgemeinen Seitwärtsfluß. Der Seitwärtsfluß wird meist noch genauer spezifiziert. Man spricht vom Seitwärtsfluß der Partizipanten⁶ (Side-Splash) und vom Seitwärtsfluß der Spektatoren⁷ (Bounce-off). Der Winkel, den die Flußachse mit der Strahlachse einschließt, heißt Flußwinkel: $\Theta_{\text{flow}} = \arccos(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_z)$; vergleiche rechtes Bild von Abbildung 4.3.

Neben dem Seitwärtsfluß beobachtet man auch — insbesondere bei zentralen Stößen, d. h. bei Stößen, die unter einem Stoßparameter $b \leq 3$ fm ablaufen — den sogenannten Off-plane-squeeze-out (vergleiche [Gut90] und darin enthaltene Referenzen). Hierunter versteht man das Ausquetschen von Kernmaterie in Richtung desjenigen Eigenvektors (d. h. \vec{e}_2), der zum mittleren Eigenwert (d. h. λ_2) gehört. In dieser Arbeit wird der Off-plane-squeeze-out als „Ausquetschfluß“ bezeichnet. Der Eigenvektor (bzw. die zweitgrößte Halbachse) schließt mit der Reaktionsebene den Squeeze-Winkel Ψ_{sq} ein; siehe abermals rechtes Bild von Abbildung 4.3. Wie man anhand Abbildung 4.4 erkennt, ist die Ψ_{sq} -Verteilung symmetrisch um 90° und besitzt bei 90° einen Peak. Im allgemeinen erfolgt also das Ausquetschen der Kernmaterie senkrecht zur Reaktionsebene. Man hat hierbei die Vorstellung, daß die hochenergetischen Teilchen des Hochdichtebereiches senkrecht zur Reaktionsebene austreten müssen, da sie von den (noch „kalten“) Projektil- und Targetresten umgeben sind, die ein Entweichen in eine andere Richtung verhindern; siehe wiederum linke Seite von Abbildung 4.3.

⁶Eine schöne Erläuterung des Partizipanten-Spektatoren-Bildes findet sich auf Seite 133 von Referenz [Hue85].

⁷Bzw. der Rest-Kerne.

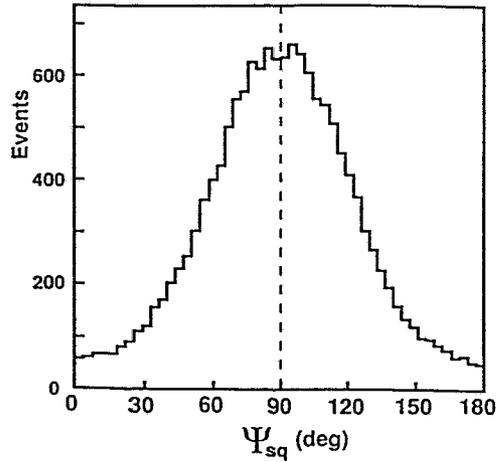


Abbildung 4.4: *Squeeze-Winkel-Verteilung für semizentrale Gold auf Gold Kollisionen bei einer Strahlenergie von 400 A-MeV (entnommen aus [Gut90]).*

Der Ausquetschfluß wurde von Referenz [Sch74], der Side-Splash von [Bau75, Sto80] und der Bounce-off von [Sto79a, Sto79b] vorhergesagt. Die experimentelle Bestätigung des Ausquetschflusses gelang [Gut89], der Seitwärtsfluß (Side-Splash und Bounce-off) konnte von Referenz [Gus84] experimentell verifiziert werden.

Das zum Energieflußtensor korrespondierende Ellipsoid wird durch sechs Variablen charakterisiert: Den drei Eigenwerten, sie beschreiben die Form des Ellipsoids, und den drei Euler'schen Winkeln — sie legen die Orientierung des Ellipsoids fest. Zwei von den drei Winkeln, der Flußwinkel und der Squeeze-Winkel, wurden bereits besprochen. Der dritte Winkel ist der Azimutalwinkel von \vec{e}_3 . Er wird meist als freier Parameter gehandhabt, um die Reaktionsebenen verschiedener Events zur Deckung zu bringen. Dadurch wird es möglich, die Teilchenspuren verschiedener Events zu kombinieren.

Mit den drei Eigenwerten kann man sogenannte globale Variablen (vergleiche Referenz [Cug83]) festlegen. Von ihnen reichen meist ein oder zwei aus, um die Form des Ellipsoids zu charakterisieren. Beispiele solcher Variablen sind: die Sphärizität S (sie ist ein Maß für die „Kugelförmigkeit“ des Ellipsoids),

$$S := \frac{3}{2} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \quad (4.4)$$

und die Koplanarität C (sie ist ein Maß für die „Plattheit“ des Ellipsoids),

$$C := \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}. \quad (4.5)$$

Die Verwendung des Energieflußtensors ist nicht ganz unumstritten, falls viele Teilchen nicht detektiert werden [Bon90, Dan83]. Denn der dadurch be-

wirkte Fehler kann sich leicht merklich auswirken, da in den Energieflußtensor die Teilchenimpulse quadratisch eingehen. Mit der neuen Generation der (4π) -Detektoren dürfte dieses Problem jedoch bewältigt werden.

4.2.2 Transversalimpulsanalyse und Fluß-Stärke

Ein anderes, häufig benutztes Verfahren zur Festlegung der Stoßparameter-richtung ist die Transversalimpulsanalyse von P. Danielewicz und G. Odyniec [Dan85]. Bei diesem Verfahren konstruiert man zunächst aus allen, zur Strahlachse senkrecht stehenden Teilchenimpulse \vec{p}_\perp^i einen Vektor \vec{Q} :

$$\vec{Q} := \sum_{i=1}^{M_E} \omega_i \vec{p}_\perp^i, \quad (4.6)$$

wobei M_E für die Multiplizität der detektierten (geladenen) Teilchen des jeweiligen Events E steht. Die ω_i sind Gewichtungsfaktoren. Für sie gilt,

$$\omega_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } y^i > y_0 + \delta, \\ -1, & \text{falls } y^i < y_0 - \delta, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.7)$$

In der letzten Formel bezeichnet y^i die Rapidity des Teilchens „ i “ und y_0 die Schwerpunksrapiidity. Der (freie) Parameter δ dient dazu, um die Teilchen mit mittleren Rapiditäten aus der Summation auszuschließen. Diese Teilchen haben aufgrund zahlreicher Stöße die „Erinnerung“ an die Reaktionsebene verloren, wodurch die Bestimmung der Reaktionsebene im allgemeinen verfälscht werden würde. Der Parameter δ wird meist mit 0.1 veranschlagt. Die unterschiedlichen Vorzeichen der Gewichtungsfaktoren verhindern, daß sich die Transversalimpulse \vec{p}_\perp^i zum Nullvektor addieren, was aufgrund der Impulserhaltung sonst der Fall wäre. Analog zur Energieflußtensor-Methode erhält man nach Normierung von \vec{Q} , $\vec{e}_Q := \vec{Q}/|\vec{Q}|$, den Normalenvektor der Reaktionsebene durch Bildung des Kreuzproduktes: $\vec{n}_0 = \vec{e}_Q \times \vec{e}_z$.

Mit dem Vektor \vec{Q} kann man nun den Impuls eines jeden Teilchens in die Reaktionsebene projizieren:

$$p_x^i := \vec{p}^i \cdot \frac{\vec{Q}}{|\vec{Q}|}. \quad (4.8)$$

Weiterhin kann man den Rapiditysbereich in gleichgroße Intervalle unterteilen und für jedes Intervall über alle p_x^i mitteln, d. h. für jedes Intervall $\langle p_x \rangle := k^{-1} \sum_{i=1}^k p_x^i$ berechnen. Falls der Vektor \vec{Q} das Ergebnis zufällig orientierter Teilchenimpulse ist, so würde man auf dem ersten Blick für jedes Intervall $\langle p_x \rangle = 0$ erwarten, hingegen $\langle p_x \rangle \neq 0$ (für alle Intervalle mit $\omega_i \neq 0$) im Falle einer

gerichteten Bewegung. Auf dem ersten Blick hätte man demnach ein Verfahren zur Identifikation des Seitwärtsflusses gefunden. Es zeigte sich jedoch, daß auch für zufällig orientierte Teilchenimpulse die Mittelwerte $\langle p_x \rangle \neq 0$ sind, da in den Vektor \vec{Q} alle (!) Teilchenimpulse eingehen und somit durch die Projektion eines Teilchens in die Reaktionsebene eine Autokorrelation erzeugt wird. Zur Lösung dieses Problems wird bei der Summation in Gleichung (4.6) der Impuls desjenigen Teilchens ausgenommen, welches in die Reaktionsebene projiziert werden soll. D. h. man definiert für jedes Teilchen ν eine individuelle Reaktionsebene:

$$\vec{Q}_\nu := \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{M_B} \omega_i \vec{p}_1^i. \quad (4.9)$$

Mit der Verwendung von \vec{Q}_ν statt von \vec{Q} hat man nun in der Tat ein Verfahren zur Identifikation des Seitwärtsflusses gefunden. Die Mittelwerte $\langle p_x \rangle$ werden meist auf die Nukleonenzahl normiert ($\langle p_x/A \rangle$). Die Größe $\langle p_x/A \rangle$ stellt ein Maß für den in der Reaktionsebene verlaufenden Seitwärtsfluß innerhalb des entsprechenden Rapiditätsintervalls dar. Als ein Maß für den kollektiven (sich auf mehrere Rapiditätsintervalle beziehenden) Impulstransfer der Partizipanten wird üblicherweise die Steigung der $\langle p_x/A \rangle$ -Kurve im Bereich der Schwerpunktsrapidität gewählt. Dieses Maß wird gemein hin als Stärke des Seitwärtsflusses bezeichnet. Zur Veranschaulichung des eben Gesagten ist in Abbildung 4.5 die $\langle p_x/A \rangle$ -Kurve für eine Au(250 A·MeV) + Au Reaktion gezeigt.

In Abbildung 4.6 ist die mittlere⁸ azimutale Winkelkorrelation zwischen einem Teilchen und der Reaktionsebene, d. h.

$$\left\langle \frac{p_x}{|\vec{p}_\perp|} \right\rangle = \left\langle \frac{\vec{p}_\perp}{|\vec{p}_\perp|} \cdot \frac{\vec{Q}}{|\vec{Q}|} \right\rangle = \langle \cos(\vec{e}_\perp, \vec{e}_Q) \rangle, \quad (4.10)$$

als Funktion der Rapidität dargestellt. Hieraus ist ersichtlich, daß schwerere Fragmente bevorzugt in Flußrichtung emittiert werden. Dieses Phänomen kann man verstehen (vergl. hierzu [Cse83, Sto81, Sto82, Bar94a]), wenn man für die Geschwindigkeit eines Teilchens nur einen thermischen Anteil und einen Flußanteil berücksichtigt. Da die thermische Geschwindigkeit eines Teilchens (welches die Massenzahl A besitzt) proportional zu $\sqrt{T/A}$ (T = Temperatur) ist, dominiert die Flußgeschwindigkeit um so mehr, je schwerer das Fragment ist. Somit werden schwerere Fragmente stärker um die Flußachse verteilt als leichtere.

4.2.3 Zusammenhang zwischen Fluß-Form und Fluß-Stärke

Im Abschnitt 4.2.1 wurde dargelegt, daß bei der Energieflußtensor-Methode die Information über die kollektive Nukleonenbewegung in den drei Eigenwerten und

⁸Die Mittellung wird ebenfalls für jedes Intervall durchgeführt.

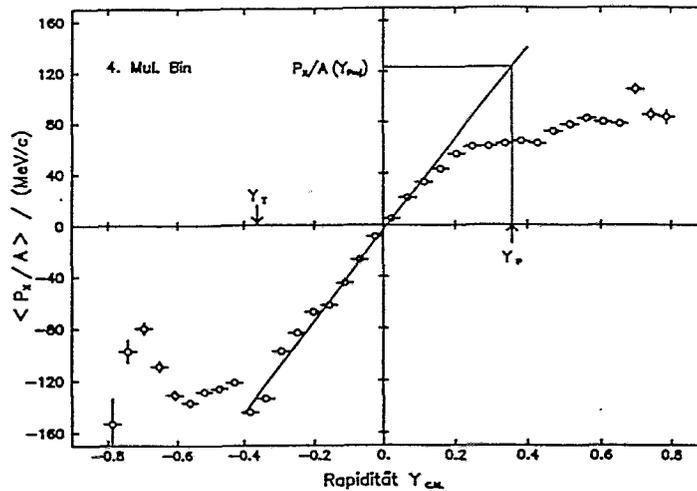


Abbildung 4.5: Mittelwerte der in die Reaktionsebene projizierten Transversalimpulse als Funktion der Rapidität am Beispiel einer $Au(250 A \cdot \text{MeV}) + Au$ Reaktion (nach [Kam86]). Die Steigung im Bereich der Schwerpunktsrapidität ist ein Maß für den kollektiven Impulstransfer der Partizipanten.

den drei Euler'schen Winkeln enthalten ist. Dagegen ist bei der Transversalimpulsanalyse die Steigung der $\langle p_x/A \rangle$ -Kurve ein Maß für den kollektiven Impulstransfer der Nukleonen.

Beschränkt man sich von den sechs Größen der Energieflußtensor-Methode auf den Flußwinkel und die Elongation, so kann der Zusammenhang mit der über die Transversalimpulsanalyse bestimmten Steigung der $\langle p_x/A \rangle$ -Kurve geschrieben werden als (vergl. [Kam86]),

$$\left. \frac{d}{dp_x} \langle p_x/A \rangle \right|_{p_x=0} = \frac{(R_{31} - 1) \sin(\Theta_{\text{flow}}) \cos(\Theta_{\text{flow}})}{R_{31} \cos^2(\Theta_{\text{flow}}) + \sin^2(\Theta_{\text{flow}})}. \quad (4.11)$$

Da bei der Energieflußtensor-Methode auch die Spektatorenbeiträge eingehen, gilt diese Formel sozusagen nur in „erster Näherung“. Weiterhin ist der besonders interessante Zusammenhang zwischen der Steigung der $\langle p_x/A \rangle$ -Kurve (Stärke des Seitwärtsflusses) und dem Flußwinkel experimentell schwer zugänglich, da für eine hinreichend genaue Bestimmung der Elongation nahezu alle Teilchen detektiert werden müssen, um die Schwankungen in den Eigenwerten des Energieflußtensors möglichst gering zu halten.

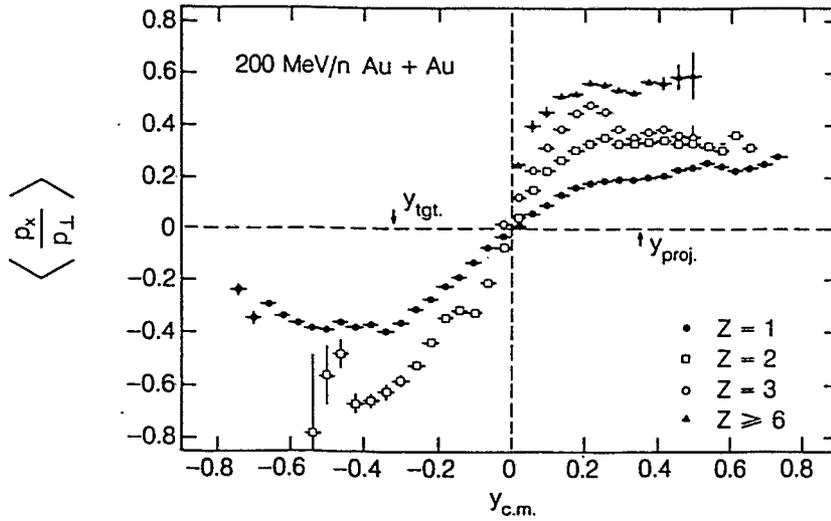


Abbildung 4.6: Azimutale Winkelkorrelation verschiedener Fragmente um die Reaktionsebene als Funktion der Rapidität bzgl. Au(200 A-MeV) + Au Reaktionen (entnommen aus [Dos87]).

4.3 Der sphärische und der radiale Fluß

Im Hinblick auf das in Kapitel 5 zu konstruierende Hybrid-Modell hat es sich als erforderlich herausgestellt, weitere kollektive Bewegungsformen der Nucleonen zu berücksichtigen: den sphärischen Fluß und den radialen Fluß (vergl. [Hei94, Hei95]).

Zur Bestimmung der Formel für die sphärische Flußenergie wird von einem zentralen Schwerionenstoß zweier gleich schwerer Ionen ausgegangen. Die Beschreibung erfolgt im Schwerpunktsystem.

Zunächst wird der Impuls eines Nucleons in einen „individuellen“ Anteil \vec{p}_{ind} und einen „globalen“ Anteil \vec{p}_{flow}^{sph} (bzw. Flußanteil) aufgespalten:

$$\vec{p} = \vec{p}_{ind} + \vec{p}_{flow}^{sph}. \quad (4.12)$$

Der individuelle Anteil ist von Nucleon zu Nucleon verschieden. Der globale Anteil ist für alle Nucleonen gleich; er sei ferner proportional zum Radiusvektor \vec{r} (dies wird durch die Phasenraumverteilung der BUU-Rechnung nahegelegt):

$$\vec{p}_{flow}^{sph}(\vec{r}) = \alpha \vec{r}. \quad (4.13)$$

Bei zentralen Stößen zweier gleich schwerer Ionen sollte der globale Anteil so stark dominieren, daß die Nucleonenimpulse \vec{p}_i , aufgetragen über ihren Radiusvektor \vec{r}_i , längs einer Geraden liegen. Für die Beträge ($p_i \equiv |\vec{p}_i|, r_i \equiv |\vec{r}_i|$) ist der Sachverhalt in Abbildung 4.7 dargestellt. Zur Bestimmung der Geraden (des

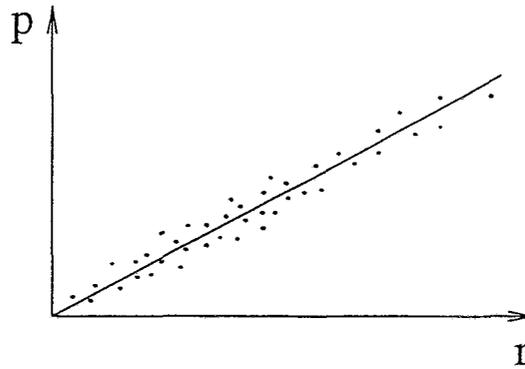


Abbildung 4.7: Erläuterung zur Bestimmung des sphärischen Flusses.

globalen Anteils) ist die Konstante α zu berechnen. Dies geschieht nach der Methode der kleinsten Quadrate: Aus der Forderung

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i - \alpha \vec{r}_i)^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.14)$$

ergibt sich für α

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N \vec{r}_i^2}. \quad (4.15)$$

N bezeichnet hierbei die Anzahl der Nukleonen. Für die sphärische Flußenergie der Nukleonen,

$$E_{\text{flow}}^{\text{sph}} := \frac{1}{2Nm_N} \sum_{i=1}^N (\vec{p}_{\text{flow},i}^{\text{sph}})^2, \quad (4.16)$$

erhält man nun unter Verwendung von Gleichung (4.15) und (4.13):

$$E_{\text{flow}}^{\text{sph}} = \frac{(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i)^2}{2m_N N \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^2}, \quad (4.17)$$

wobei m_N für die Nukleonenmasse steht.

Für eine anisotrope kollektive Nukleonenbewegung kann die obige Herleitung auf jede Komponente einzeln angewandt werden. Dies führt für die Flußenergie in k -Richtung auf:

$$E_{\text{flow}}^k = \frac{(\sum_{i=1}^N p_i^k r_i^k)^2}{2m_N N \sum_{i=1}^N (r_i^k)^2}. \quad (4.18)$$

Die Energien E_{flow}^1 , E_{flow}^2 und E_{flow}^3 werden als radiale Flußenergien bezeichnet. Im Anhang A wird allgemein gezeigt, daß die folgende Beziehung zwischen der

sphärischen Flußenergie, der Summe der radialen Flußenergien und der Spur des Energieflußtensors (rechts) gilt:

$$E_{\text{flow}}^{\text{sph}} \leq \sum_{k=1}^3 E_{\text{flow}}^k \leq \sum_{k=1}^3 \Theta_{kk}, \quad (4.19)$$

wobei hinsichtlich des Energieflußtensors (Gl. (4.2)) $M_E = N$ und $m_\nu = m_N$ ($\forall \nu = 1, \dots, N$) gesetzt wurde.

4.4 Das Abstoppen

Eng mit dem Materiefluß verbunden ist das sogenannte Abstoppen (Stopping) der Kernmaterie. Daß bei einer (zentralen) Kern-Kern-Reaktion die Kerne abgestoppt werden ist keineswegs so trivial, wie es vielleicht auf den ersten Blick scheinen mag, wenn man sich an der täglichen Erfahrung orientiert und bei einer Schwerionenkollision an die Kollision zweier Schneebälle denkt. In der Tat könnte man aufgrund des Bjorken-Modells bei ultrarelativistischen Energien, d. h. bei Strahlenergien oberhalb einiger 100 A·GeV, eine Transparenz der Kernmaterie erwarten, die dazu führt, daß die Projektil- und Targetnukleonen nach dem Stoß kinematisch in völlig getrennten Bereichen liegen. Der Bereich dazwischen sollte mit hoher Energiedichte erfüllt sein und könnte Aufschluß über die in harten Quark-Quark-Stößen erzeugten Strings geben.

Das Abstoppen der Kernmaterie hängt nicht nur von der Strahlenergie, sondern auch von der Größe der Kerne ab. Es ist weiterhin Voraussetzung für eine Äquilibration des Nukleonensystems — welche wiederum notwendig für eine statistische Beschreibungsweise ist.

Da das Abstopfvermögen der Kernmaterie wesentlich von den Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitten abhängt, kann man hieran auf eben diese Wirkungsquerschnitte im begrenztem Umfang rückschließen. In dieser Arbeit wird das Stopping über die Größe *ERAT* (siehe [Rei92]) charakterisiert.

Die Größe *ERAT* ist definiert als das Verhältnis der Summe aller transversalen kinetischen Fragmentenergien $p_{\perp,i}^2/(2m_i)$ zur Summe aller longitudinalen kinetischen Fragmentenergien $p_{\parallel,i}^2/(2m_i)$ (bezogen auf das Schwerpunktsystem):

$$ERAT \equiv \frac{\sum_i^N p_{\perp,i}^2/m_i}{\sum_i^N p_{\parallel,i}^2/m_i} \Big|_{p_{\parallel} > 0}. \quad (4.20)$$

Summiert wird hierbei nur über die in die Vorwärtshemisphäre emittierten, geladenen Fragmente. In der BUU-Simulation werden nur Nukleonen (Pseudoteilchen) propagiert, deshalb gilt: $m_i = m_N, \forall i \in [1, \dots, N]$.

Für den Vergleich mit dem Experiment muß die Verteilung der *ERAT*-Werte

berechnet werden. Da die *ERAT*-Verteilung sensitiv auf die Finite-Number-Fluktuationen ist, muß man bei der numerischen Simulation festlegen, welche Pseudoteilchen zu einem Event gehören. In dieser Arbeit wurde diesbezüglich definiert (so, wie es durch die Parallelensemble-Methode nahegelegt wird), daß die Pseudoteilchen eines (!) Parallel-Runs zu einem Event gehören. Die *ERAT*-Verteilung für eine Au(150 A·MeV) + Au Reaktion konnte dann numerisch folgendermaßen generiert werden (vergl. [Hei95]):

- Für die Stoßparameter $b = 0.0, 0.5, 1.0, \dots, 15.0$ fm wurde pro Parallel-Run der *ERAT*-Wert nach einer Zeit von 100 fm/c (bezogen auf den Moment, bei dem sich die beiden Kerne berühren) gemäß Formel (4.20) berechnet. Hierbei wurde die Detektor-Routine der FOPI-Kollaboration [Kot94] verwendet. Die Transformation der Teilchenimpulse vom Schwerpunktsystem in das Laborsystem wurde relativistisch durchgeführt.
- Sodann wurden die *ERAT*-Werte in *ERAT*-Bins der Breite 0.04 „einsortiert“. Beim Einsortieren wurde beachtet, daß ein Stoßparameter um so häufiger auftritt, je größer sein Wert ist. Wenn beispielsweise ein *ERAT*-Wert x zu einem Stoßparameter $b = y$ fm gehört, dann wurde der Wert des *ERAT*-Bins, welcher den Wert x enthält, um y hochgezählt (und nicht etwa um 1).
- Schließlich wurde die Verteilung so normiert, daß die Fläche unter der $(d\sigma/dERAT)$ -Kurve den totalen Wirkungsquerschnitt von 7000 mb ergibt.

Für die Diskussion der *ERAT*-Verteilung ist es hilfreich, zuvor auf den Zusammenhang zwischen den *ERAT*-Werten und den Stoßparameterwerten einzugehen. Hierfür wurden in Abbildung 4.8 die *ERAT*-Werte in Abhängigkeit vom Stoßparameter aufgetragen. Die *ERAT*-Werte wurden mit dem unter Abschnitt 2.3 beschriebenen BUU-Programm für drei verschiedene Parameterisierungen der Nuklearen Zustandsgleichung (siehe Gln. (2.43), (2.44) und (2.45)) und unter Annahme eines idealen Detektors berechnet. Man erkennt, daß sich die verschiedenen Parameterisierungen der Nuklearen Zustandsgleichung nicht sonderlich auf die *ERAT*-Werte auswirken. Des weiteren entnimmt man der Abbildung, daß der Graph streng monoton fällt. Demnach ist es im Prinzip möglich, anhand des *ERAT*-Wertes auf den Stoßparameter zu schließen. In der Praxis, d. h. bei Verwendung eines realen Detektors, kommt es allerdings aufgrund der Detektorakzeptanz (Geometrie, Energieschwellen) zu Verzerrungen. So können mit dem FOPI-PhaseI-Detektor aufgrund des 30° -Öffnungswinkels viele Transversalimpulse nicht erfaßt werden, wodurch die Bestimmung der *ERAT*-Werte für alle Stoßparameter $b \lesssim 2$ fm nicht mehr hinreichend genau durchgeführt werden kann [Kot94].

Für die nun folgende Diskussion der *ERAT*-Verteilung genügt es jedoch zu wissen, wie die *ERAT*-Werte prinzipiell mit den Stoßparametern in Verbindung

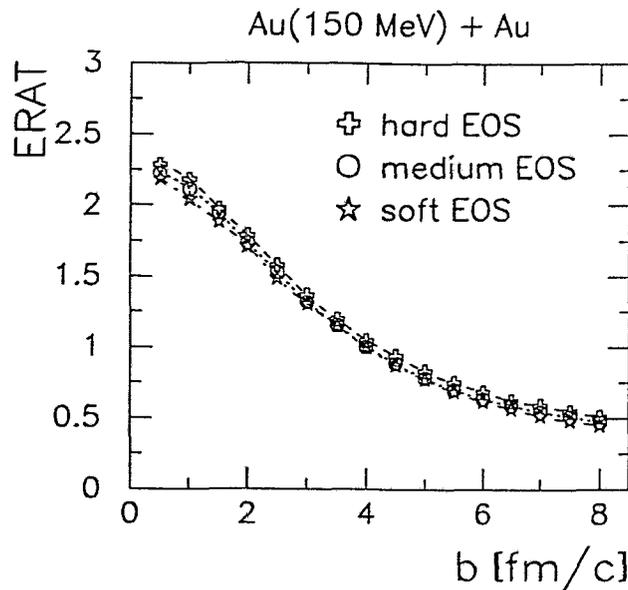


Abbildung 4.8: $ERAT$ -Werte in Abhängigkeit vom Stoßparameter für drei verschiedene Parameterisierungen der Nuklearen Zustandsgleichung (EOS). Die $ERAT$ -Werte wurden mit einem BUU-Programm unter Annahme eines idealen Detektors für eine Au(150 A·MeV) + Au Reaktion berechnet.

stehen. Die $ERAT$ -Verteilung ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Wie schon in Abbildung 4.8 festgestellt, existiert kein nennenswerter Unterschied bzgl. der verschiedenen Parameterisierungen der Nuklearen Zustandsgleichung, wenngleich die mit der „weichen“ Zustandsgleichung berechneten Werte eine Idee besser mit den experimentellen Daten übereinstimmen. Im Bereich $0.4 < ERAT < 1.2$ ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ausgesprochen gut. Dieser Bereich ist für die Analyse semizentraler Kollisionen (hier ist der Stoßparameter $b \leq 8$ fm) besonders wichtig⁹. Der Unterschied zu den experimentellen Werten im Bereich $0.2 < ERAT < 0.4$ kommt wahrscheinlich dadurch zustande, daß in der BUU-Simulation nur Nukleonen und keine Fragmente berücksichtigt werden, dagegen die Fragmente die Dynamik für Stoßparameter $b > 8$ fm wesentlich beeinflussen. Die Diskrepanz zwischen den theoretischen und experimentellen Werten für $ERAT > 1.2$ ist hauptsächlich die Folge einer geringen Testteilchenzahl.

Insgesamt gesehen stimmen die berechneten Werte gut mit den experimentellen Daten überein. Die Parameterisierung der Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitte scheint somit vernünftig zu sein.

Zur Abrundung des Stopping-Bildes wird in Abbildung 4.10 die Streuwinkelverteilung, eine Teilchenverteilung, gezeigt (vergl. [Hei95]). Sie ist für sehr

⁹Semizentrale Kollisionen sind Gegenstand der Untersuchungen in Kapitel 5.

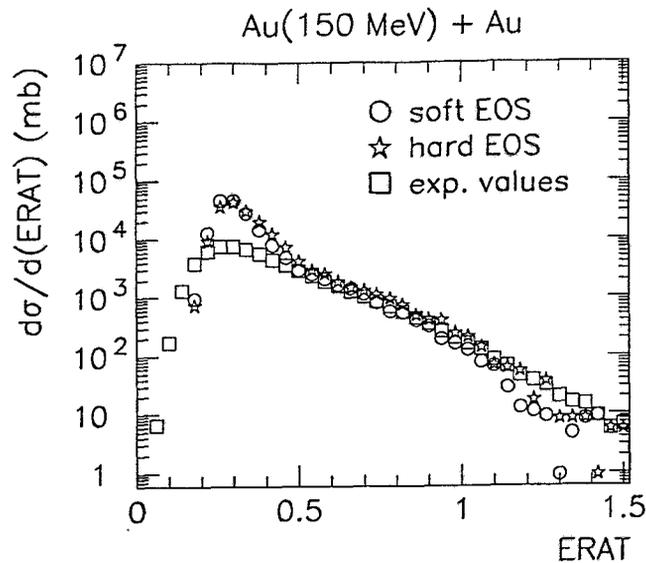


Abbildung 4.9: *ERAT*-Verteilung bzgl. $Au(150 \text{ A} \cdot \text{MeV}) + Au$ Reaktionen. Die Werte der BUU-Simulation beziehen sich einmal auf die weiche Zustandsgleichung (Kreise) und einmal auf die harte Zustandsgleichung (Sterne). Die experimentellen Werte stammen aus Referenz [Wie93].

zentrale Stöße (Stoßparameter $b \leq 1 \text{ fm}$) berechnet worden, da hier Kompressionseffekte besonders deutlich hervortreten. Experimentelle Daten sind diesbezüglich noch nicht verfügbar. Anhand der Abbildung erkennt man, daß für $b \leq 0.5 \text{ fm}$ die Verteilung bei 90° eine Erhöhung aufweist und diese Erhöhung für $b = 1.0 \text{ fm}$ bereits wieder verschwindet. Die Erhöhung entspricht einem Teilchenfluß, der senkrecht zur Reaktionsebene gerichtet ist. Dieser Teilchenfluß ist der in Abschnitt 4.2.1 eingeführte Ausquetschfluß. Der Überhöhungsfaktor der Streuwinkelverteilung könnte als zusätzliches Charakteristikum des Stoppings benutzt werden.

4.5 Die Massenverteilung der Fragmente

Die Massenverteilung (bzw. Ladungsverteilung) liefert einen wichtigen Hinweis auf den Zustand der Kernmaterie beim Aufbruch. Sie wird erfolgreich durch statistische Modelle beschrieben. Diese Modelle erlauben, thermodynamische Aussagen über das fragmentierende System zu treffen. Hierbei wird allerdings vorausgesetzt, daß das System genügend Zeit hatte, einen Gleichgewichtszustand zu erreichen.

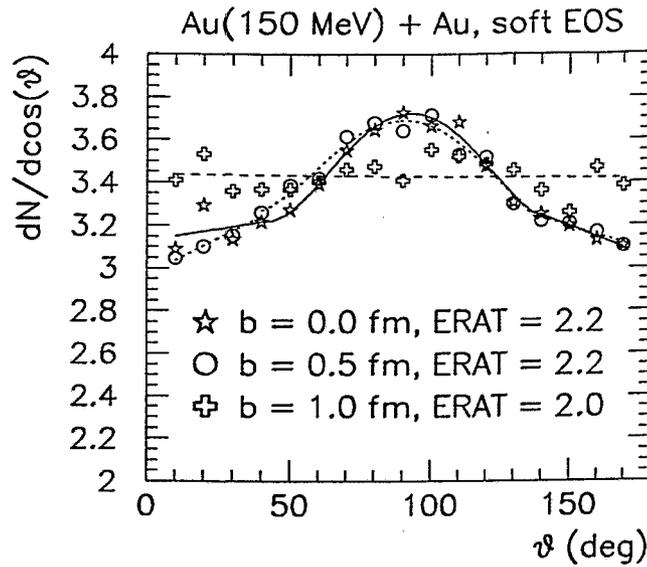


Abbildung 4.10: *Streuwinkelverteilung bzgl. einer Au(150 A·MeV) + Au Reaktion für drei verschiedene Stoßparameter b . Die zu den Stoßparametern korrespondierenden ERAT-Werte beziehen sich auf einen idealen Detektor. Die Rechnungen wurden unter Verwendung der weichen Zustandsgleichung durchgeführt.*

4.5.1 Die Massenverteilung und der Phasenübergang

Die Massenverteilung der Fragmente kann beispielsweise mit einem Phasenübergang 2. Ordnung in Verbindung gebracht werden. Der physikalische Hintergrund dieser Annahme soll nun erläutert werden. Betrachtet wird folgender Vorgang:

In einem Gas, bestehend aus $(A + B)$ Nukleonen bildet sich bei der Temperatur T und dem Druck p plötzlich ein Fragment (Tröpfchen) der Massenzahl A .

Die freie Enthalpie G_{gas} für das aus $(A + B)$ Nukleonen bestehende Gas lautet,

$$G_{\text{gas}} = \mu_{\text{gas}}(A + B). \quad (4.21)$$

Die freie Enthalpie G_{mix} für das gemischte System, das aus dem Fragment und den verbleibenden B freien Nukleonen besteht, wird angesetzt zu:

$$G_{\text{mix}} = \mu_{\text{liquid}}A + \mu_{\text{gas}}B + 4\pi R^2\sigma_s + T \cdot \tau \cdot \ln(A). \quad (4.22)$$

Das chemische Potential der Gasphase wurde mit μ_{gas} , das der Flüssigkeitsphase mit μ_{liquid} bezeichnet. Der dritte Term in der Gleichung ist die freie Energie der Oberfläche des Fragments ($R = r_0 A^{1/3}$, $\sigma_s = \sigma_s(T)$ = Oberflächenspannung). Der letzte Term wurde von M. E. Fisher [Fis67] vorgeschlagen. Er trägt dem Umstand Rechnung, daß die Tröpfchenoberfläche in sich selbst geschlossen ist und

dadurch die Gesamtentropie, sie hängt von den auftretenden Oberflächenschwingungen ab, reduziert wird. Auf den Parameter τ wird weiter unten eingegangen. Mit G_{gas} und G_{mix} kann man nun die (thermodynamische) Wahrscheinlichkeit W_A dafür angeben, daß das Fragment der Massenzahl A gebildet wird. Es gilt:

$$W_A = e^{(G_{\text{gas}} - G_{\text{mix}})/T} = e^{(\mu_{\text{gas}} - \mu_{\text{liquid}})A/T - 4\pi r_0^2 \sigma_s A^{2/3}/T - \tau \ln(A)} \quad (4.23)$$

Findet der Phasenübergang am kritischen Punkt statt, so sind die chemischen Potentiale gleich und die Oberflächenspannung verschwindet. Es bleibt nur noch der Term $A^{-\tau}$ übrig. Demnach ergibt sich für die Massenverteilung $Y(A)$ eines nuklearen Systems am kritischen Punkt ein Potenzgesetz:

$$Y(A) = Y_0 A^{-\tau}. \quad (4.24)$$

Der Parameter τ bestimmt in diesem Fall die Form der Massenverteilung. Er wird als kritischer Exponent bezeichnet.

Einige experimentellen Ladungsspektren zeigen nun in der Tat einen Abfall, der mit der Funktion (4.24) — und nicht etwa mit einer Exponentialfunktion — gefittet werden kann, wobei τ in etwa einen Wert zwischen 2 und 2.5 besitzt — so, wie man es nach dem Modell von M. E. Fisher erwartet. Aufgrund dessen wollte man das Potenzgesetz der Ladungsverteilung als Indiz für einen Phasenübergang 2. Ordnung nehmen. Es zeigte sich jedoch, daß dies nicht ausreichend ist, da solch ein Potenzgesetz ganz allgemeinen Strukturen unterliegt¹⁰ und somit nur einen geringen Informationsgehalt über das zugrundeliegende System besitzt.

Auch wenn der Abfall des Ladungsspektrums nicht die erhoffte Aussagekraft besitzt, so ist das Ladungsspektrum dennoch von Bedeutung, wie im Verlauf dieses und der nächsten zwei Abschnitte deutlich werden wird. Es erlaubt beispielsweise einen gewissen Rückschluß auf die Anregungsenergie des fragmentierenden Systems. Dies kann man im Rahmen des Kopenhagener Modells folgendermaßen verstehen: Die Wahrscheinlichkeit einer Partition (und damit die Ladungsverteilung) hängt von der Entropie ab, wobei die Entropie wiederum abhängig von der Temperatur ist und die Temperatur schließlich aus der Anregungsenergie (einem Eingabeparameter) berechnet wird. Die Übereinstimmung zwischen dem theoretischen und dem experimentellen Ladungsspektrum gibt daher einen Hinweis darauf, daß die Anregungsenergie des fragmentierenden Systems richtig bestimmt wurde.

Beispiele von Ladungsverteilungen, die mit dem Kopenhagener Modell generiert wurden, sind in der Abbildung 5.19 des Kapitels 5 gezeigt¹¹. Die dazugehörigen Anregungsenergien sind in Abbildung 5.12 enthalten.

¹⁰Man findet beispielsweise solch ein Potenzgesetz auch in der Massenverteilung von Bruchstücken bei Stein auf Stein Kollisionen. Ein schöner Beitrag über Potenzgesetz-Abhängigkeiten verschiedenster Verteilungen ist in der Doktorarbeit von U. Milkau [Mil91] enthalten.

¹¹Eine ausführliche Diskussion der Kurven erfolgt ebenfalls in diesem Kapitel.

Trotz jahrelanger intensiver Forschung war die Frage, ob es in Kernmaterie überhaupt zu einem flüssig-gasförmig Phasenübergang kommt, nicht unumstritten. So wurde unter anderem in Betracht gezogen [Aic84, Bau85], daß der Kern „kalt“ aufbricht; so ähnlich wie eine Glaskugel.

In jüngster Zeit gelang nun der ALADIN-Gruppe [Poc95] der experimentelle Nachweis der kalorischen Kurve des SM-Modells, wodurch ein flüssig-gasförmig Phasenübergang nahezu bestätigt wird¹².

Die experimentelle und die theoretische kalorische Kurve sind in Abbildung 4.11 dargestellt. Beide Kurven sind sehr ähnlich: Bis ca. $E^*/A_0 = 3$ MeV steigt die Temperatur proportional zu $\sqrt{E^*}$ an. Dies ist typisch für ein gebundenes Fermionensystem (Compound-Kern). Zwischen $E^*/A_0 = 3$ MeV und $E^*/A_0 = 10$ MeV weist die Temperatur in etwa einen konstanten Wert von 5 MeV auf. Hier findet der Phasenübergang (die IMF-Produktion) statt¹³. Danach steigt die Temperatur proportional zu E^* an — so, wie man es für ein hochangeregtes Nukleonengas erwartet.

Für den experimentellen Nachweis wurde die mittlere Anregungsenergie $\langle E_0 \rangle$ des fragmentierenden Systems nach X. Campi und Mitarbeitern [Cam94] über die Formel

$$\langle E_0 \rangle = \left\langle \sum_i m_i \right\rangle + \left\langle \sum_i K_i \right\rangle - \langle m_0 \rangle - \langle K_0 \rangle \quad (4.25)$$

berechnet. Die Summe erstreckt sich über alle Teilchen eines Events, wobei m_i die Masse und K_i die kinetische Energie eines Teilchens bezeichnen. Entsprechend steht $m_0 = A_0 m_N$ für die Masse und K_0 für die kinetische Energie des fragmentierenden Systems.

Die Temperatur wurde gemäß S. Albergo und Mitarbeiter [Alb85] aus den Isotopenverhältnissen $Y_{6\text{Li}}/Y_{7\text{Li}}$ und $Y_{3\text{He}}/Y_{4\text{He}}$ bestimmt. Daß man aus den Isotopenverhältnissen die Temperatur bestimmen kann, ist folgendermaßen einsichtig: Ausgangspunkt ist ein nukleares System im thermischen Gleichgewicht, bestehend aus freien Nukleonen und zusammengesetzten Teilchen. Für die Teilchendichte $\rho(A, Z)$ bzgl. eines aus Z Protonen und $(A - Z)$ Neutronen bestehenden Fragmentes erhält man unter Verwendung der Maxwell-Boltzmann-Statistik¹⁴:

$$\rho(A, Z) = \frac{A^{3/2} \omega(A, Z)}{\lambda^3} e^{\mu(A, Z)/T}, \quad (4.26)$$

¹²Ob es sich nun um einen Phasenübergang 1. oder 2. Ordnung handelt, ist allerdings weiterhin eine offene Frage.

¹³Die Energiedifferenz könnte man als latente Wärme auffassen. Dies wäre mit einem Phasenübergang 1. Ordnung verträglich.

¹⁴Da am Aufbruch die Temperatur in der Größenordnung von einigen MeV liegt und die Dichte der Kernmaterie kleiner als die halbe Grundzustandsdichte ist, braucht die Austauschsymmetrie und die Bose-Einstein-Kondensation nicht berücksichtigt werden.

mit der thermischen deBroglie-Wellenlänge λ von Gl. (3.27) und der inneren Zustandssumme

$$\omega(A, Z) = \sum_i (2S_i(A, Z) + 1) e^{-E_i(A, Z)/T}$$

Hierbei bezeichnet S_i den Spin und E_i die Energie des Zustands i .

Unter der Annahme, daß chemisches Gleichgewicht herrscht, kann das chemische Potential $\mu(A, Z)$ geschrieben werden als,

$$\mu(A, Z) = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n + B(A, Z). \quad (4.27)$$

Der Index p steht für „Proton“, der Index n für „Neutron“. Mit B wurde die Bindungsenergie notiert.

Man bildet nun das Verhältnis der Teilchendichten, welche sich auf zwei verschiedene Fragmente beziehen,

$$\begin{aligned} \frac{\rho(A, Z)}{\rho(A', Z')} &= \frac{Y(A, Z)}{Y(A', Z')} \\ &= F(A, A'; Z, Z') \rho_p^{Z-Z'} \rho_n^{A-Z+Z'-A'} e^{[B(A, Z) - B(A', Z')]/T} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Hierbei wurden die von A, A', Z und Z' abhängigen, berechenbaren Terme zu einer Funktion F zusammengefaßt. Um $\rho_p^{Z-Z'}$ zu eliminieren, wählt man: $A' = A + 1$ und $Z' = Z$. Mit diesem „Trick“ erhält man ferner, $\rho_n^{A-Z+Z'-A'} = \rho_n^{-1}$. Schließlich muß noch ρ_n^{-1} eliminiert werden. Dies geschieht, in dem man den Ausdruck (4.28) für ein anderes Isotopenverhältnis berechnet (wobei sich wiederum die Massenzahlen der Isotope um 1 unterscheiden) und sodann das Doppelverhältnis aus den beiden Isotopenverhältnissen bildet. Hieraus berechnet sich die Temperatur zu,

$$T = F_1 / \ln \left(F_2 \cdot \frac{Y/Y'}{Y''/Y'''} \right). \quad (4.29)$$

Mit F_1 und F_2 wurden abermals Terme abgekürzt, die aus den Ladungs- und Massenzahlen berechenbar sind. Für $Y/Y' = Y_{6\text{Li}}/Y_{7\text{Li}}$, $Y''/Y''' = Y_{3\text{He}}/Y_{4\text{He}}$ gilt [Poc95]: $F_1 = 16$, $F_2 = 2.18$.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß bei der Temperaturbestimmung vermöge der Isotopenverhältnisse vorausgesetzt wird, daß alle Fragmente direkt aus der Quelle kommen. Insbesondere bei den gemessenen Helium-Fragmenten könnte es aber sein, daß nicht vernachlässigbar viele aus Beryllium-Zerfällen stammen — und nicht aus der Quelle (vergl. hierzu und für detailliertere Informationen Referenz [Moe95]). Trotzdem kann jedoch nunmehr davon ausgegangen werden, daß es in angeregter Kernmaterie zu einem flüssig-gasförmig Phasenübergang kommt.

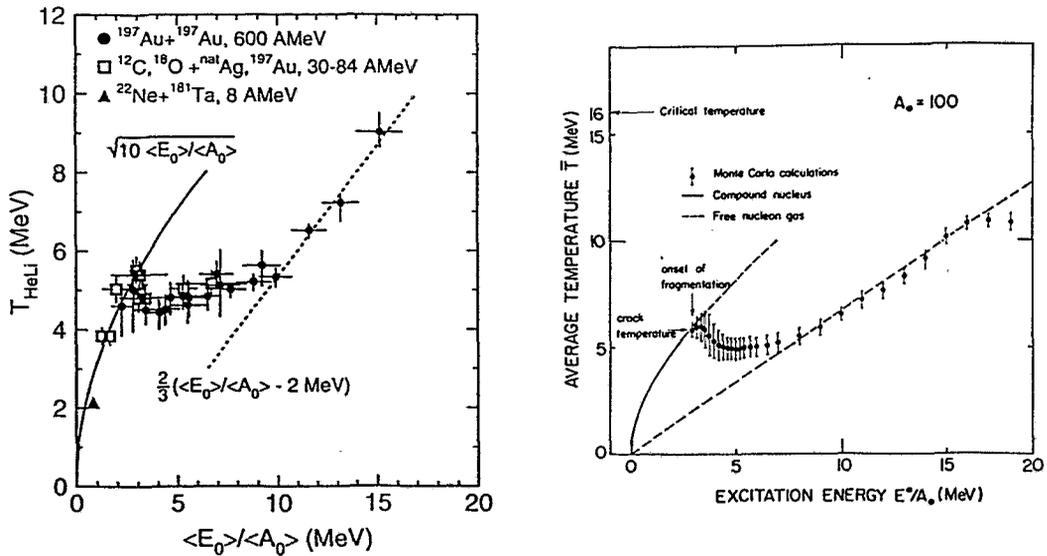


Abbildung 4.11: Temperatur als Funktion der Anregungsenergie pro Nukleon. A_0 bezeichnet die Massenzahl des fragmentierenden Systems.

Linke Seite: experimentelle Werte; entnommen aus [Poc95].

Rechte Seite: theoretische Vorhersage des SM-Modells [Bon85b].

4.5.2 Die Massenverteilung und die Entropie

Mit Hilfe von Gleichung (4.26) kann man aus dem Deuteron zu Proton Verhältnis die spezifische Entropie $\sigma := S/N$ abschätzen.

Vernachlässigt man den Unterschied zwischen μ_p und μ_n und ferner die Bindungsenergie des Deuterons, so ergibt sich für das Verhältnis von Deuteronendichte ρ_d zu Protonendichte ρ_p :

$$\frac{\rho_d}{\rho_p} = 3\sqrt{2} e^{\mu/T}. \quad (4.30)$$

Unter Verwendung von $pV = NT$ und $E = TS + \mu N - pV \stackrel{!}{=} \frac{3}{2}NT$ (Energie eines idealen Boltzmann-Gases) erhält man,

$$\sigma = 2.5 - \mu/T. \quad (4.31)$$

Logarithmieren von Gleichung (4.30) und einsetzen in Gleichung (4.31) führt schließlich auf die Siemens-Kapusta-Formel [Sie79]:

$$\sigma = 3.945 - \ln \left(\frac{\rho_d}{\rho_p} \right). \quad (4.32)$$

Dies ist das gewünschte Ergebnis.

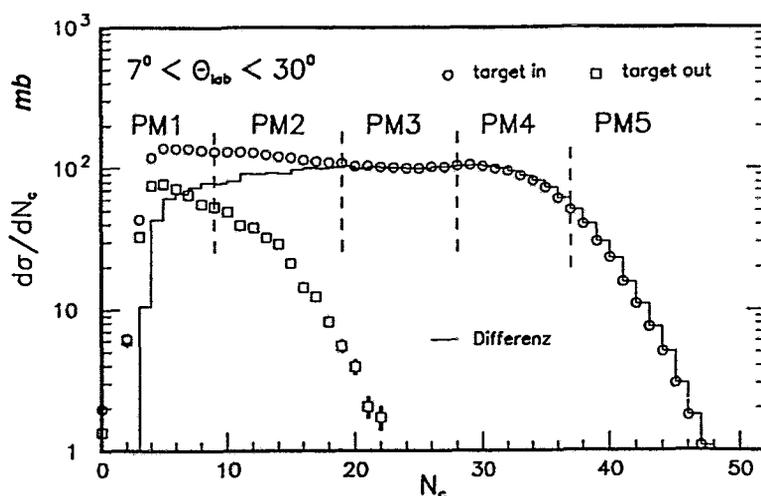


Abbildung 4.12: Multiplizitätsverteilung geladener Teilchen für eine $Au(150 \text{ A}\cdot\text{MeV}) + \text{Reaktionen}$; entnommen aus [Wie93]. PM1 bis PM5 definieren verschiedene Multiplizitätsbereiche.

4.5.3 Die Massenverteilung und die Bestimmung des Stoßparameters

Die im Abschnitt 4.2.2 vorgestellte Transversalimpulsanalyse dient zur Bestimmung der Stoßparameterrichtung. Den Betrag des Stoßparameters (d. h. den Stoßparameter) kann man nach einer Methode bestimmen, die sich auf die Multiplizitätsverteilung der geladenen Teilchen stützt. Die Grundzüge dieser Methode werden nun erläutert.

Als Beispiel wird die Multiplizitätsverteilung geladener Teilchen betrachtet, die sich auf $Au(150 \text{ A}\cdot\text{MeV}) + Au$ Reaktionen bezieht. Sie ist in Abbildung 4.12 dargestellt.

Zuerst wird die Verteilung in 5 Bereiche unterteilt. Hierzu bestimmt man den Ordinatenwert Y_P des Plateaus (bzgl. der Abb. ist $Y_P = 100 \text{ mb}$). Sodann sucht man, von rechts beginnend, den Abszissenwert \tilde{N}_c der $d\sigma/dN_c$ -Kurve, der zu $Y_P/2$ gehört (bzgl. der Abb. ist $\tilde{N}_c = 37$). Der Bereich rechts von \tilde{N}_c wird nun mit PM5 bezeichnet¹⁵, der Bereich links von \tilde{N}_c wird in 4 ca. gleichgroße Bereiche aufgeteilt, welche mit PM4, ..., PM1 deklariert werden. Die Notation ist für „Nichtexperten“ meist etwas irreführend, da man intuitiv PM1 mit zentralen und PM5 mit peripheren Stößen in Verbindung bringt. Tatsächlich gehört aber natürlich der Bereich (PM5) mit höchster Teilchenmultiplizität zu zentralen Stößen.

¹⁵PM steht für Plastikmultiplizität. Hierunter versteht man die Multiplizität der geladenen Teilchen, die in die Plastikwand des Detektors gelangen.

Um die Stoßparameterzuordnung genauer zu fassen, wird im zweiten Schritt gemäß

$$\sigma(PMi) = 2\pi \int_{b_{i,\min}}^{b_{i,\max}} b \, db \implies b_{i,\max} = \sqrt{\sigma(PMi)/\pi + b_{i,\min}^2} \quad (4.33)$$

den PM-Bereichen, ausgehend von PM5 (denn es gilt: $b_{5,\min} = 0$ fm), jeweils ein Stoßparameterbereich zugeordnet.

Schließlich kann man einem PM-Bereich noch einen mittleren Stoßparameter zuzuordnen. Dies geschieht vermöge

$$\langle b_i \rangle = \frac{\int_{b_{i,\min}}^{b_{i,\max}} b \cdot b \, db}{\int_{b_{i,\min}}^{b_{i,\max}} b \, db} \quad (4.34)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{b_{i,\max}^3 - b_{i,\min}^3}{b_{i,\max}^2 - b_{i,\min}^2}. \quad (4.35)$$

4.6 Die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion

Um Informationen über die Endzustandswechselwirkungen der Fragmente zu erhalten, wird eine sogenannte Zweiteilchen-Korrelationsfunktion analysiert (vergl. z. B. [Hei94, Hei95, Kae93, Kot95, Poc91, Pra87]). Aus der Zweiteilchen-Korrelationsfunktion kann man beispielsweise Informationen über das Aufbruchvolumen des nuklearen Systems, über die Coulomb-Wechselwirkung oder über den aufgetretenen Nukleonenfluß gewinnen.

Der Ursprung der Zweiteilchen-Korrelationsfunktion liegt in der Intensitätsinterferometrie begründet. Die Intensitätsinterferometrie wurde von R. Hanbury-Brown und R. Q. Twiss für die Extraktion von Sternradien vorgeschlagen [Han54, Han56a, Han56b]. Sie lösten damit das Problem der zu geringen Auflösung der Michelson-Interferometer. Das Auflösungsvermögen eines Michelson-Interferometers wird durch das Verhältnis λ/d zwischen der Wellenlänge λ der emittierten Strahlung und dem Abstand d zwischen den Eingangsspiegeln bestimmt. Für eine bessere Auflösung müßte man zum einen den Abstand d bis auf mehrere 10 Meter vergrößern können, ohne daß es hierdurch zu Schwankungen in der Laufzeit des Lichtes kommt. Zum anderen müßte man die durch die Turbulenzen in der Erdatmosphäre bewirkten Änderungen des Brechungsindex ausschalten können, denn diese Änderungen rufen Ablenkungen der Lichtstrahlen, d. h. Phasenfluktuationen, hervor. Beides ist nicht praktikabel. Die Lösung des Problems besteht nun darin, daß man nicht mehr die Amplituden-Korrelationen, sondern die Intensitäten-Korrelationen (Hanbury-Brown/Twiss (HBT) Effekt) der von zwei Quellen emittierten Strahlung untersucht, denn die Intensitäten-Korrelationen sind unabhängig von den Relativphasen der (sich auf die jeweilige Lichtquelle beziehenden) Teilamplituden.

In der Kern- und Teilchenphysik wurde der HBT-Effekt zunächst zur Untersuchung identischer, wechselwirkungsfreier Teilchen benutzt. Die Intensitäten-Korrelationen wurden mit Hilfe einer Zweiteilchen-Korrelationsfunktion R analysiert. Zu dieser Funktion gelangt man folgendermaßen:

Werden zwei Teilchen aus einer Quelle emittiert und in Koinzidenz detektiert, dann gilt für den Koinzidenzwirkungsquerschnitt $\frac{d^6\sigma_{12}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{d^3p_1 d^3p_2}$:

$$\frac{1}{\sigma_{12}} \frac{d^6\sigma_{12}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)}{d^3p_1 d^3p_2} = \frac{1}{\sigma_1} \frac{d^3\sigma_1(\vec{p}_1)}{d^3p_1} \cdot \frac{1}{\sigma_2} \frac{d^3\sigma_2(\vec{p}_2)}{d^3p_2} \cdot (1 + R(\vec{p})). \quad (4.36)$$

Diese Gleichung ist anschaulich klar: Bestehen zwischen den Teilchen keine Korrelationen, dann zerfällt der Zweiteilchenwirkungsquerschnitt in ein Produkt der Einteilchenwirkungsquerschnitte $\frac{d^3\sigma_i}{d^3p_i}$ ($i = 1, 2$). Im Falle von Korrelationen weicht der Zweiteilchenwirkungsquerschnitt von dem Produkt ab. Diese Abweichung wird nun mit der Funktion R berücksichtigt. Dabei hängt R vom Relativimpuls $\vec{p} := \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (und vom Relativabstand) der beiden Teilchen ab. In Gleichung (4.36) ist σ_i durch das Impulsintegral des differentiellen Einteilchenwirkungsquerschnittes definiert: $\sigma_i \equiv \int d^3p_i (d^3\sigma_i/d^3p_i)$. Analoges gilt für σ_{12} . Die drei Konstanten σ_1, σ_2 und σ_{12} werden meist unter einer Normierungskonstanten k zusammengefaßt.

Eine Wechselwirkung zwischen den zwei Teilchen bewirkt im allgemeinen eine Veränderung der Funktion R . Handelt es sich bei den zwei Teilchen um Protonen, dann dominiert bei kleinen Relativabständen die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung und bei großen Abständen die Coulomb-Wechselwirkung. Die zwei Arten der Wechselwirkung haben zwei unterschiedliche Zweiteilchen-Korrelationsfunktionen zur Folge. Gehören die zwei Protonen zu einem nuklearen System, welches sich im Fragmentationsstadium befindet (hier ist die Coulomb-Wechselwirkung am stärksten), so sollten anhand der Proton-Proton-Korrelationsfunktion Aussagen über die Dichte und damit über den Radius der Quelle möglich sein. Allerdings ist man hier mit der Nicht-Gleichgewichtsemission der Protonen sowie der Protonen-Verdampfung konfrontiert. Daher ist es günstiger, das fragmentierende System mit Hilfe von Zweiteilchen-Korrelationsfunktionen zu untersuchen, die sich auf mittelschwere Fragmente beziehen. Wertvolle Beiträge auf diesem Gebiet wurden von J. Pochodzalla und Mitarbeitern [Poc85, Poc86a, Poc86b, Poc87, Poc91] geleistet. Die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion bzgl. mittelschwerer Fragmente wird meist über die Koinzidenzzählrate $Y_{12}(\vec{p}_1, \vec{p}_2)$ und über die inklusiven Zählraten $Y_1(\vec{p}_1)$ und $Y_2(\vec{p}_2)$ definiert:

$$\sum Y_{12}(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = \left[\sum Y_1(\vec{p}_1) Y_2(\vec{p}_2) \right] \cdot k \cdot (1 + R(\vec{p})). \quad (4.37)$$

Die Summe erstreckt sich über bestimmte Fragmentkombinationen. Man kann beispielsweise festlegen, daß das eine Fragment die Ladungszahl 3 haben soll und

das andere eine Ladungszahl, die zwischen 4 und 7 liegt. Die Kombination von Fragmenten verschiedener Ladung hat den Vorteil, daß dadurch die Statistik verbessert wird.

Für die Analyse von Gold auf Gold Reaktionen bei mittleren Einschubenergien wird häufig (vergl. [Bar93, Bar94b, Hei94, Hei95, Kae93, Kot95]) eine Zweiteilchen-Korrelationsfunktion aus einer Relativgeschwindigkeitsverteilung der Fragmente konstruiert:

$$C_2(v_{12,\text{red}}) := k \cdot \frac{\sum Y_{12}(v_{\text{red}})}{\sum Y_{12,\text{mix}}(v_{\text{red}})}. \quad (4.38)$$

Auch hier erstreckt sich die Summe über bestimmte Fragmentkombinationen. Die Zählrate $Y_{12}(v_{\text{red}})$ gibt die Anzahl aller koinzident gemessener Fragmente an, die sich mit der Geschwindigkeit v_{red} relativ zueinander bewegen. Hingegen gibt $Y_{12,\text{mix}}(v_{\text{red}})$ die Anzahl zweier Fragmente mit der Geschwindigkeit v_{red} an, die von verschiedenen Events stammen — also sozusagen „gemischt“ sind. Durch das Mischen wäscht man gewissermaßen die Coulomb-Wechselwirkungen aus der Relativgeschwindigkeitsverteilung heraus. Mit v_{red} ist der Betrag einer sogenannten „reduzierten“ Relativgeschwindigkeit gemeint. Zu dieser Geschwindigkeit gelangt man, in dem man den Betrag v_{12} der Relativgeschwindigkeit von Fragment 1 (mit der Ladungszahl Z_1) zu Fragment 2 (mit der Ladungszahl Z_2) durch die Wurzel aus der Gesamtladung teilt (vergl. [Kim92]):

$$v_{\text{red}} := v_{12} / \sqrt{Z_1 + Z_2}. \quad (4.39)$$

Die reduzierte Relativgeschwindigkeit wurde eingeführt, damit die Korrelationsfunktion weitgehend unabhängig von den Ladungsunterschieden der Fragmente wird. Dies ist in Abbildung 4.13 anhand einer $\text{Au}(150 \text{ A-MeV}) + \text{Au}$ Reaktion demonstriert. Beide Korrelationsfunktionen wurden für 6 verschiedene Fragmentkombinationen aufgezeichnet. Links in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit, rechts in Abhängigkeit von der reduzierten Relativgeschwindigkeit. Man erkennt, daß die verschiedenen Korrelationsfunktionen des rechten Bildes deutlich näher beieinander liegen als diejenigen des linken Bildes.

Die Einführung der reduzierten Relativgeschwindigkeit ist ferner für die Standardabschätzung der Aufbruchdichte vorteilhaft. Für die Erläuterung dieser Standardabschätzung ist es hilfreich, zuvor die Begriffe „Coulomb-unterdrückte Geschwindigkeiten“ und „Coulomb-Unterdrückung“ zu erklären:

Für kleine Relativgeschwindigkeiten ist die Korrelationsfunktion kleiner als 1. Das bedeutet, daß die Coulomb-Kräfte kleine Relativgeschwindigkeiten unterdrücken. Diese Relativgeschwindigkeiten nennt man daher „Coulomb-unterdrückt“. Den Wert der reduzierten (!) Relativgeschwindigkeit, für den die Korrelationsfunktion den Wert 0.5 annimmt, nennt man „Coulomb-Unterdrückung“.

Zur Standardabschätzung der Aufbruchdichte gelangt man nun folgendermaßen:

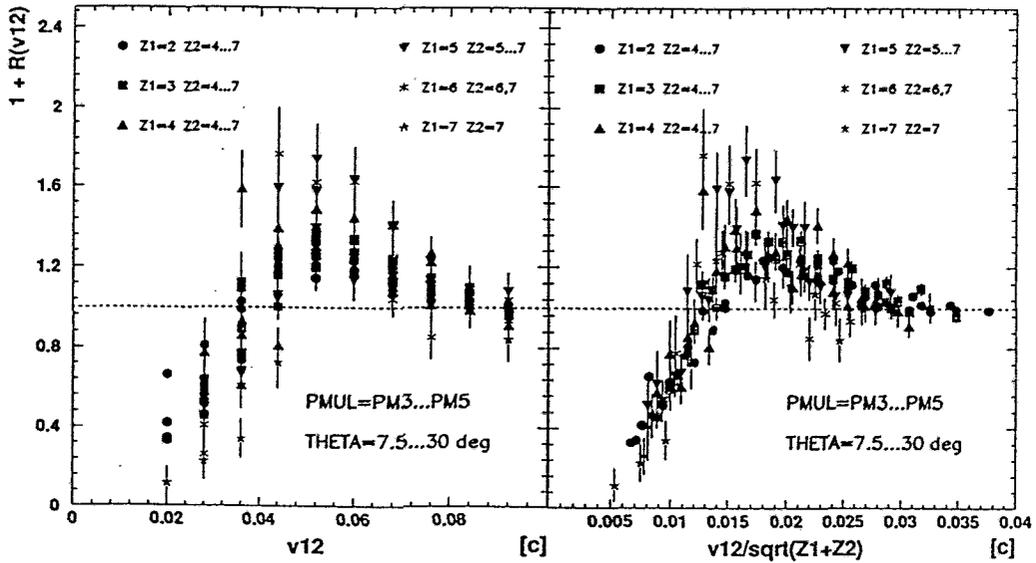


Abbildung 4.13: Erläuterung zur Abhängigkeit der Korrelationsfunktion von den Ladungsunterschieden der Fragmente am Beispiel einer $Au(150 \text{ A}\cdot\text{MeV}) + Au$ Reaktion (entnommen aus [Kae92]). Die Korrelationsfunktion $1 + R$ entspricht C_2 im Text.

Für zwei geladene Fragmente ist die kinetische Energie am Schluß der zeitlichen Entwicklung in etwa gleich der Coulomb-Energie zu Beginn:

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{12}} \approx \frac{1}{2} \mu v_{12}^2, \quad (4.40)$$

wobei μ die reduzierte Masse, r_{12} den Abstand zwischen den Fragmenten und e die Elementarladung bezeichnet.

Falls die Geschwindigkeit Coulomb-unterdrückt ist, gilt demnach:

$$\frac{Z_1 Z_2 e^2}{r_{12}} \gtrsim \frac{1}{2} \mu v_{12}^2. \quad (4.41)$$

Mit dem Ausdruck für die reduzierte Masse, $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$, dem genäherten Zusammenhang zwischen Masse und Ladung, $m_i = 2Z_i m_N$, und schließlich (!) mit der Definition der reduzierten Relativgeschwindigkeit (Gl. (4.39)) ergibt sich hieraus,

$$\frac{1}{r_{12}} \gtrsim \frac{m_N}{e^2} v_{\text{red}}^2. \quad (4.42)$$

Unter Annahme eines würfelförmigen Aufbruchvolumens (vergl. Abbildung 3.1) setzt man die Aufbruchdichte ρ_{bu} ungefähr gleich $1/r_{12}^3$. Weiterhin wählt man als Wert für die reduzierte Geschwindigkeit die Coulombunterdrückung v_{cu} . Damit folgt für die Aufbruchdichte im Rahmen der Standardabschätzung:

$$\rho_{bu} \gtrsim \left(\frac{m_N}{e^2} v_{cu}^2 \right)^3. \quad (4.43)$$

Zum Schluß sei noch auf einen Ausdruck für die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion hingewiesen, der sich für mittelschwere Fragmente im Rahmen des Koonin-Pratt-Modells ergibt (vergl. [Kim92]). In diesem Modell wird die Korrelationsfunktion C_{KP} ungefähr gleich dem Verhältnis zwischen dem Relativimpulsraumelement d^3q_0 zu Beginn und dem Relativimpulsraumelement d^3q am Ende der zeitlichen Entwicklung (hier herrschen keine Wechselwirkungen mehr) des Zwei-Fragmentesystems gesetzt:

$$C_{KP} \approx \frac{d^3q_0}{d^3q}. \quad (4.44)$$

Nach Integration über die Winkel und unter Verwendung der Energieerhaltung erhält man schließlich,

$$C_{KP} \approx \sqrt{1 - \frac{2\mu Z_1 Z_2 e^2}{q^2 r_{12}}} = \sqrt{1 - \frac{e^2}{m_N v_{red}^2 r_{12}}}. \quad (4.45)$$

Kapitel 5

Das Hybrid-Modell

Stößt ein Projektilnukleon mit einer kinetischen Energie E_{kin} auf ein ruhendes Targetnukleon, so entfällt im Schwerpunktsystem auf ein Nukleon eine kinetische Energie von ca. $E_{\text{kin}}/4$ (klassisch gerechnet). Bei zentralen Kern-Kern-Stößen von 150 MeV/Nukleon bzw. 250 MeV/Nukleon entfallen demnach 37.5 MeV bzw. 62.5 MeV auf ein Nukleon. Diese Energie ist groß im Vergleich zur Bindungsenergie (≈ 8 MeV) schwerer Kerne. Von daher würde man erwarten, daß es zu einer sofortigen Verdampfung der Nukleonen kommt. Im Experiment werden hingegen viele mittelschwere Fragmente (IMFs) beobachtet. Theoretischen Voraussagen zufolge sollten IMFs entstehen, wenn die Anregungsenergie des Kerns in etwa seiner Bindungsenergie entspricht und das System sich nahezu im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Die Produktion von vielen IMFs steht demnach im Widerspruch zu dem, was man auf den ersten Blick erwarten würde. Das Auftreten der IMFs kann man nun dahingehend deuten, daß ein Teil der überschüssigen Energie durch die Nicht-Gleichgewichtsemission leichter Teilchen fortgetragen wird und der andere Teil in Flußenergie umgewandelt wird. Experimentelle Untersuchungen [Her93, Jeo94] ergaben, daß ungefähr 1/3 der im Schwerpunktsystem verfügbaren kinetischen Energie in Flußenergie umgesetzt wird.

Ein theoretisches Modell sollte den vollständigen Verlauf einer Schwerionenreaktion beschreiben können. Gegenwärtig ist solch ein Modell jedoch nicht verfügbar. Im Prinzip müßte es von der Form eines Quanten-Molekular-Dynamik (QMD) Modells [Aic86, Aic88, Boa88, Pei88] sein. Im QMD-Modell faßt man die einzelnen Nukleonen als Gauß-Wellenpakete auf, welche durch ihre Orts- und Impulsschwerpunkte sowie durch ihre Breiten charakterisiert werden. Die zeitliche Entwicklung der Schwerpunkte wird durch die Hamilton'schen Gleichungen beschrieben. Durch die Propagation mit den klassischen Bewegungsgleichungen werden Vielteilchen-Korrelationen berücksichtigt. Die QMD-Modelle sind vor allem hinsichtlich der Beschreibung kollektiver Effekte (wie z. B. Seitwärtsfluß oder Ausquetschfluß) sehr erfolgreich. Allerdings haben sie gewisse Schwierigkeiten die im Mittelenergiebereich beobachteten Fragmentmultiplizitäten hinrei-

chend gut zu reproduzieren (vergl. [Bow91, Pei89, Sou91]).

Eine Erweiterung der QMD-Modelle stellt das sogenannte Fermionen-Molekular-Dynamik (FMD) Modell von H. Feldmeier dar [Fel90]. Im FMD-Modell wird das Produkt der Gauß-Wellenpakete durch ein antisymmetrisiertes Vielteilchen-Wellenpaket ersetzt. Die Bewegungsgleichungen für die Parameter dieses antisymmetrisierten Wellenpakets, d. h. für die Orts- und Impulsschwerpunkte der Einteilchen-Wellenpakete sowie ihrer komplexen Breiten und Spin-Richtungen, werden aus einem quantenmechanischen Variationsprinzip gewonnen. Ein großer Vorteil des FMD-Modells ist, daß das Pauli-Prinzip von Anfang an berücksichtigt wird. Der Nachteil des Modells ist von „technischer“ Natur (vergl. [Fel95]): Da die CPU-Zeit mit A^4 ansteigt, ist es derzeit noch nicht möglich, das Modell für schwere Kerne ($A > 40$) anzuwenden.

Alternativ zu solchen Modellen kann man ein sogenanntes Hybrid-Modell entwickeln (vergl. [Bow92, Pei92]). Es besteht aus einem dynamischen und einem statistischen Modell. Mit dem dynamischen Modell beschreibt man die zeitliche Entwicklung des Kern-Kern-Stoßes vom Anfangszustand, an dem die beiden Kerne getrennt vorliegen und aufeinander zufliegen, bis zu einer Zeit, nach der sich aus den zwei Kernen ein System entwickelt hat, welches kurz vor der Multifragmentation steht. Die Multifragmentation sowie die zeitliche Entwicklung des Fragmente-Systems bis hin zum Detektor wird mit einem statistischen Modell beschrieben. Die statistischen Modelle sind sehr erfolgreich in der Reproduktion der experimentellen Ladungsspektren (vergl. [Bow91, Hag92, Sou91]). Daß die Beschreibung einer Schwerionenreaktion mit einem Hybrid-Modell zu vernünftigen Ergebnissen führt, belegt ein in Frankfurt entwickeltes Modell (vergl. z. B. [Pei92]), mit dem die experimentellen Verteilungen hinsichtlich $Fe + Au$ Reaktionen erfolgreich reproduziert werden konnten [San92].

Für die Untersuchung mittelergetischer Schwerionenstöße wurde nun ein Hybrid-Modell entwickelt, welches aus dem in Kapitel 2 besprochenen BUU-Modell¹ und dem in Kapitel 3 erläuterten SM-Modell besteht. Die Grundzüge dieses Modells sollen nachfolgend ausgearbeitet werden. Teile der Arbeit wurden in [Hei94, Hei95] publiziert.

5.1 Erkenntnisse aus den Vorstufen-Modellen

Die in der Einleitung dieses Kapitels erwähnten beiden Mechanismen, die Nicht-Gleichgewichtsemission leichter Teilchen und der Fluß der Kernmaterie, geben die grobe Richtung für den Zusammenbau der beiden Modelle an. Wesentlich für den Zusammenbau ist ein Ansatz für die Phasenraumverteilung der Fragmente. Um zu solch einem Ansatz zu gelangen ist es nötig, sich eine konkretere Vorstellung über die Bildung eines intermediären Zustandes zu verschaffen. Dies

¹Sofern nicht anders angegeben, wird die mittlere Zustandsgleichung verwendet.

gelingt zum einen mit einem Perkulations-Expansions Modell und zum anderen mit einem BUU-SM Hybrid-Modell, welches einen speziellen Ansatz für die Anfangsgeschwindigkeiten der Fragmente enthält.

5.1.1 Das Perkulations-Expansions Modell

Das Perkulations-Expansions Modell (vergl. [Hei93]) wurde zur Untersuchung der in Gleichung (4.38) angegebenen Zweiteilchen-Korrelationsfunktion konstruiert. Es besteht hauptsächlich — wie man anhand des Namens schon erkennt — aus einem Perkulationsmodell, einem Expansionsteil und zusätzlich aus einem Analyseteil.

5.1.1.1 Wirkungsweise

Die Wirkungsweise ist analog zum SM-Modell (vergl. Abschnitt 3.6): Für jedes Event wird mit Hilfe des Perkulationsmodells eine Zerteilung angefertigt. Die Fragmente dieser Zerteilung werden sodann in eine Kugel gewürfelt. Danach bestimmt man ihre Anfangsgeschwindigkeiten nach einer Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung und beschreibt ihre anschließende Expansion mit den klassischen Bewegungsgleichungen (Gl. (3.34)). Im Analyseteil werden dann — unter Beachtung der Detektorgeometrie und der Energieschwellen — die Geschwindigkeitsverteilungen Y_{12} und $Y_{12,\text{mix}}$ und schließlich die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion berechnet.

5.1.1.2 Perkulationsmodell

Hinsichtlich des Perkulationsmodells ist zu bemerken, daß es verschiedene Perkulationsmodelle gibt. Wenn im folgenden von „dem“ Perkulationsmodell gesprochen wird, dann ist damit ein spezielles, auf die Kernphysik zugeschnittenes Perkulationsmodell [Plo91] gemeint².

Das Perkulationsmodell wird für die Erzeugung der Fragmentmassen benutzt. Hierzu werden die Nukleonen (des fragmentierenden Systems) mit einer gewissen Besetzungswahrscheinlichkeit p (site occupation probability) auf die Gitterpunkte eines kubischen Gitters gesetzt; siehe Abbildung 5.1. Danach wird vermöge einer sogenannten Verbindungswahrscheinlichkeit q (bond probability) entschieden, ob zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten eine Verbindung besteht. Die dadurch entstehenden zusammenhängenden Gitterpunkte identifiziert man als Fragmente. Das Perkulationsmodell liefert für einen bestimmten Wert $q = q_c$ (q_c wird als kritischer Wert bezeichnet; $q_c = q_c(p)$) eine Massenverteilung, die einem Potenzgesetz gehorcht (vergl. Gl. (4.24)). Für $q > q_c$ tritt ein großes Fragment

²Die Perkulationstheorie wurde ursprünglich für die Festkörperphysik formuliert. Der Name „Perkolation“ (percolare (lat.): durchsickern) wurde in Anlehnung daran gewählt, daß Sand-Cluster entstehen, wenn Wasser durch Sand sickert.

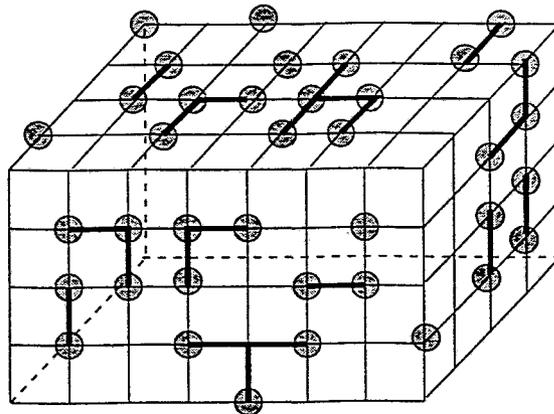


Abbildung 5.1: Fragmentbildung im Rahmen eines Perkolationsmodells. Mit Nukleonen besetzte Gitterpunkte wurden durch ausgefüllte Kreise, Verbindungen zwischen besetzten Gitterpunkten durch dicke Linien dargestellt.

auf (es kann als Restkern interpretiert werden), während für $q < q_c$ die Massenverteilung ein exponentielles Verhalten zeigt.

Exemplarisch ist in Abbildung 5.2 die Ladungsverteilung für eine Au(150 A·MeV) + Au Reaktion gezeigt, wobei $p = 1.0$ und $q = 0.4$ gesetzt wurde. Die Ladungszahl Z eines Fragments wurde aus seiner Massenzahl A über $Z = A/2$ bestimmt. Obwohl das Perkolationsmodell nahezu keinen physikalischen Input enthält³, gelang die Reproduktion der experimentellen Ladungsverteilung sehr gut.

5.1.1.3 Expansionsteil

Die Expansion wird analog zu Abschnitt 3.4 gehandhabt, wobei allerdings die Abdampfung leichter Teilchen nicht berücksichtigt wird. Die Teilchenverdampfung ist gewissermaßen implizit im Ladungsspektrum enthalten, da die Parameter des Perkolationsmodells gerade so gewählt werden, daß das Ladungsspektrum (vor der Expansion) mit dem Experimentellen (nach der Expansion) übereinstimmt.

5.1.1.4 Analyseteil

Für die Analyse der Geschwindigkeiten wurde ein Detektor programmiert, dessen Öffnungswinkel zwischen 2° und 30° liegt und dessen Energieschwellen (vergl. z. B. [Wie93]) mit dem FOPI-PhaseI-Detektor übereinstimmen. Die numerische Berechnung der C_2 -Funktion wird eingehend im Anhang E erläutert⁴.

³Die Verbindungswahrscheinlichkeit sollte mit der starken Wechselwirkung und der Coulomb-Wechselwirkung im Zusammenhang stehen. H. W. Barz und Mitarbeiter gelang es, eine genäherte Beziehung zwischen der Verbindungswahrscheinlichkeit und der Anregungsenergie des fragmentierenden Systems herzustellen [Bar86].

⁴Der Programmteil wird auch in den anderen Modellen dieses Kapitels verwendet.

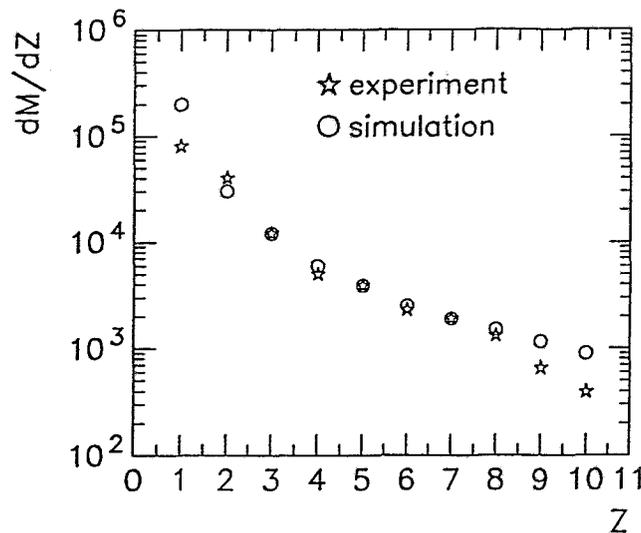


Abbildung 5.2: Ladungsverteilung bzgl. $Au(150 A \cdot MeV) + Au$ Reaktionen. Die experimentellen Werte (Kreise) stammen von R. Kotte [Kot92]. Die theoretischen Werte wurden mit Hilfe eines Perkolationsmodells (siehe Text) erzeugt. Die Besetzungswahrscheinlichkeit betrug 1.0, die Verbindungswahrscheinlichkeit 0.4.

5.1.1.5 Eingabegrößen

Die Eingabegrößen des Perkolations-Expansions Modells sind: die Aufbruchdichte ρ_{bu} , die Temperatur T zum Zeitpunkt des Aufbruches und die Energie E_{flow}^{sph} des sphärisch symmetrischen Flusses.

Die Aufbruchdichte bestimmt das Verhältnis zwischen der Nukleonenzahl und dem Kugelvolumen. Die Temperatur geht über die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung in das Modell ein. Die Flußenergie wird berücksichtigt, in dem man den Teilchengeschwindigkeiten eine Geschwindigkeit überlagert, die proportional ist zum Teilchenabstand vom Mittelpunkt der Kugel (vergl. Gl. (4.13)). D. h. die Flußenergie wird explizit durch die Vorgabe dieses Proportionalitätsfaktors berücksichtigt.

5.1.1.6 Ergebnisse

Auf der linken Seite der Abbildung 5.3 ist die experimentelle C_2 -Funktion für $Au(150 A \cdot MeV) + Au$ Reaktionen bzgl. verschiedener Fragmentkombinationen dargestellt. Die C_2 -Funktion zeigt deutlich einen Peak. Die Peak-Struktur der C_2 -Funktion war zum Zeitpunkt der Messung nicht verstanden. Man wußte nicht, ob sie ein experimentelles Artefakt darstellt oder wichtige Informationen über die Dynamik der Reaktion beinhaltet. Im Rahmen des Koonin-Pratt Modells (vergl.

Abschnitt 4.6) ist der Peak beispielsweise nicht erklärbar, da die Funktion C_{KP} (Gl. (4.45)) aufgrund des Radikanten keine Werte über Eins annehmen kann.

Auf der rechten Seite der Abbildung 5.3 ist die mit dem Modell berechnete C_2 -Kurve (gestrichelt) gezeichnet. Gemäß ihrer Definition (Gl. (4.38)) gibt sie die Abweichung der (wahren) Y_{12} -Verteilung von der (gemischten) $Y_{12,\text{mix}}$ -Verteilung an, enthält aber keine Information über die Form der Geschwindigkeitsverteilungen. Um das Bild zu vervollständigen, wurden daher die Y_{12} - und die $Y_{12,\text{mix}}$ -Verteilung mit eingezeichnet.

Die C_2 -Kurve stimmt gut mit der experimentellen Kurve überein⁵. Bei der Modellrechnung wurde die Aufbruchdichte mit $\rho_{bu} = 0.14\rho_0$ (ρ_0 ist die Dichte der Kernmaterie im Grundzustand), die Temperatur mit $T = 2$ MeV und die sphärische Flußenergie mit $E_{\text{flow}}^{\text{sph}} = 0.5$ MeV veranschlagt. Diese Werte stehen jedoch im Widerspruch zu Analysen der FOPI-Gruppe, wonach $E_{\text{flow}}^{\text{sph}} \approx 15$ MeV, $T \approx 25$ MeV (vergl. [Rei94]) und $\rho_{bu} \approx 0.3\rho_0$ (siehe [Kae92]) sein sollte. Demnach ist es mit dem Modell nicht möglich, quantitative Aussagen bzgl. des intermediären Zustandes zu treffen. Allerdings ist das Modell prinzipiell in der Lage, die Peak-Struktur der C_2 -Funktion zu reproduzieren. Daher sollen mit ihm noch einige qualitative Aussagen hinsichtlich der Peak-Struktur gewonnen werden.

Bei der gepunkteten C_2 -Funktion in Abbildung 5.3 wurde der Relativwinkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren zweier Fragmente auf maximal 12° beschränkt. Dieser Beschränkung zufolge verschwindet der Peak, wenn die Fragmente nahezu parallel fliegen.

In Abbildung 5.4 sind C_2 -Funktionen für Gold auf Gold Reaktionen bei einer Strahlenergie von 100 A-MeV dargestellt. Die C_2 -Kurven auf der linken Seite beziehen sich auf verschiedene sphärische Flußenergien, wobei die Temperatur mit 16 MeV festgelegt wurde. Anhand der Kurven ist ersichtlich, daß die sphärische Flußenergie nichts zum Zustandekommen des Peaks beiträgt.

Bei den C_2 -Kurven auf der rechten Seite wurde die sphärische Flußenergie $E_{\text{flow}}^{\text{sph}} = 0$ MeV gesetzt und die Temperatur variiert. Die Kurven für $T = 4$ MeV, $T = 8$ MeV und $T = 16$ MeV (durchgezogen) legen den Schluß nahe, daß der Peak der Zweiteilchen-Korrelationsfunktion um so kleiner wird, je höher die Temperatur gewählt wird. Demgegenüber zeigt die strichpunktierte Kurve eine ausgeprägte Peak-Struktur, obwohl die Temperatur ebenfalls mit 16 MeV angesetzt wurde. Dies liegt darin begründet, daß hier für jedes Event der Schwerpunktsimpuls um einen bestimmten (Fluß-) Winkel aus der Strahlachse herausgedreht worden ist. Das Herausdrehen geschah gewissermaßen „per Hand“, indem der Schwerpunktschwindigkeit eine transversale Geschwindigkeit von $0.05 c$ überlagert wurde. Der Azimutwinkel wurde hierbei für jedes Event zufällig gewählt. Durch das Herausdrehen kam es zu einer Verbreiterung der $Y_{12,\text{mix}}$ -Verteilung, wohingegen die Y_{12} -Verteilung unverändert blieb. Dies bewirkte $C_2(v_{\text{red}}) > 1$, für $0.01 c \leq v_{\text{red}} \leq 0.05 c$.

⁵Man beachte, daß die Bilder unterschiedliche Abszissen besitzen.

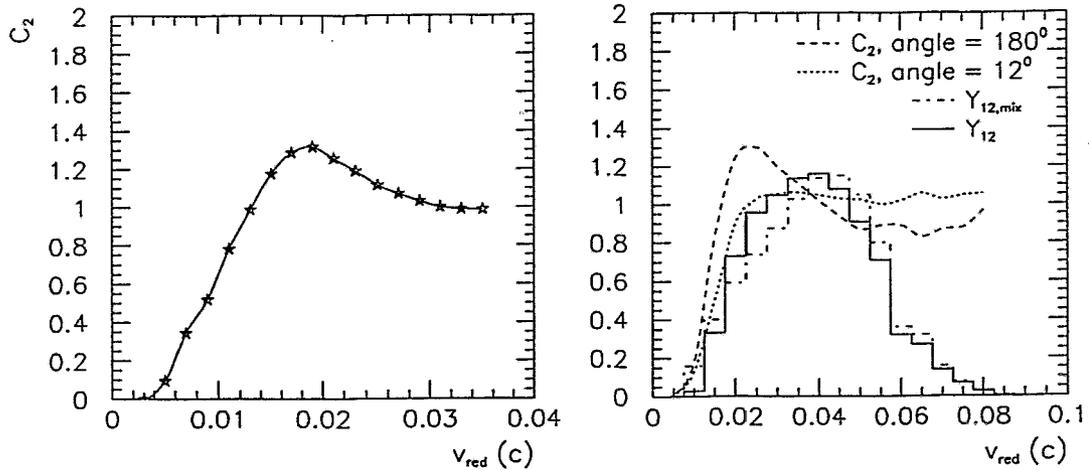


Abbildung 5.3: C_2 -Kurven bzgl. semizentraler $Au(150 \text{ A} \cdot \text{MeV}) + Au$ Stöße. Es wurden Fragmentkombinationen erlaubt, bei denen das eine Fragment die Ladungszahl 3 und das andere Fragment eine Ladungszahl zwischen (einschließlich) 4 und 7 besitzt.

Linke Seite: Experimentelle C_2 -Funktion; entnommen aus [Kae92].

Rechte Seite: Theoretische C_2 -Funktion (gestrichelt) sowie die dazugehörige Y_{12} -Verteilung (durchgezogen) und $Y_{12,mix}$ -Verteilung (strichpunktiert). Des weiteren ist eine C_2 -Funktion abgebildet (punktiert), bei der der Relativwinkel zwischen den Geschwindigkeitsvektoren der Teilchen nicht mehr als 12° betrug. Die Aufbruchdichte betrug das 0.14-fache der Grundzustandsdichte.

Es bleibt festzuhalten: Die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion zeigt trotz einer relativ hohen Temperatur einen Peak, wenn die Quelle einen transversalen Impuls erhält. Dies gibt einen Hinweis darauf, daß die Anfangsgeschwindigkeitsverteilung der Fragmente modifiziert werden muß.

5.1.2 Ein Hybrid-Modell mit einem speziellen Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung

Die weitere Untersuchung der C_2 -Funktion schien im Rahmen des Perkulations-Expansions Modell nicht sinnvoll. Um tiefer gehende Aussagen treffen zu können, muß man ein Modell benutzen, welches die Dynamik der Reaktion bis hin zum Aufbruch beschreibt. Des weiteren braucht man ein Modell, welches neben dem Aufbruch auch die Teilchen-Abdampfung explizit berücksichtigt. Um diese Anforderungen zu erfüllen, wurde ein Hybrid-Modell konstruiert, welches aus dem

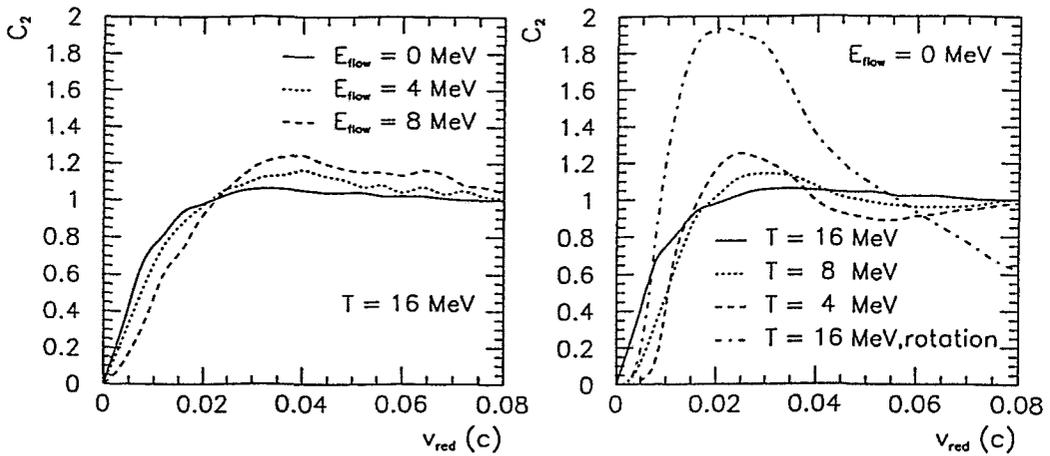


Abbildung 5.4: C_2 -Kurven für verschiedene sphärische Flußenergien (linke Seite; E_{flow} entspricht E_{flow}^{sph} im Text) und für verschiedene Temperaturen (rechte Seite) bzgl. semizentraler $Au(100 A \cdot MeV) + Au$ Stöße. Es wurden Fragmentkombinationen erlaubt, bei denen das eine Fragment die Ladungszahl 2 und das andere Fragment eine Ladungszahl zwischen (einschließlich) 4 und 7 besitzt. Die Aufbruchdichte betrug das 0.22-fache der Grundzustandsdichte. Bei der strichpunktierten Linie des rechten Bildes wurde der Schwerpunktimpuls aus der Strahlachse herausgedreht.

BUU-Modell und dem SM-Modell besteht, wobei die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung durch einen speziellen Ansatz ersetzt wurde.

Für das Koppeln der beiden Modelle sind mit dem BUU-Modell die folgenden Eingabegrößen des SM-Modells zu berechnen: Die Massenzahl des fragmentierenden Systems, sein Aufbruchvolumen und seine Anregungsenergie. Diese drei Größen legen die Multifragmentation fest. Weiterhin muß, wie erwähnt, die Verteilung der Anfangsgeschwindigkeiten der Fragmente modifiziert werden und schließlich ist der Zeitpunkt des Aufbruchs zu bestimmen.

5.1.2.1 Bestimmung der Massenzahl und des Volumens des fragmentierenden Systems

Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt wurde, sollte es zur Nicht-Gleichgewichtsemission leichter Teilchen kommen. Diese Teilchen dürfen natürlich nicht zur fragmentierenden Quelle gerechnet werden. Um sie auszuschließen, wird mit dem BUU-Modell die Ortsdichte ρ der Nukleonen berechnet und weiterhin eine Grenzdichte ρ_{limit} eingeführt. Die in der Nicht-Gleichgewichtsphase

emittierten, schnellen (leichten) Teilchen sollten sich in Bereichen befinden, in denen ρ einen kleineren Wert als ρ_{limit} besitzt. Somit wird die Teilchenzahl des fragmentierenden Systems ermittelt, in dem man alle Pseudoteilchen aufsummiert, die sich in Bereichen mit $\rho > \rho_{\text{limit}}$ befinden, und die Summe durch die Anzahl der Parallel-Runs dividiert.

Mit der Kenntnis der Massenzahl und der mittleren Dichte des fragmentierenden Systems erhält man dann in elementarer Weise das Aufbruch-Volumen.

5.1.2.2 Berechnung der Anregungsenergie

Die Anregungsenergie E^* pro Nukleon⁶ wird aus der potentiellen Energie E_{pot} ,

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho U(\rho') d\rho' \quad (5.1)$$

(U steht entweder für U_{soft} , U_{med} oder U_{stiff} ; vergleiche Abschnitt 2.2.1), aus der Coulomb-Energie E_{Coul} ,

$$E_{\text{Coul}} = \frac{1}{A} \sum_{m < n}^Z \frac{e^2}{|\vec{r}_n - \vec{r}_m|} \quad (5.2)$$

(Z = Protonenzahl, e = Elementarladung) sowie aus der kinetischen Energie E_{kin} ,

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2m_N A} \sum_{n=1}^A \vec{p}_n^2 \quad (5.3)$$

und aus den radialen Flußenergien E_{flow}^k (Gl. (4.18)) berechnet:

$$E^* = E_{\text{pot}} + E_{\text{Coul}} + E_{\text{kin}} - \sum_{k=1}^3 E_{\text{flow}}^k - E_0. \quad (5.4)$$

Mit E_0 wurde hierbei die Grundzustandsenergie abgekürzt.

Als nächstes sind die Fragmentgeschwindigkeiten zu Beginn der Expansion zu bestimmen.

5.1.2.3 Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeiten der Fragmente

Die Simulationsrechnungen mit dem BUU-Modell ergaben, daß bei mittlereenergetischen, semizentralen Gold auf Gold Stößen die Impulsraumverteilung während

⁶Dieser Zusatz wird im folgenden weggelassen.

der Reaktion die Gestalt einer Doppelkugel behält; vergl. z. B. Abbildung 2.3. Daher wurde die Verteilung ρ_p der Nukleonimpulse \vec{p} mit

$$\rho_p(\vec{p}) = \frac{1}{c} \left(e^{-\frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^3 (p_m - b_m) \Lambda_{mn} (p_n - b_n)} + e^{-\frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^3 (p_m + b_m) \Lambda_{mn} (p_n + b_n)} \right) \quad (5.5)$$

angesetzt. Der Vektor $\pm \vec{b}$ ist der Abstandsvektor zwischen dem Koordinatenursprung des Schwerpunktsystems und dem Mittelpunkt von einer der zwei Kugeln. Die Normierungskonstante c wird durch die Bedingung, $\int \rho_p d^3p = 1$, festgelegt. Für die Bestimmung der Parameter b_n , Λ_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) werden zunächst die Mittelwerte der Komponenten des Energieflußensors, $\langle \Theta_{ij} \rangle = \sum_{\nu=1}^A p_i^{(\nu)} p_j^{(\nu)} / (2m_N A)$, mit den 2. Momenten der Impulsverteilung gleichgesetzt:

$$\langle \Theta_{ij} \rangle = \int p_i p_j \rho_p(\vec{p}) d^3p. \quad (5.6)$$

Das verallgemeinerte Gauß-Integral auf der rechten Seite ist lösbar, da die Matrix Λ nach Voraussetzung dieselben Eigenschaften wie die Matrix Θ besitzt, d. h. reell, symmetrisch und positiv definit ist. Man erhält,

$$\langle \Theta_{ij} \rangle = \frac{1}{2m_N} (\Lambda_{ij}^{-1} + b_i b_j) \quad (5.7)$$

Die weitere Berechnung erfolgt nun im Hauptachsensystem⁷ von Θ . Hier ist $b'_1 = b'_2 = 0$ und für b'_3 erhält man aus $\rho_{p'}(\vec{0}) = \frac{2}{c} \exp(-\frac{1}{2} \Lambda_3 b_3'^2)$ und unter Verwendung von Gl. (5.7):

$$b'_3 = \sqrt{\frac{2m_N \langle \Theta_3 \rangle \ln[\frac{c}{2} \rho_{p'}(\vec{0})]^{-2}}{1 + \ln[\frac{c}{2} \rho_{p'}(\vec{0})]^{-2}}}, \quad (5.8)$$

mit

$$c = 2 \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{|\Lambda|}} \quad (5.9)$$

und

$$|\Lambda| = \prod_{i=1}^3 (2m_N \langle \Theta_i \rangle - b_i'^2). \quad (5.10)$$

⁷Die sich hierauf beziehenden Größen werden mit einem Strich gekennzeichnet.

Da auf der rechten Seite von Gl. (5.8) ebenfalls b'_3 auftritt, wird b'_3 explizit dadurch berechnet, daß man die Nullstellen der Funktion $F(b'_3) := b'_3 - \sqrt{\dots}$ bestimmt. Dies geschieht mit einem Verfahren, welches aus einer Kombination von dem Newton-Raphson- und dem Bisection-Verfahren besteht [Num92]. $\rho_{p'}(\vec{0})$ wird mit Hilfe des BUU-Programms berechnet. Ist b'_3 bestimmt, so wird Λ_i ($i = 1, 2, 3$) unter Verwendung von Gl. (5.7) berechnet. Nach der Bestimmung der Parameter wird $\rho_{p'}$ in eine Dichte $\rho_{v'}$ der Nukleonengeschwindigkeiten umgeschrieben,

$$\rho_{v'}(\vec{v}') = \frac{m_N^3 \sqrt{|\Lambda|}}{2 \sqrt{(2\pi)^3}} \left(e^{-\frac{m_N^2}{2} \sum_{i=1}^3 \Lambda_i (v'_i - \frac{b_i}{m_N})^2} + e^{-\frac{m_N^2}{2} \sum_{i=1}^3 \Lambda_i (v'_i + \frac{b_i}{m_N})^2} \right). \quad (5.11)$$

Mit Hilfe der von-Neumann'schen Zurückweisungsmethode werden anschließend nach $\rho_{v'}$ verteilte Geschwindigkeiten erzeugt. Diese Geschwindigkeiten (d. h. \vec{v}') beziehen sich allerdings auf Nukleonen. Um sie in Fragmentgeschwindigkeiten \vec{v}'_f zu überführen, werden sie mit der Wurzel aus der Massenzahl A des jeweiligen Fragmentes skaliert:

$$\vec{v}'_f = \frac{1}{\sqrt{A}} \vec{v}'. \quad (5.12)$$

Die Skalierung geschieht auf der Grundlage des Gleichverteilungssatzes der statistischen Mechanik, wonach gilt:

$$\frac{1}{2} m_N \langle \vec{v}'^2 \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{1}{2} A m_N \langle \vec{v}'_f{}^2 \rangle \quad (5.13)$$

und somit folgt,

$$\sqrt{\langle \vec{v}'_f{}^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{A}} \sqrt{\langle \vec{v}'^2 \rangle}. \quad (5.14)$$

Zu guter Letzt transformiert man die Fragmentgeschwindigkeiten vom Hauptachsensystem zurück in das Schwerpunktsystem des aufbrechenden Kernes.

Für die anschließende Expansion werden die Routinen des SM-Modells benutzt. Die Analyse der Fragmentgeschwindigkeiten erfolgt in derselben Weise wie bei dem Perkulations-Expansions Modell.

5.1.2.4 Bestimmung des Aufbruch-Zeitpunktes

Schließlich ist noch der Zeitpunkt des Aufbruches (Break-up-Zeit) zu bestimmen. Der Aufbruch-Zeitpunkt (als Anfangszeitpunkt wird der Moment gewählt,

an dem sich die beiden Kerne berühren) wirkt sich auf die Anregungsenergie und damit auch auf das Ladungsspektrum aus (vergl. Abschnitt 4.5.1). Er wird daher so festgelegt, daß das Ladungsspektrum der Modellrechnung mit dem experimentellen übereinstimmt. Dies ist allerdings nicht eindeutig. Man kann die Übereinstimmung der Spektren daher nur als einen Anhaltspunkt nehmen und muß sich auch an anderen Modellen orientieren, d. h. die Aufbruch-Zeit letztlich als Parameter handhaben⁸.

5.1.2.5 Ergebnisse

Die Ergebnisse beziehen sich auf Au(150 A·MeV) + Au Reaktionen zu einem Aufbruch-Zeitpunkt von 65 fm/c.

Bevor das Modell mit dem Experiment verglichen wird, sollen einige prinzipielle Betrachtungen über die Anregungsenergie, die Massenzahl und über die Flußenergien angestellt werden. Die Größen sind als Funktion des Stoßparameters für zwei verschiedene Grenzdichten ($\rho_{\text{limit}} = 0.15 \rho_0$ und $\rho_{\text{limit}} = 0.08 \rho_0$) in Abbildung 5.5 gezeigt.

Je kleiner die Grenzdichte ist, desto größer sind die Werte für die Anregungsenergie und die Massenzahl. Die Zunahme der Anregungsenergie bestätigt die Annahme, wonach in Bereichen mit geringer Dichte sich vornehmlich schnelle Teilchen befinden. Die Zunahme der Massenzahl ist kanonisch: Je kleiner die Grenzdichte ist, desto weniger Teilchen werden aussortiert. Allerdings ist es interessant zu sehen, daß der Unterschied in den Massenzahlen gleichförmig mit größer werdendem Stoßparameter abnimmt. Der Anstieg der Massenzahlen mit steigendem Stoßparameter ist natürlich eine Folge davon, daß auch die Projektil- und Targetrestkerne, sie haben eine relativ große Dichte, in diesem Fall zunehmen.

In den unteren zwei Bildern ist links der transversale Fluß, d. h. $(E_{\text{flow}}^1 + E_{\text{flow}}^2)/2$, und rechts der longitudinale Fluß, d. h. E_{flow}^3 , dargestellt. Der transversale Fluß nimmt mit kleiner werdender Grenzdichte zu, wohingegen der longitudinale Fluß (nahezu) gleich bleibt. Das bedeutet, daß die schnellen Teilchen bevorzugt in die transversale Richtung fließen.

Für sehr kleine Stöße, $b < 0.5$ fm, überwiegt der transversale Fluß, für $b \approx 0.5$ fm sind beide Flußenergien in etwa gleich groß und für $b > 0.5$ fm dominiert der longitudinale Fluß. Der Impulsellipsoid ist daher für Stoßparameter $b \approx 0.5$ fm sphärisch symmetrisch, für kleinere Stoßparameter oblat und für größere Stoßparameter prolat. Die oblate Form ist in Übereinstimmung mit der in Abbildung 4.10 gezeigten Streuwinkelverteilung.

In Abbildung 5.6 sind die experimentellen und theoretischen C_2 - und Y_{12} -Kurven dargestellt. Der Peak der experimentellen C_2 -Kurve ist kleiner als bei

⁸Im darauffolgenden Hybrid-Modell wird die Festlegung der Aufbruch-Zeit genauer umrissen.

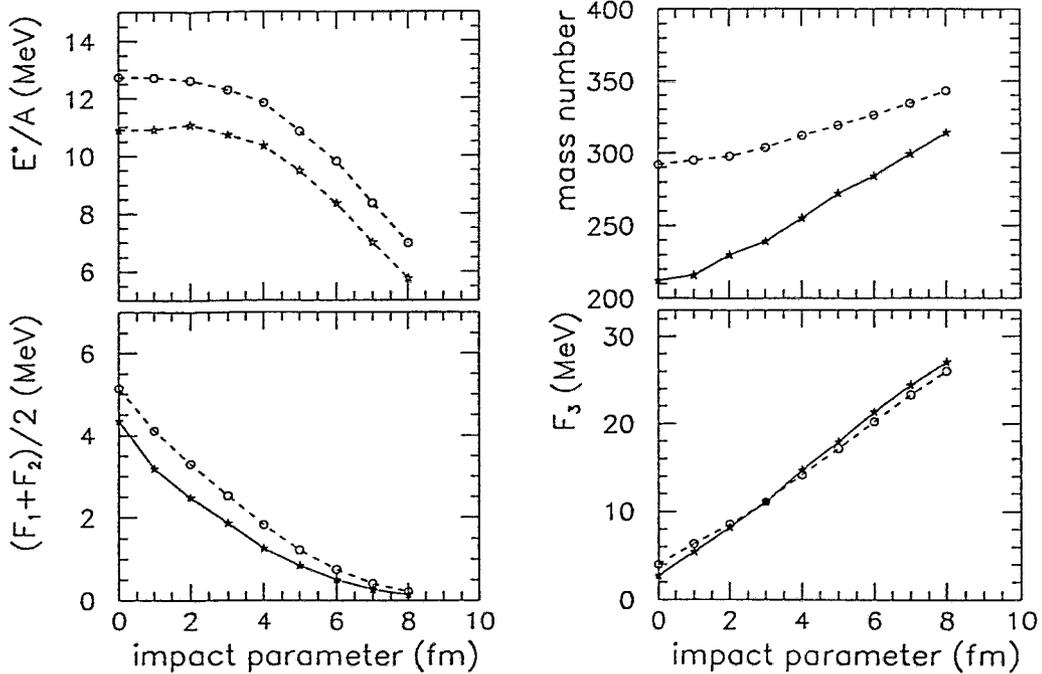


Abbildung 5.5: Einige charakteristische Größen des aufbrechenden Systems bzgl. $Au(150 \text{ A} \cdot \text{MeV}) + Au$ Kollisionen nach einer Zeit von $65 \text{ fm}/c$ (bezogen auf den Zeitpunkt des Zusammenstoßes). Gezeigt sind die theoretischen Werte für die Anregungsenergie E^* , für die Massenzahl A sowie für die transversale Flußenergie $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$ und die longitudinale Flußenergie F_3 (F_k ($k = 1, 2, 3$) entspricht E_{flow}^k im Text) als Funktion des Stoßparameters b . Die Kreise beziehen sich auf eine Grenzdicke von $\rho_{limit} = 0.08\rho_0$, die Sterne auf $\rho_{limit} = 0.15\rho_0$.

der in Abbildung 5.3 gezeigten Kurve. Dies liegt daran, daß hier alle Kombinationen zwischen Fragmenten mit $Z \geq 3$ zugelassen wurden, wohingegen in Abbildung 5.3 nur Fragmentkombinationen erlaubt wurden, bei denen das eine Fragment die Ladungszahl 3 und das andere Fragment eine Ladungszahl zwischen 4 und 7 besitzt. Anhand der Abbildung ist erkennbar, daß die Modell-Rechnung den Peak nicht reproduzieren kann. Des weiteren ist auffällig, daß der Schwerpunkt der mit dem Modell berechneten Relativgeschwindigkeitsverteilung zu weit links von dem der experimentellen liegt.

Die Unterschiede in den C_2 - und Y_{12} -Kurven legt die Vermutung nahe, daß der Ansatz für die Geschwindigkeitsverteilung weiter verbessert werden muß.

Um eine Verbesserung zu erzielen, wurde provisorisch eine Orts-Geschwindigkeitskorrelation konstruiert, indem die fragmentierende Quelle in 3 Würfel unter-

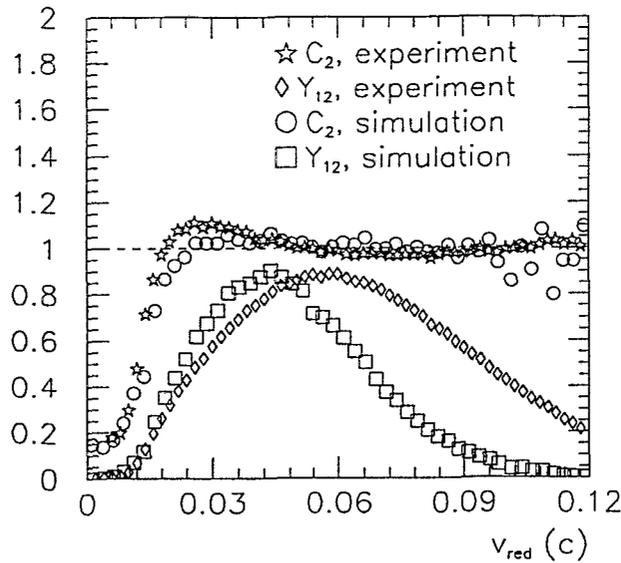


Abbildung 5.6: Relativgeschwindigkeitsspektren und C_2 -Kurven für semizentrale $Au(150 A \cdot MeV)+Au$ Stöße, aufgetragen über v_{red} . Es wurden alle Kombinationen zwischen Fragmenten mit $Z \geq 3$ zugelassen. Die Aufbruchzeit betrug $65 \text{ fm}/c$ (bezogen auf den Zeitpunkt des Zusammenstoßes), die Aufbruchdichte $0.23 \rho_0$ und die Grenzdichte $0.15 \rho_0$. Die experimentellen Kurven wurden aus Referenz [Kae93] entnommen.

teilt wurde und sodann die Fragmente mit hohen Anfangsgeschwindigkeiten in die äußeren Würfel und die Fragmente mit kleineren Anfangsgeschwindigkeiten in den mittleren Würfel sortiert wurden. Diese Orts-Geschwindigkeitskorrelation verbesserte deutlich die Übereinstimmung mit dem Experiment; insbesondere auch hinsichtlich des Peaks der C_2 -Funktion.

Die gemeinsame Seitwärtsbewegung der Fragmente (vergl. Abschnitt 5.1.1.6) erfordert demnach, die Fragmente zu Beginn der Expansion nach einer Orts-Geschwindigkeitsverteilung zu verteilen.

5.2 Das Modell

In dem nun folgenden Hybrid-Modell werden die Fragmente zu Beginn der Expansion nach einer Phasenraumverteilung (Orts-Geschwindigkeitsverteilung) verteilt. Es wird sich zeigen, daß mit dieser Phasenraumverteilung das Modell sowohl für die Beschreibung von semizentralen als auch von zentralen Schwerionenreaktionen geeignet ist.

Die Einführung der Phasenraumverteilung erfordert ein ausgefeilteres Konzept für die Kopplung von BUU- und SM-Modell. Die Reihenfolge der zu bestimmenden

Größen lautet: 1.) Massenzahl, 2.) Phasenraumverteilung der Nukleonen, 3.) Aufbruchvolumen, 4.) Anregungsenergie, 5.) Phasenraumverteilung der Fragmente und 6.) Aufbruch-Zeitpunkt.

5.2.1 Bestimmung der Massenzahl des fragmentierenden Systems

Die Bestimmung der Massenzahl des fragmentierenden Systems geschieht in derselben Weise, wie es in Abschnitt 5.1.2.1 besprochen wurde. Allerdings wird nun das System bei semizentralen Stößen als aus zwei Quellen bestehend angesetzt — so, wie es die Orts- und Impulsverteilungen des BUU-Modells nahelegen⁹. Ein Beispiel für die Orts- und Impulsverteilung bzgl. einer Au(150 A·MeV) + Au Reaktion, die sich unter einem Stoßparameter von 6 fm ereignet, ist in Abbildung 5.7 gezeigt (vergleiche hierzu auch Abbildung 2.4). Man erkennt sowohl im Ortsraum als auch im Impulsraum deutlich zwei Quellen. Die zwei Quellen gehen für zentralere Stöße in eine Quelle über (Der Übergang vom Zwei-Quellensystem zum Ein-Quellensystem wird im nächsten Abschnitt diskutiert). Da zwei Quellen berücksichtigt werden sollen, müssen die Teilchen des fragmentierenden Systems noch zusätzlich auf die zwei Quellbereiche aufgeteilt werden. Hierzu wird angenommen, daß die Materie spiegelsymmetrisch zu einer Ebene aufbricht, deren Normalenvektor parallel zur größten Hauptachse des zu dem Tensor L ,

$$L_{ij} := \frac{1}{A} \sum_{n=1}^A r_i^{(n)} r_j^{(n)} \quad (5.15)$$

($r_i^{(n)}$ = Komponente i des Ortsvektors von dem n -ten Nukleon) gehörigen Ellipsoids ist und die den Mittelpunkt des Ellipsoids enthält. In der Abbildung 5.7 ist diese Ebene durch die (kleinen) Punkte A und B markiert. Das System, dessen Achsen durch die Eigenvektoren von L gegeben sind, wird fortan mit L -System bezeichnet; seine Achsen sind im linken Bild von Abbildung 5.7 eingezeichnet. Explizit sind also die Teilchen in das L -System zu transformieren und anschließend — je nach dem, ob ihre z -Komponente positiv oder negativ ist — zu den entsprechenden Quellen zuzuordnen.

5.2.2 Extraktion der Phasenraumverteilung der Nukleonen

Für die Extraktion einer analytischen Form der Nukleonen-Phasenraumverteilung (aus den Zahlenwerten des BUU-Programms) wurde mit der Einführung

⁹Ein Zwei-Quellenaufbruch ist zwar nach dem BUU-Modell naheliegend, jedoch keinesfalls trivial, denn das BUU-Modell kann die Fragmentation nicht beschreiben. Nach dem Partizipanten-Spektatoren-Modell wäre beispielsweise auch ein Drei-Quellenaufbruch denkbar.

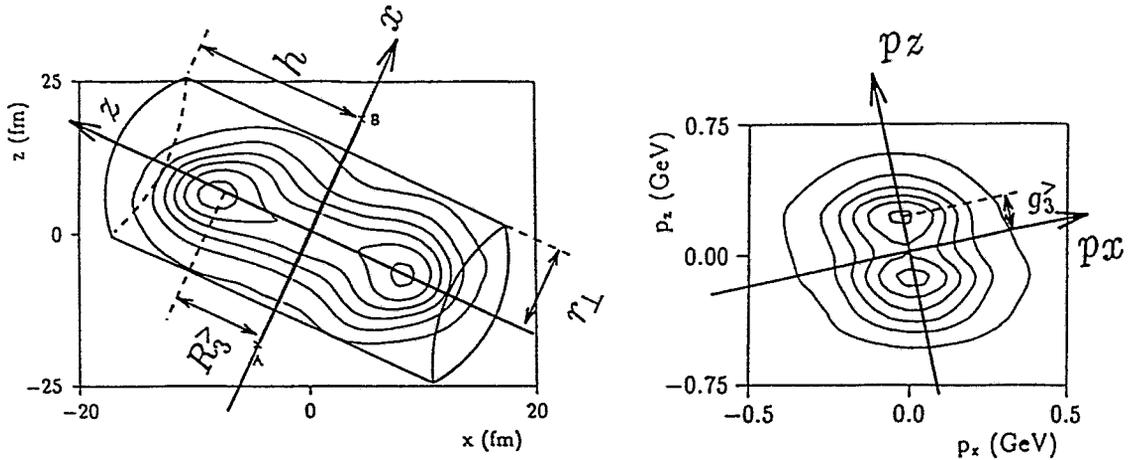


Abbildung 5.7: Konturlinien-Zeichnung der Ortsdichte (links) und der Impulsdichte (rechts) bzgl. einer Au(150 A·MeV) + Au Reaktion nach einer Zeit von 70 fm/c. Der Stoßparameter betrug 6 fm. Ausgehend von der äußeren Konturlinie, nimmt der Wert der Dichte von Konturlinie zu Konturlinie um einen konstanten Betrag zu. Die Strahlrichtung ist die z -Richtung. Die (kleinen) Punkten A und B im linken Bild sind Elemente einer Ebene, die vertikal zur Zeichenebene ist. Es wird angenommen, daß die Materie spiegelsymmetrisch zu dieser Ebene aufricht. Links (von A nach B blickend) von der Ebene befinden sich mehr Projektilnucleonen, rechts von ihr mehr Targetnucleonen. Der gezeichnete Zylinder moduliert die räumliche Verteilung der Nucleonen. Einen plastischen Eindruck von der Ortsdichte vermittelt Abbildung 2.4.

Die Skalen beider Bilder beziehen sich auf das Schwerpunktsystem. Im linken Bild ist zusätzlich die x - und z -Achse des L -Systems, im rechten Bild ist zusätzlich die p_x - und p_z -Achse des Θ -Systems eingezeichnet.

der Symmetrieebene des letzten Abschnittes bereits der erste Schritt ausgeführt. Im zweiten Schritt ist nun ein Ansatz für die Phasenraumverteilung aufzustellen der sowohl, hinsichtlich semizentraler Stöße, einen Zwei-Quellenaufbruch als auch, bzgl. zentraler Stöße, einen Ein-Quellenaufbruch berücksichtigt. Aufgrund der Symmetrie genügt es, den Ansatz für eine Hemisphäre der Ebene zu besprechen. Im folgendem wird die „obere“ Hemisphäre gewählt — das ist der Bereich, der in Abbildung 5.7 links von der Strecke \overline{AB} liegt. Für die diesbezügliche Nucleonen-Phasenraumverteilung $w^>$ wird angesetzt:

$$w^>(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{f(\vec{r})}{c} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Lambda_i (p_i - B_i(r_i - R_i^>) - g_i^>)^2} \quad (5.16)$$

Die Orts- und Impulsvektoren (\vec{r} und \vec{p}) beziehen sich hierbei auf das Θ -System. Das Θ -System ist das Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu den Eigen-

vektoren des Energieflußensors Θ ,

$$\Theta_{ij} := \frac{1}{2m_N A} \sum_{n=1}^A p_i^{(n)} p_j^{(n)} \quad (5.17)$$

($p_i^{(n)}$ = Komponente i des Impulsvektors von dem n -ten Nukleon, bezogen auf das Schwerpunktsystem) sind¹⁰; siehe rechte Seite von Abbildung 5.7. Das Θ -System wurde gewählt, da dort der Energiefluß symmetrisch zu den Koordinatenachsen verläuft und daher die Teilchenflußmatrix B und die Matrix Λ diagonal (mit den Elementen B_i bzw. Λ_i) angesetzt werden können¹¹. Die Matrix B wird in Abschnitt 5.2.4 näher erläutert. Die Elemente der Matrix Λ geben die Breiten der „Gauß-Verteilungen“ an. Sie können somit mit Temperaturen in Verbindung gebracht werden:

$$\Lambda_i = \frac{1}{m_N T_i} \quad (\text{mit } i = 1, 2, 3). \quad (5.18)$$

Allerdings ist zu beachten, daß im BUU-Modell das Vielnukeonen-System als Fermi-Gas aufgefaßt wird und daher die Temperaturen T_i nicht als thermodynamische Temperaturen interpretiert werden können¹². Der Vektor \vec{R} bezeichnet den Schwerpunkt der Ortsverteilung, der Vektor \vec{g} den der Impulsverteilung. Mit der Funktion f wird die räumliche Verteilung der Nukleonen moduliert. Die genaue Gestalt der Funktion f ist nur im L -System erforderlich. Hier wird angenommen, im Unterschied zum kugelförmigen Aufbruchvolumen des SM-Modells, daß gilt:

$$f(\vec{r}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \vec{r} \text{ in einem Zylinder} \\ & \text{mit Höhe } h \text{ und Radius } r_{\perp} \text{ liegt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.19)$$

Der Zylinder ist auf der linken Seite der Abbildung 5.7 skizziert. Die Konstante c ist eine Normierungskonstante. Die Normierungsbedingung lautet: $\int w^>(\vec{r}, \vec{p}) d^3p d^3r \stackrel{!}{=} 1/2$. Für die Phasenraumverteilung des Gesamtsystems, $w(\vec{r}, \vec{p}) := w^<(\vec{r}, \vec{p}) + w^>(\vec{r}, \vec{p})$, gilt damit: $\int w(\vec{r}, \vec{p}) d^3p d^3r = 1$. Die Werte der Parameter $B_i, \Lambda_i, R_i^>, g_i^>$ ($i = 1, 2, 3$) sowie die Höhe h und der Radius r_{\perp} des Zylinders können folgendermaßen mit dem BUU-Modell festgelegt werden: Man berechnet analytisch verschiedene Mittelwerte der Verteilung $w^>$

¹⁰Um zu einer vereinfachten Darstellung zu gelangen, werden die Größen nicht nach dem Koordinatensystem gekennzeichnet, auf das sie sich beziehen. Statt dessen wird der Bezug zum Koordinatensystem im Text erläutert, falls er sich nicht in trivialer Weise aus dem Zusammenhang ergibt.

¹¹Die Diagonalgestalt von Λ ist mit Hilfe der Gleichung (5.7) leicht einsichtig.

¹²In die Temperaturen T_i geht die Fermi-Bewegung ein. Der Einfluß der Fermi-Bewegung wird aber mit kleiner werdender Dichte und größer werdender Anregungsenergie geringer.

und stellt anschließend eine Beziehung zwischen diesen Mittelwerten und den Parametern auf; siehe Anhang B. Sodann bestimmt man die Mittelwerte mit dem BUU-Programm.

Der Ansatz (5.16) ist auch für zentrale Stöße geeignet, da in diesem Fall $B\vec{R}^> = \vec{g}^>$, d. h. $B_3R_3^> = g_3^>$ ist. Um dies zu demonstrieren, wurde in Abbildung 5.8 die mittlere Geschwindigkeit in z -Richtung, $\langle v_3 \rangle$, gegen r_3 für drei verschiedene Stoßparameter, $b = 0.5, 4.5, 7.5$ fm, aufgetragen. Für $\langle v_3 \rangle$ gilt,

$$\langle v_3 \rangle = \langle v_3^< \rangle \cdot \Theta(-r_3) + \langle v_3^> \rangle \cdot \Theta(r_3) \quad (5.20)$$

($\Theta(x) = 1$, falls $x \geq 0$ und 0 sonst), wobei — gemäß dem Ansatz — die mittlere Geschwindigkeit in z -Richtung durch

$$\langle v_3^> \rangle = \frac{1}{m_N} [B_3(r_3 - R_3^>) + g_3^>] \quad (5.21)$$

gegeben ist. Der Term bzgl. der unteren Hemisphäre, $\langle v_3^< \rangle$, ist analog dazu. Anhand der Abbildung ist erkennbar, daß sich die Geschwindigkeitskomponente für $b = 7.5$ fm bei $r_3 = 0$ fm sprunghaft ändert (rechtes Bild), wohingegen dieser „Gap“ an der Stelle $r_3 = 0$ fm für $b = 0.5$ fm verschwunden ist (linkes Bild). Dies ist Ausdruck dafür, daß bei semizentralen Stößen die Geschwindigkeitskomponenten zu zwei verschiedenen, sich von einander entfernenden Quellen gehören, dagegen bei zentralen Events die Geschwindigkeitskomponenten sich auf eine Quelle beziehen. Der Übergang im Geschwindigkeitsprofil, d. h. der Übergang vom Ein-Quellen- zum Zwei-Quellenaufbruch, findet in etwa bei $b = 4$ fm statt (mittleres Bild).

5.2.3 Das Aufbruch-Volumen

Die oben geschilderte Vorgehensweise zur Bestimmung der Parameter des Ansatzes ergibt für die Höhe des Zylinders,

$$h = \frac{2}{U_{33}} \langle r_3 \rangle \quad (5.22)$$

und für seinen Radius,

$$r_{\perp} = 2\sqrt{(\langle r_1^2 \rangle - U_{31}^2 h^2/3)/(1 - U_{31}^2)}. \quad (5.23)$$

Hierbei bestimmen die Matrixelemente \dot{U}_{ij} die Transformation zwischen dem Θ - und dem L -System. Damit ist das Aufbruch-Volumen festgelegt.

5.2.4 Berechnung der Anregungsenergie

Zur Berechnung der Anregungsenergie¹³ E^* des fragmentierenden Systems wird von der Gesamtenergie, bestehend aus der potentiellen Energie ($E_{\text{pot}} + E_{\text{Coul}}$)

¹³Es ist die Anregungsenergie pro Nukleon gemeint. Wie in Abschnitt 5.1.2.2 wird hier der Zusatz „pro Nukleon“ fortgelassen.

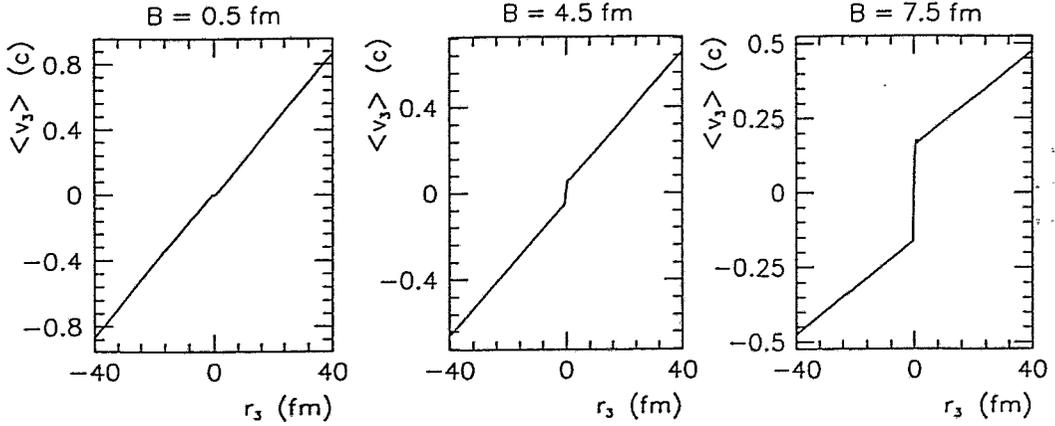


Abbildung 5.8: Erläuterung des Übergangs vom Ein-Quellen- zum Zwei-Quellenaufbruch anhand des Geschwindigkeitsprofils von $\langle v_3 \rangle$. Das Geschwindigkeitsprofil bezieht sich auf eine $Au(150 \text{ A} \cdot \text{MeV}) + Au$ Reaktion zur Zeit $t = 70 \text{ fm}/c$. B bezeichnet den Stoßparameter.

siehe Gl. (5.1) und (5.2)) und der kinetischen Energie (E_{kin} ; siehe Gl. (5.3)), die Grundzustandsenergie E_0 , die Rotationsenergie E_{rot} und die Flußenergien $E_{\text{div.flow},i}$ und $E_{\text{flow},3}$ abgezogen:

$$E^* = E_{\text{pot}} + E_{\text{Coul}} + E_{\text{kin}} - E_0 - E_{\text{rot}} - \sum_{i=1}^2 E_{\text{div.flow},i} - E_{\text{flow},3}. \quad (5.24)$$

Die kinetische Energie der Rotation des A -Teilchensystems ist

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2A} \vec{J}^T M^{-1} \vec{J}, \quad (5.25)$$

mit dem Drehimpuls

$$\vec{J} = \sum_{n=1}^A \vec{r}_n \times \vec{p}_n \quad (5.26)$$

und dem symmetrischen Trägheitstensor

$$M = m_N \sum_{n=1}^A (\vec{r}_n^2 \mathbf{1} - \vec{r}_n \otimes \vec{r}_n). \quad (5.27)$$

Die Orte und Impulse (\vec{r}_n und \vec{p}_n) beziehen sich hierbei auf das Schwerpunktsystem der jeweiligen Quelle.

Für die Berechnung der Flußenergien wurde davon ausgegangen, daß zwei Formen des Flusses zu berücksichtigen sind. Zum einen bewegt sich eine Quelle als ganzes mit dem Impuls $\vec{g}^>$ (pro Nukleon) oder $\vec{g}^<$ gegenüber dem Schwerpunkt des Θ -Systems. Hieraus ergibt sich eine Flußenergie $E_{\text{flow,g}}$:

$$E_{\text{flow,g}} = \frac{(g_3^>)^2}{2m_N} = \frac{(g_3^<)^2}{2m_N} \equiv \frac{g_3^2}{2m_N}. \quad (5.28)$$

Zum anderen zerfließt die Materie, d. h. die Relativabstände zwischen den Nukleonen vergrößern sich. Um diesen divergenten Fluß zu beschreiben, wird das Θ -System in den Schwerpunkt der Quelle verschoben. Hier gilt, $R_i^> = g_i^> = 0$ (bzw. $R_i^< = g_i^< = 0$) und somit,

$$w^>(\vec{r}, \vec{p}) \propto e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \Lambda_i (p_i - B_i r_i)^2}. \quad (5.29)$$

Die mittlere Geschwindigkeit $\langle \vec{v} \rangle$ am Punkt \vec{r} ist demnach,

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{m_N} \cdot \begin{pmatrix} B_1 r_1 \\ B_2 r_2 \\ B_3 r_3 \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten steigen also linear mit den Ortskomponenten an. Die Steigung steckt in den Matrixelementen B_i . Daher charakterisieren die Matrixelemente B_i das Zerfließen der Materie in i -Richtung. Mit der Teilchenmatrix B wurde gewissermaßen der Proportionalitätsfaktor von Gl. (4.13) in die drei Hauptflußrichtungen aufgespalten. Für die mittlere Energie des divergenten Flusses in i -Richtung erhält man:

$$E_{\text{div.flow,i}} = \frac{B_i^2}{2m_N V_{\text{zyl}}} \int_{V_{\text{zyl}}} r_i^2 d^3 r \quad (5.31)$$

(V_{zyl} = Zylindervolumen), oder nach dem Ausführen der Integration,

$$E_{\text{div.flow,i}} = \frac{B_i^2}{2m_N} \left[\frac{r_1^2}{4} (1 - U_{3i}^2) + U_{3i}^2 \frac{h^2}{12} \right] \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.32)$$

Das Verschieben des Θ -Systems in den Schwerpunkt der Quelle ist für die Interpretation der Matrix B vorteilhaft. Wenn man das Θ -System nicht in den Schwerpunkt der Quelle verschiebt, ergibt sich:

$$E_{\text{div.flow,i}} = \frac{1}{2m_N} \langle p_i^2 \rangle - \frac{1}{2} T_i - E_{\text{flow,g}} \cdot \delta_{3i}. \quad (5.33)$$

Da in die divergente Flußenergie nicht $E_{\text{flow,g}}$ eingeht, stellt sie insbesondere eine Verallgemeinerung der radialen Flußenergie (Gl. (4.18)) hinsichtlich semizentraler Stöße dar.

In Gleichung (5.24) wurden schließlich noch die beiden Flüsse in z -Richtung zusammengefaßt zu $E_{\text{flow,3}}$:

$$E_{\text{flow,3}} := E_{\text{flow,g}} + E_{\text{div.flow,3}}. \quad (5.34)$$

5.2.5 Bestimmung der Fragmente- Phasenraumverteilung

Der Expansionsteil des SM-Modells ist für angeregte Fragmente entwickelt worden. Darum muß, sozusagen in einem dritten Schritt, die Nukleonen-Phasenraumverteilung in eine Phasenraumverteilung für Fragmente überführt werden.

Im Sinne eines Koaleszenz-Modells könnte man daran denken, die Fragmente-Phasenraumverteilung $w_{\text{frag}}^>$ als Integral über das Produkt der Nukleonen-Phasenraumverteilungen zu schreiben, wobei man die Schwerpunkterhaltung und die Impulserhaltung mit δ -Funktionen sichert und die Orts- und Geschwindigkeitsstruktur innerhalb des Fragmentes mit einer Funktion W_{frag} moduliert, die von den Relativkoordinaten der Nukleonen abhängt:

$$w_{\text{frag}}^>(\vec{r}_{\text{frag}}, \vec{v}_{\text{frag}}) \propto \int d^{3A}r d^{3A}v \left[\prod_{n=1}^A w^>(\vec{r}_n, \vec{v}_n) \right] \times \\ \delta^3(\sum_{n=1}^A \vec{r}_n - A \vec{r}_{\text{frag}}) \delta^3(\sum_{n=1}^A \vec{v}_n - A \vec{v}_{\text{frag}}) \times \\ W_{\text{frag}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{A-1} - \vec{r}_A; \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{A-1} - \vec{v}_A). \quad (5.35)$$

Hier ergibt sich allerdings die Schwierigkeit, daß die Funktion W_{frag} viel zu komplex ist, als daß man für sie noch einen exakten Ausdruck angeben kann. Es wird deshalb vorgeschlagen, die Funktion W_{frag} durch

$$W_{\text{frag}} \propto \prod_{n=2}^{A-1} \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_n) \quad (5.36)$$

anzunähern. Das bedeutet, daß alle Nukleonen im Schwerpunkt des Fragmentes lokalisiert sein sollen. Mit der Näherung (5.36) ist Gleichung (5.35) lösbar. Nach einer längeren Rechnung erhält man für die Fragmente-Phasenraumverteilung:

$$w_{\text{frag}}^>(\vec{r}_{\text{frag}}, \vec{v}_{\text{frag}}) \propto e^{-\frac{Am_N^2}{2} \sum_{i=1}^3 \Lambda_i (v_{\text{frag},i} - \frac{B_i}{m_N} (r_{\text{frag},i} - R_i^>) - \frac{g_i^>}{m_N})^2} \quad (5.37)$$

Durch $w_{\text{frag}}^>$ werden die Geschwindigkeiten der Fragmente um die Flußgeschwindigkeit $\vec{V}_{\text{frag.flow}}^> = \frac{1}{m_N} (B(\vec{r}_{\text{frag}} - \vec{R}^>) + \vec{g}^>)$ thermisch verteilt. Die Fragmente erhalten eine Flußenergie, die proportional zu ihrer Massenzahl ist, wohingegen ihre thermische Energie nicht von der Massenzahl abhängt — in Übereinstimmung mit Gl. (4.1).

5.2.6 Bestimmung des Aufbruch-Zeitpunktes

Nach den vorangegangenen Überlegungen ist man nun prinzipiell in der Lage, beide Modelle zu kombinieren. Für die explizite Kopplung muß jedoch noch der

Zeitpunkt des Aufbruches bestimmt werden. Die Problematik der Bestimmung der Aufbruch-Zeit wurde bereits in Abschnitt 5.1.2.4 angesprochen. Dort wurde als Anhaltspunkt für die Festlegung der Aufbruch-Zeit die Übereinstimmung zwischen den Ladungsspektren der Modellrechnung und dem Experiment herangezogen. Es wurde darauf hingewiesen, daß diese Übereinstimmung allerdings nicht ausreichend ist. Darum soll hier noch eine weitere Methode zur Festlegung der Break-up-Zeit vorgestellt werden.

Sie besteht darin, aus den Eigenwerten des Energieflußensors das Volumen des zu diesem Tensor gehörigen Ellipsoids zu berechnen und gegen die Zeit aufzutragen. Dies ist im linken Bild der Abbildung 5.9 bzgl. einer Au(150 A·MeV) + Au Reaktion für verschiedene Stoßparameter dargestellt.

Am Anfang sind die beiden Kerne isoliert; das Volumen ist klein. Die Kerne beginnen dann sich zu durchdringen. Dadurch steigt der Energiefluß bzw. das Volumen an. Nach der Kompression dehnt sich das System aus, wodurch das Volumen wieder abnimmt. Das System erreicht schließlich den Zustand mechanischer Instabilitäten und multifragmentiert. Danach ist die Reaktionsdynamik abgeschlossen. Als dominierende Kraft verbleibt die Coulomb-Wechselwirkung. Sie bewirkt, daß die, bei semizentralen Stößen vorhandenen, Restkerne sich einander abstoßen. Dadurch kommt es in diesem Fall wieder zu einem Anstieg des Volumens. Als Aufbruch-Zeit wählt man nun einen Zeitpunkt, an dem das Volumen noch nicht ganz seinen konstanten Wert bzw. sein Minimum erreicht hat. Anstelle des Volumens kann auch das Verhältnis zwischen der Nukleonendichte $n(t)$,

$$n(t) := \frac{\int \rho^2 d^3r}{\int \rho d^3r}, \quad (5.38)$$

und $n_0 := n(t = 0)$ gegen die Zeit auftragen werden. Dies ist im rechten Bild der Abbildung 5.9 gezeigt. Das Bild bezieht sich auf eine Au(250 A·MeV) + Au Reaktion für drei verschiedene Stoßparameter. Im Zustand maximaler Kompression erreicht die Dichte bei zentralen Stößen ($b = 0.5$ fm) das 1.6-fache der Grundzustandsdichte. Nach ca. 25 fm/c beginnt die explosionsartige Dekompressionsphase. Sie ist bei einem Zeitpunkt beendet, kurz bevor die Dichte n einen konstanten Wert annimmt, oder — bei semizentralen Stößen (hier verdichten sich die Restkerne aufgrund des attraktiven mittleren Feldes wieder, wodurch die Dichte erneut bis zu einem konstanten Wert leicht ansteigt) — ein Minimum erreicht hat. Auch hier wählt man diesen Zeitpunkt als den Zeitpunkt an dem die Multifragmentation stattfindet.

Da die Kernkräfte von kurzer Reichweite und für sehr kleine Nukleonabstände stark repulsiv sind, ist es nicht uninteressant danach zu fragen, inwieweit sich die Zeit, die bei einem stark wechselwirkenden System zwischen der maximalen Kompression und der Fragmentation vergeht, von der Zeit unterscheidet, die hierfür eine (klassisch) homogen geladene Kugel benötigt.

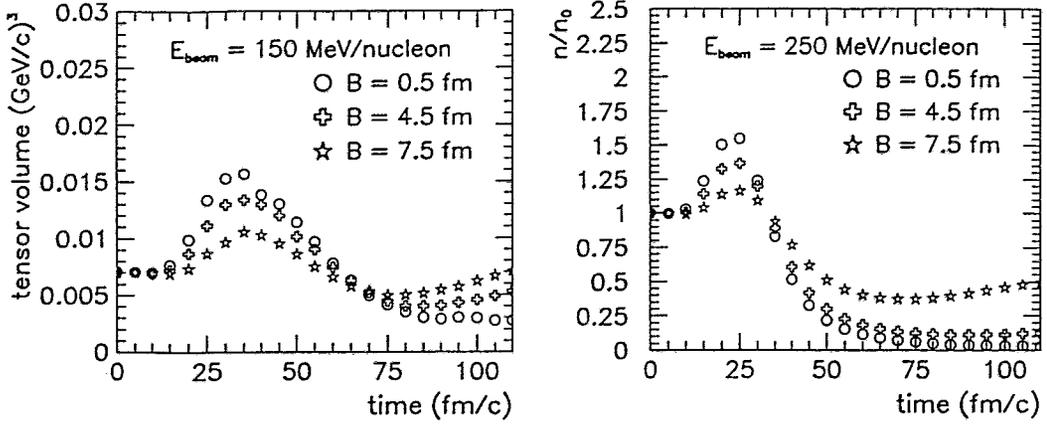


Abbildung 5.9: Erläuterung zur Abschätzung der Aufbruch-Zeit.

Im linken Bild ist das Volumen des zum Energieflußtensor gehörigen Ellipsoids gegen die Zeit aufgetragen. Das Bild bezieht sich auf eine $\text{Au}(150 \text{ A} \cdot \text{MeV}) + \text{Au}$ Reaktion.

Im rechten Bild ist das Dichteverhältnis n/n_0 (vergl. Text) gegen die Zeit aufgetragen. Das Bild bezieht sich auf eine $\text{Au}(250 \text{ A} \cdot \text{MeV}) + \text{Au}$ Reaktion.

Bei beiden Bildern bezeichnet B den Stoßparameter.

Ausgangspunkt für die Berechnung der Aufbruchzeit einer homogen geladenen Kugel ist die Kraft auf ein Kugelschalenelement, welches sich zur Zeit t im Abstand R vom Zentrum der Quelle befindet und das ΔZ Protonen sowie ΔA Nukleonen enthält:

$$\Delta A m_N \frac{d^2 R}{dt^2} = \frac{Z_{in} \Delta Z e^2}{R^2} \quad (5.39)$$

(Gaußsches Maßsystem). Mit Z_{in} wurde die Anzahl der Protonen bezeichnet, die sich in dem von der Kugelschale umschlossenen Volumen befindet. Weiterhin steht m_N für die Nukleonenmasse und e für die Elementarladung. Die Lösung der Differentialgleichung (5.39) ist aus der klassischen Mechanik bekannt (vergl. z. B. Kepler-Problem). Nach Multiplikation mit dR/dt und wenigen Umformungen erhält man:

$$\dot{R} = \sqrt{2(E - \Delta Z Z_{in} e^2 / R) / (\Delta A m_N)}. \quad (5.40)$$

Im Zustand maximaler Kompression gilt, $\dot{R} = \dot{R}(t=0) = 0$, ferner sei $R(t=0) =: R_{co}$. Damit ergibt sich für die Gesamtenergie E des Systems,

$$E = \frac{\Delta Z Z_{in} e^2}{R_{co}}. \quad (5.41)$$

Unter Verwendung von $\Delta Z/\Delta A = Z/A$ ($Z =$ Gesamtladungszahl, $A =$ Gesamt-massenzahl der Kugel), $Z_{in} = (4\pi/3)R_{co}^3 n_{co}(Z/A)$ ($n_{co} =$ Dichte bei maximaler Kompression), $\omega := \sqrt{(8\pi/3)n_{co}(Z/A)^2 e^2/m_N}$ und $\beta := R/R_{co}$ kann man schließlich Gleichung (5.40) umformen zu:

$$\dot{\beta} = \omega \sqrt{1 - 1/\beta}. \quad (5.42)$$

Daraus folgt,

$$t = (\operatorname{arcosh}(\sqrt{\beta}) + \sqrt{\beta(\beta - 1)})/\omega. \quad (5.43)$$

Wie erwähnt, findet man anhand des rechten Bildes der Abbildung 5.9 für die Dichte im Zustand maximaler Kompression, $n_{co} = 1.6 \cdot n_0$. Setzt man für die Aufbruchdichte $n_{bu} = n_0/5$ ($n_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$) an, so ergibt sich: $\beta = R/R_{co} = \sqrt[3]{n_{co}/n_{bu}} = 2$. Da sich Abbildung 5.9 auf eine Gold auf Gold Reaktion bezieht, ist $Z/A = 79/197$ und damit $\omega = 0.023 \text{ c/fm}$. Somit ergibt sich aus Gl. (5.43) für die Zeit zwischen maximaler Kompression und Fragmentation: $t = 100 \text{ fm/c}$. Aus dem zeitlichen Verlauf der mittleren Nukleonendichte ist hingegen ersichtlich, daß die Dichte bereits nach 25 fm/c vom maximalen Wert auf ein fünftel der Grundzustandsdichte abgenommen hat. Hiernach beschleunigen die Kernkräfte den Expansionsprozeß um den Faktor 4 — falls man als Referenz die Coulomb-Expansion einer homogen geladenen Kugel nimmt.

Um das SM-Modell anwenden zu können, muß das Nukleonensystem zum Zeitpunkt des Aufbruches nahezu thermalisiert sein. Einen Hinweis darauf, daß diese Bedingung erfüllt ist, geben die Bilder in Abbildung 5.10.

In der oberen Zeile der Abbildung sind die (Hybrid-) Temperaturen (Gl. (5.18)) in x -, y - und z -Richtung für verschiedene Stoßparameter gegen die Zeit aufgetragen. Man erkennt, daß im Verlauf der Reaktion die z -Temperatur deutlich höhere Werte als die x - bzw. y -Temperatur annimmt. Nach ca. 55 fm/c sind jedoch die Temperaturen gleich — so, wie man es für ein System im thermischen Gleichgewicht erwartet. Allerdings ist das fragmentierende System nach 55 fm/c noch nicht vollständig thermalisiert. Dies ist z. B. anhand der von Null verschiedenen divergenten x -, y - und z -Flüsse ersichtlich, welche in der unteren Zeile der Abbildung für die gleichen Stoßparameter gegen die Zeit aufgetragen wurden¹⁴. Gemäß Abbildung 5.9 sollte der Aufbruch-Zeitpunkt um die 70 fm/c liegen. Nach dieser Zeit gilt aber,

$$\frac{3}{2}T \gg \sum_{i=1}^3 E_{\text{div.flow},i}, \quad (5.44)$$

wodurch die Annahme einer näherungsweise Thermalisierung gerechtfertigt scheint.

¹⁴Die Nullstelle des z -Flusses liegt darin begründet, daß infolge der Kompression die Bewegung in z -Richtung zum Erliegen kommt.

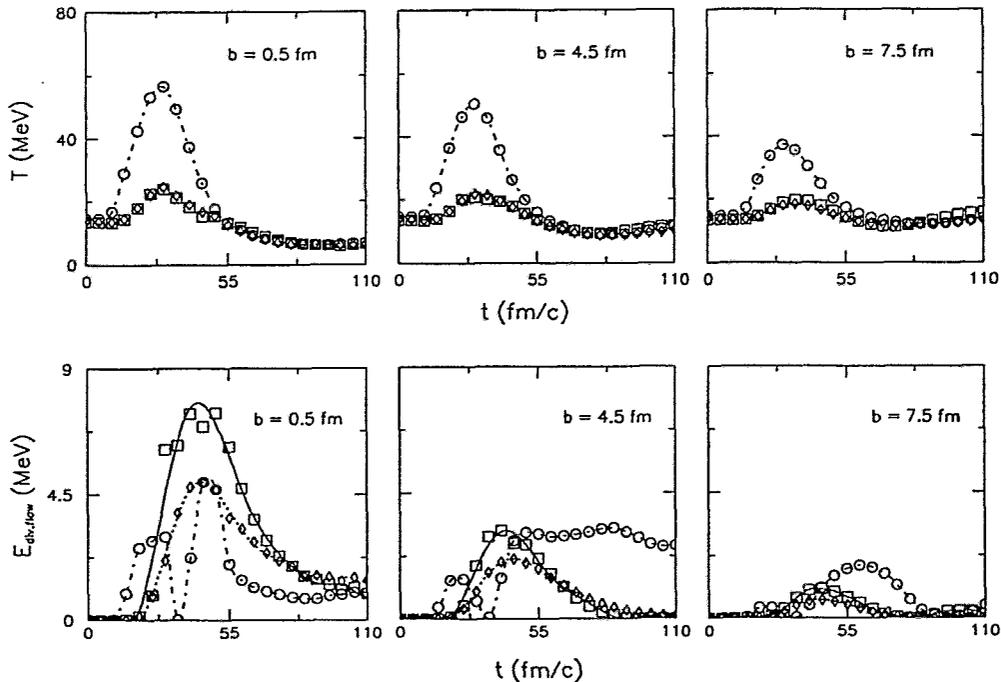


Abbildung 5.10: Temperaturen und divergente Flüsse in Abhängigkeit von der Zeit. Die Bilder beziehen sich auf eine $Au(150 A \cdot MeV) + Au$ Reaktion. Der Stoßparameter betrug 0.5, 4.5 oder 7.5 fm. Die Quadrate beziehen sich auf die x -, die Karos auf die y - und die Kreise auf die z -Richtung.

Das Kriterium hinsichtlich der Thermalisierung kann auch für frühere Zeiten, wie etwa 60 fm/c, oder (natürlich) für spätere Zeiten, wie z. B. 80 fm/c, als ausreichend erfüllt angesehen werden. Somit sollte sich die Unsicherheit in der Wahl des Aufbruch-Zeitpunktes nicht sehr auf die Ergebnisse des Modells auswirken.

5.2.7 Numerische Realisierung

Bisher wurde das prinzipielle Konzept für die Kopplung des BUU-Modells mit dem SM-Modell besprochen. Im folgenden sollen nun die wesentlichen Schritte der numerischen Simulation skizziert werden.

BUU-Programm¹⁵: Ausgangspunkt sind die Orte und Impulse der Testteilchen im Schwerpunktsystem zu einer Zeit, zu der der Aufbruch erfolgen soll. Es sind die folgenden Schritte auszuführen:

¹⁵Es wurde das BUU-Programm von W. Bauer [Bau87, Bau93] modifiziert.

- (a) Aussondern der Testteilchen, die sich in Bereichen befinden, in denen $\rho < \rho_{\text{limit}}$ gilt.
- (b) Die Orte und Impulse der verbleibenden Testteilchen in ihr Schwerpunktsystem transformieren.
- (c) Die Orte und Impulse in das L -System transformieren. Feststellen, in welcher Hemisphäre sich die einzelnen Testteilchen befinden. Die Drehimpulse und Energien berechnen (erforderlichenfalls die Orte und Impulse der Testteilchen in das Schwerpunktsystem der jeweiligen Quelle transformieren).
- (d) Die Orte und Impulse in das Θ -System transformieren. Die Parameter des Ansatzes sowie die von ihnen abhängigen Größen berechnen.
- (e) Alle Größen mit Bezug auf den jeweiligen Stoßparameter und die jeweilige Aufbruchzeit abspeichern.

SM-Programm¹⁶: Zuerst werden die auf den Stoßparameter bezogenen Daten eingelesen und anschließend wird die Zahl der Events auf die jeweiligen Stoßparameter verteilt. Sodann sind für jedes Event (und jeden Stoßparameter) die folgenden Schritte durchzuführen:

- (a) Mit einem Monte-Carlo-Verfahren die Orte der Fragmente in einen im L -System befindlichen Zylinder gleichmäßig verteilen.
- (b) Die Fragmente in das Θ -System transformieren. Die Fragmentgeschwindigkeiten nach der Funktion (5.37) generieren.
- (c) Die Geschwindigkeiten der Fragmente in das L -System transformieren.
- (d) Das Fragmente-System, unter Berücksichtigung der Teilchenverdampfung, expandieren lassen.
- (e) Die Geschwindigkeiten in das Schwerpunktsystem von Projektil- und Targetkern transformieren.
- (f) Die Geschwindigkeitskomponenten, die in der xy -Ebene liegen, stochastisch um die z -Achse drehen (hierdurch wird dem Rotieren der Reaktionsebene Rechnung getragen).
- (g) Die Geschwindigkeiten in das Laborsystem transformieren und analysieren. Die Transformation der Geschwindigkeiten vom Schwerpunktsystem in das Laborsystem wird relativistisch ausgeführt (siehe Anhang C). Ebenfalls wird die Relativgeschwindigkeit zwischen zwei Teilchen relativistisch berechnet¹⁷ (siehe Anhang D).

¹⁶Es wurde das Programm CRACKER modifiziert [Bar93p].

¹⁷Die Relativgeschwindigkeit wird für die Berechnung der Zweiteilchen-Korrelationsfunktion (Gl. (4.38)) benötigt.

5.2.8 Diskussion der Ergebnisse

Das Hybrid-Modell wurde bisher nur auf symmetrische Reaktionen (Au + Au) angewendet, obwohl es sehr leicht auch auf asymmetrische Systeme erweitert werden kann. Es wurden Strahlenergien von 150 A·MeV und 250 A·MeV zugrunde gelegt. Die Grenzdichte betrug $\rho_{\text{limit}} = 0.15 \cdot \rho_0$. Die Aufbruchzeit war 70 fm/c für Reaktionen bei 150 A·MeV und 60 fm/c bei 250 A·MeV Einschubenergie. Bei der BUU-Simulation wurde die Testteilchenzahl mit 200 veranschlagt. Ferner wurde, sofern nicht anders angegeben, die mittlere Zustandsgleichung verwendet. Bei dem SM-Programm wurden zwischen 10 000 und 20 000 Events angesetzt.

5.2.8.1 Die Impulsverteilungen des Modells im Vergleich mit denjenigen der BUU-Simulation

Bevor mit den Untersuchungen begonnen wird, soll getestet werden, ob mit dem Ansatz des Hybrid-Modells (Gl. (5.16)) die Impulsverteilungen des BUU-Modells,

$$\frac{dM}{dp_k} = \int d^3r' \int d^3p' \delta(p'_k - p_k) \rho(\vec{r}', \vec{p}') \quad (5.45)$$

($k \in \{x, y, z\}$), hinreichend gut reproduziert werden können. Zu diesem Zweck sind in Abbildung 5.11 die Impulsverteilungen der BUU-Simulation (Kreise) gemeinsam mit den entsprechenden Impulsverteilungen des Hybrid-Modells (durchgezogene Linien) für drei verschiedene Stoßparameter dargestellt. Man erkennt, daß die p_x - und p_y -Verteilungen für alle drei Stoßparameter gut übereinstimmen. Die p_z -Verteilungen stimmen für $b = 7.5$ fm gut überein. Mit abnehmenden Stoßparameter wird diese Übereinstimmung etwas schlechter (Die gepunktete Linie soll den idealen Fit an die p_z -Verteilung des BUU-Modells andeuten). Die geringfügige Diskrepanz bei kleinen Stoßparametern (um $p_z = 0$ GeV/c), eine Folge des „Doppel-Gauß-Ansatzes“, ist jedoch bzgl. der Verteilung $v^2\rho(v)$ vernachlässigbar und wirkt sich daher auch nicht auf die Fragmentgeschwindigkeiten aus. Wenn man die Breiten der Verteilungen als Pseudo-Temperaturen auffaßt¹⁸, so ergeben sich die in der Tabelle 5.1 aufgeführten Werte. Aufgrund der Tabelle ist ersichtlich, daß sich die Pseudo-Temperaturen bzgl. der BUU-Simulation, T_{BUU} , nicht sonderlich von den Pseudo-Temperaturen bzgl. des Hybrid-Modells, T_{Hyb} , unterscheiden. Die Mittelwerte $\langle T \rangle_{\text{BUU}}$ und $\langle T \rangle_{\text{Hyb}}$ (es wird über T_x , T_y und T_z gemittelt) der Pseudo-Temperaturen sind in bezug auf den Stoßparameter ungefähr konstant.

Insgesamt kann festgestellt werden, daß die Impulsverteilungen des Hybrid-Modells hinreichend gut mit denen des BUU-Modells übereinstimmen.

¹⁸Genauer: Die Breiten (sie werden über einen Gauß- bzw. Doppel-Gauß-Fit bestimmt) werden gleich $\sqrt{m_N T}$ gesetzt. Das Wort „Pseudo“ soll andeuten, daß hier, infolge der Ortsintegration, in die Breiten der Impulsverteilungen nicht nur die Temperatur, sondern auch die Flußenergie eingeht (vergl. Abschnitt 5.2.8.7).

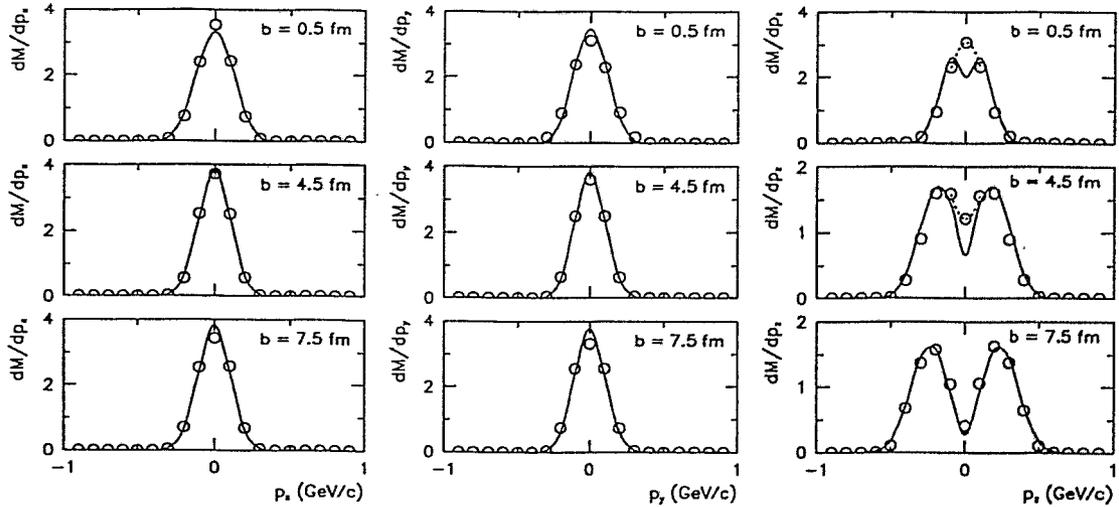


Abbildung 5.11: Verteilungen der Impulskomponenten des Hybrid-Modells im Vergleich mit denjenigen der BUU-Simulation für drei verschiedene Stoßparameter. Die Strahlenergie betrug $150 \text{ A} \cdot \text{MeV}$. Die Kreise beziehen sich auf die Impulsverteilungen der BUU-Simulation, die durchgezogenen Linien auf diejenigen des Hybrid-Modells. Die gepunkteten Linien in der rechten Spalte sollen den idealen Fit an die p_z -Verteilungen des BUU-Modells andeuten.

5.2.8.2 Charakteristika des fragmentierenden Systems

Im folgenden sollen nun die Massenzahl, die Anregungsenergie (pro Nukleon), das Aufbruchvolumen und die Temperatur des fragmentierenden Systems diskutiert werden. Diese Größen sind in Abhängigkeit vom Stoßparameter in Abbildung 5.12 gezeichnet. Die Massenzahl steigt linear mit dem Stoßparameter an (vergl. hierzu Abschnitt 5.1.2.5), wohingegen das Aufbruchvolumen ein nichtlineares Verhalten zeigt. Aus den Werten für die Massenzahl und denen für das Aufbruchvolumen ergibt sich für die Aufbruchdichte:

$$\rho_{bu} \epsilon \begin{cases} [\rho_0/5, \rho_0/4], & \text{bei } 150 \text{ A} \cdot \text{MeV Strahlenergie,} \\ [\rho_0/6, \rho_0/4], & \text{bei } 250 \text{ A} \cdot \text{MeV Strahlenergie.} \end{cases}$$

Bei einer Strahlenergie von 150 (250) A·MeV beträgt die über den Stoßparameter gemittelte Zylinderhöhe 19,6 (20.6) fm und der über den Stoßparameter gemittelte Zylinderradius 7.4 (7.2) fm.

Die Anregungsenergie verläuft für beide Strahlenergien ähnlich. Die Werte liegen zwischen ca. 12 MeV und 5 MeV. Sie befinden sich damit in einem Bereich, für den das SM-Modell hinreichend viele „kalte“ IMFs produziert. Für sehr zentrale

b (fm)	$T_{x, \text{BUU}}$ (MeV)	$T_{y, \text{BUU}}$ (MeV)	$T_{z, \text{BUU}}$ (MeV)	$\langle T \rangle_{\text{BUU}}$ (MeV)	$T_{x, \text{Hyb}}$ (MeV)	$T_{y, \text{Hyb}}$ (MeV)	$T_{z, \text{Hyb}}$ (MeV)	$\langle T \rangle_{\text{Hyb}}$ (MeV)
0.5	14	17	18	16	15	14	16	15
4.5	12	13	16	14	12	12	14	13
7.5	14	15	16	15	12	12	15	13

Tabelle 5.1: Pseudo-Temperaturen bzgl. des BUU-Modells, $T_{k, \text{BUU}}$, und hinsichtlich des Hybrid-Modells, $T_{k, \text{Hyb}}$, ($k = x, y, z$) in Verbindung mit dem Stoßparameter. Die Temperaturwerte wurden aus den Breiten der in Abbildung 5.11 gezeigten Verteilungen berechnet. Die spitzen Klammern bezeichnen den Mittelwert von T_x , T_y und T_z .

Stöße besitzt das System für beide Strahlenergien dieselbe Anregungsenergie, während sich seine Massenzahlen, in bezug auf die Strahlenergie, stark unterscheiden.

Im Gegensatz zu den entsprechenden Pseudo-Temperaturwerten $\langle T \rangle_{\text{Hyb}}$ der Tabelle 5.1, steigt die Temperatur T mit dem Stoßparameter an. Das liegt darin begründet, daß bei den Pseudo-Temperaturen auch die divergenten Flußenergien als Temperatur interpretiert werden, wohingegen bei den über Gleichung (5.18) bestimmten Temperaturen dies nicht der Fall ist. Mit anderen Worten: Bei zentralen Stößen ist die Temperatur etwas niedriger als bei semizentralen Kollisionen, da hier ein größerer Anteil der kinetischen Energie als divergente Flußenergie vorliegt.

In den Abbildungen 5.13 und 5.14 wurden dieselben Größen wie in Abbildung 5.12 aufgetragen, wobei allerdings nicht die mittlere, sondern einmal die weiche (Abbildung 5.13) und das andere Mal die harte (Abbildung 5.14) nukleare Zustandsgleichung verwendet wurde. Anhand der Abbildungen ist ersichtlich, daß die Größen nahezu unabhängig von der verwendeten Zustandsgleichung sind. Hinsichtlich der Temperatur ist auffällig, daß bei Verwendung der harten Zustandsgleichung fast kein Unterschied bezüglich der verwendeten Strahlenergie festzustellen ist.

Zum Schluß dieses Abschnittes seien die über die Eventzahl gemittelten Werte der Entropie (pro Nukleon) zusammen mit den jeweiligen Stoßparametern in Tabelle 5.2 dargestellt. Die Tabelle wurde unter Verwendung der mittleren Zustandsgleichung erstellt. Für die Stoßparameter $b = 5.5, 6.5$ und 7.5 fm liegen die Entropiewerte bzgl. einer Strahlenergie von $250 \text{ A} \cdot \text{MeV}$ deutlich unter den Werten, welche sich auf eine Strahlenergie von $150 \text{ A} \cdot \text{MeV}$ beziehen. Dies wird hauptsächlich durch die kleinere Anregungsenergie (vergl. Abbildung 5.12) bewirkt. Mittelt man die Entropiewerte noch über den Stoßparameter, so ergibt sich für eine Strahlenergie von $150 (250) \text{ A} \cdot \text{MeV}$ ein Wert von $2.0 (1.9)$. Diese

b (fm)	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	E_{beam}
S/A	2.6	2.6	2.5	2.5	2.3	2.1	1.8	1.4	150
S/A	2.5	2.7	2.8	2.6	2.2	1.7	1.4	1.2	250

Tabelle 5.2: Entropien (pro Nukleon) in Verbindung mit dem Stoßparameter für Gold auf Gold Reaktionen bei einer Strahlenergie von 150 A·MeV und 250 A·MeV. Die Entropiewerte wurden über die Eventzahl gemittelt. Es wurde die mittlere Zustandsgleichung verwendet.

Werte stehen im Einklang mit den Ergebnissen von Referenz [Kuh93].

5.2.8.3 Die Nukleonenflüsse

In Abbildung 5.15 sind die Flußenergien für zwei verschiedene Strahlenergien gezeigt. Da der Übergang von einem Ein-Quellenaufbruch zu einem Zwei-Quellenaufbruch bei einem Stoßparameter von ca. 4 fm stattfindet, wurde $E_{\text{flow,g}}$ zusammen mit $E_{\text{div.flow,3}}$ aufgetragen, falls der Stoßparameter kleiner oder gleich 4 fm ist — und getrennt im anderen Fall. Man erkennt, daß für kleine Stoßparameter der divergente Fluß in y -Richtung deutlich stärker ist als der divergente Fluß in x -Richtung. Dies ist verständlich, da der divergente Fluß in y -Richtung dem im Abschnitt 4.2.1 vorgestellten Ausquetschfluß entspricht. Weiterhin entnimmt man der Abbildung, daß die Flußenergien $E_{\text{div.flow,1}}$ und $E_{\text{div.flow,2}}$ mit zunehmenden Stoßparameter glatt abnehmen. Ebenso nimmt $E_{\text{div.flow,3}}$ für größere Stoßparameter ab. Dies ist konform mit experimentellen Untersuchungen der ALADIN-Gruppe [Lin93], die wenig Fluß für semizentrale Stöße ergaben.

Um die Frage zu untersuchen, inwieweit die Flußenergien von der nuklearen Zustandsgleichung abhängen, wurden in Abbildung 5.16 die Flußenergien noch einmal unter Verwendung der weichen (obere Zeile) und der harten (untere Zeile) Zustandsgleichung aufgetragen. Anhand der Abbildung ist ersichtlich, daß bei Verwendung der weichen Zustandsgleichung die Flußenergien um etwa 1 MeV (bzgl. 150 A·MeV; linke Spalte) bzw. 2 MeV (bzgl. 250 A·MeV; rechte Spalte) gegenüber der harten Zustandsgleichung zunehmen. Der Effekt tritt am deutlichsten bei den transversalen Flußenergien $E_{\text{div.flow,1}}$ und $E_{\text{div.flow,2}}$ bzgl. $b = 0.5$ fm auf. Bzgl. einer Strahlenergie von 150 A·MeV beträgt hier der Unterschied in den Flußenergien ca. 34 % der entsprechenden maximalen divergenten Flußenergie — und bzgl. einer Strahlenergie von 250 A·MeV ungefähr 28 %.

Eine weitere Größe, von der die Nukleonenflüsse (bei den betrachteten Einschußenergien) abhängen können, ist der elastische Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitt. Um diese Abhängigkeit zu studieren, wurden in Abbildung 5.17 die Flußenergien einmal unter Verwendung eines um den Faktor 0.8 verringerten Wirkungsquerschnittes (linke Spalte) und einmal unter Benutzung eines um den Fak-

b (fm)	0.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	E_{beam}
Θ_{flow} (Grad)	78.85	47.89	31.30	21.51	14.89	10.88	7.27	4.55	150
Θ_{flow} (Grad)	84.89	44.58	25.40	16.71	12.75	9.48	7.33	5.09	250

Tabelle 5.3: *Flußwinkel und Stoßparameter für Gold auf Gold Reaktionen bei einer Strahlenergie von 150 A·MeV und 250 A·MeV.*

tor 1.2 vergrößerten Wirkungsquerschnittes (rechte Spalte) aufgezeichnet. Eine Vergrößerung¹⁹ des Wirkungsquerschnittes führt bzgl. $E_{\text{div.flow},1}$ und $E_{\text{div.flow},3}$ zu einem etwas höheren Fluß. Dies steht im Einklang mit Referenz [Har92]. Die Flußenergie $E_{\text{flow},g}$ nimmt hingegen bei Vergrößerung des Wirkungsquerschnittes ab. Das ist verständlich, da $E_{\text{flow},g}$ aufgrund der translatorischen Bewegung der Quelle zustande kommt und diese translatorische Bewegung infolge des größeren Stoppings (es kommt durch das Vergrößern des Wirkungsquerschnittes zustande; vergl. Abschnitt 4.4) langsamer verläuft. Sehr interessant ist weiterhin, daß die (zum Ausquetschfluß korrespondierende) Flußenergie $E_{\text{div.flow},2}$ für kleinere Stoßparameter ebenfalls deutlich abnimmt, wenn der Wirkungsquerschnitt vergrößert wird. Dies ist eine Folge davon, daß die Nukleonen in diesem Fall vermehrt stoßen und dadurch schlechter senkrecht zur Reaktionsebene entweichen können. In diesem Zusammenhang sei auf QMD-Rechnungen [Har94] verwiesen, die ergeben, daß der Ausquetschfluß hinsichtlich leichter Fragmente stärker ist, als bei Protonen. Das ist ebenfalls vor dem Hintergrund verständlich, daß bei den Nukleonen der Ausquetschfluß aufgrund der Nukleon-Nukleon-Stöße „ausgewaschen“ wird.

Wie in Abschnitt 4.2.2 dargelegt wurde, ist die Steigung der $\langle p_x/A \rangle$ -Verteilung ein Maß für die Stärke des Seitwärtsflusses. Der Zusammenhang mit den Eigenwerten (gebraucht werden λ_1 und λ_3) des Tensors Θ wird in erster Näherung durch Gleichung (4.11) beschrieben. Dem Verhältnis λ_3/λ_1 entspricht $E_{\text{flow},3}/E_{\text{div.flow},\min}$, mit $E_{\text{div.flow},\min} := \min\{E_{\text{div.flow},1}, E_{\text{div.flow},2}\}$. Die Werte des Flußwinkels sind in Tabelle 5.3 aufgeführt. Damit kann man nun für jeden Stoßparameter die Steigung der $\langle p_x/A \rangle$ -Verteilung berechnen und sodann die maximale Stärke $\Delta_{\text{side}}^{\max}$ des Seitwärtsflusses angeben. Man erhält:

$$\Delta_{\text{side}}^{\max} = \begin{cases} 0.47, & \text{bzgl. } E_{\text{beam}} = 150 \text{ A·MeV} \\ 0.42, & \text{bzgl. } E_{\text{beam}} = 250 \text{ A·MeV} \end{cases} \quad (5.46)$$

bei $b \approx b_{\text{max}}/4$. Daß der maximale Seitwärtsfluß bei $b \approx b_{\text{max}}/4$ auftritt, steht in Übereinstimmung mit Referenz [Har92, Kam86].

¹⁹Als Referenz dienen nun die in der linken Spalte aufgezeichneten Flußenergien (und nicht etwa die in Abbildung 5.15 dargestellten Flußenergien).

5.2.8.4 Charakteristika der Rotation

Bei Fragmentationsprozessen stellt sich unwillkürlich die Frage, inwieweit die Fragmentation von dem Drehimpuls beeinflusst wird. Darum wurde in Abbildung 5.18 der Drehimpuls des Gesamtsystems (bezogen auf den Schwerpunkt), der Drehimpuls der in der oberen Hemisphäre liegenden Quelle (bezogen auf den Schwerpunkt der Quelle) sowie die zu dieser Quelle gehörige Rotationsenergie über den Stoßparameter aufgetragen. Der Drehimpuls des Gesamtsystems steigt streng monoton an und erreicht bei $b = 8$ fm in etwa $2000 \hbar$. Ein anderes Verhalten zeigt jedoch der auf eine Quelle bezogene Drehimpuls. Er erreicht bei $b = 5$ fm einen maximalen Wert von nur ca. $100 \hbar$. Die entsprechende maximale Rotationsenergie beträgt ungefähr 0.4 MeV. Im Vergleich zur Anregungsenergie ist diese Energie relativ gering. Daher scheint der Drehimpuls in bezug auf die Multifragmentation vernachlässigbar zu sein.

5.2.8.5 Die Ladungsverteilung

Einen wichtigen Hinweis darauf, daß das Hybrid-Modell richtig arbeitet, gibt die Ladungsverteilung. Sie ist in Abbildung 5.19 für zentrale und semizentrale Stöße dargestellt²⁰. Die experimentellen Daten für semizentrale Au(250 A·MeV) + Au Reaktionen konnten hierbei nicht eingezeichnet werden, da diese noch nicht veröffentlicht sind.

Man erkennt, daß die mit dem Modell berechneten Werte für $2 \leq Z \leq 8$ gut mit den experimentellen Daten übereinstimmen. Die Abweichungen für $Z = 1$ liegen wahrscheinlich darin begründet, daß die in der Nicht-Gleichgewichtsphase emittierten leichten Teilchen nicht berücksichtigt werden. Die bei zentralen Au(150 A·MeV) + Au Reaktionen auftretenden Diskrepanzen für $Z \geq 9$ können nicht physikalisch erklärt werden. Sie spielen jedoch für die weitere Analyse keine Rolle, da die Anzahl der Fragmente mit $Z \geq 9$, in bezug zu den leichteren Teilchen, sehr gering ist. Alles in allem können die mit dem Hybrid-Modell berechnete Ladungsverteilungen als hinreichend gut angesehen werden.

5.2.8.6 Die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion

Die Ergebnisse bzgl. der Relativgeschwindigkeitsverteilungen und der Zweiteilchen-Korrelationsfunktion (Gl. (4.38)) sind für zentrale Stöße in Abbildung 5.20 gezeigt.

Die Bilder in der oberen und mittleren Zeile beziehen sich auf eine Einschußenergie von 150 A·MeV. Im Bild (a) ist deutlich erkennbar, daß die mit dem Modell berechnete Y_{12} -Verteilung, gegenüber der experimentellen, zu höheren Geschwindigkeiten hin verschoben ist. Die numerischen Studien ergaben, daß die Verschiebung im wesentlichen durch zu hohe Werte der divergenten Flußenergien,

²⁰Die Ereignisklassen PM3, PM4 und PM5 wurden im Abschnitt 4.5.3 erläutert.

$E_{\text{div.flow,1}}$ und $E_{\text{div.flow,2}}$, hervorgerufen wird. Sie verschwindet (nahezu), wenn man die Flußenergien um 50 % reduziert. Dies ist in Bild (b) demonstriert. Die Notwendigkeit der Reduktion der Flußenergien gibt einen Hinweis darauf, daß schwerere Fragmente mehr im Inneren des aufbrechenden Kerns gebildet werden. Anhand der Bilder (c) und (d) ist ersichtlich, daß auch die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion sensitiv auf die Flußenergie ist. Daher muß die Flußenergie berücksichtigt werden, wenn man nach der Standardmethode (vergl. Abschnitt 4.6) die Aufbruchdichte abschätzt.

Die Bilder in der unteren Zeile beziehen sich auf eine Einschußenergie von 250 A·MeV, wobei die transversale divergente Flußenergie gleichfalls um den Faktor 2 reduziert wurde. Die Statistik ist hier etwas schlechter als bei den (150 A·MeV)-Werten, da gemäß Abbildung 5.12 die Quelle weniger Nukleonen enthält²¹. Die Übereinstimmung zwischen den theoretischen und experimentellen Werten ist gegenüber den (150 A·MeV)-Reaktionen ebenfalls etwas schlechter, da gemäß Abbildung 5.15 bei einer Einschußenergie von 250 A·MeV die transversale Flußenergie etwas größer ist als bei einer Strahlenergie von 150 A·MeV. Eine nochmalige Reduktion der transversalen divergenten Flußenergie würde zu einer besseren Übereinstimmung führen. Hierauf wurde allerdings verzichtet, da die Übereinstimmung durchaus als zufriedenstellend angesehen werden kann. Die Auswirkung einer stärkeren Flußreduktion wird bei der nun folgenden Diskussion der semizentralen Stöße demonstriert.

Die vorhergehenden Modelle dieses Kapitels führten zu der Vermutung, daß der bei semizentralen Reaktionen auftretende Peak der Zweiteilchen-Korrelationsfunktion von einer gemeinsamen Seitwärtsbewegung der Fragmente bewirkt werden würde und daß diese gemeinsame Seitwärtsbewegung eine Orts-Geschwindigkeitsverteilung der Fragmente zu Beginn der Expansion erfordere. Das vorliegende Hybrid-Modell trägt beiden Rechnung. Mit ihm wurde nun die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion sowie die dazugehörigen Geschwindigkeitsverteilungen für semizentrale Stöße berechnet. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.21 dargestellt. Die mit dem Modell berechneten Werte (Kreise) bzgl. einer Einschußenergie von 150 A·MeV stimmen sehr gut mit den experimentellen Werten (Sterne) überein. Ebenso wie in Abbildung 5.20, mußten hier die transversalen divergenten Flußenergien um den Faktor 2 reduziert werden. Dies gibt einen Hinweis darauf, daß die Fragmente bei semizentralen Stößen in der näheren Umgebung der Hauptflußachse gebildet werden — im Einklang mit Referenz [Cse83, Sto81, Sto82, Dos87] (vergl. Abschnitt 4.2.2).

Auf der rechten Seite der Abbildung sind die Werte für eine Einschußenergie von 250 A·MeV gezeigt. Die Übereinstimmung zwischen den theoretischen und den experimentellen Werten ist, wie bei den zentralen Stößen, etwas schlechter als bei den (150 A·MeV)-Werten. Anhand der Korrelationsfunktion ist demonstriert, daß eine bessere Übereinstimmung erzielt werden kann, in dem man den

²¹Die Eventzahl hat sich gegenüber den (150 A·MeV)-Werten nicht geändert.

transversalen Fluß noch weiter, im vorliegenden Fall um den Faktor 4, reduziert. Die Reduktion der longitudinalen Flüsse $E_{\text{div.flow},3}$ und $E_{\text{flow},g}$ sowie die Reduktion der Temperatur verfälschte die C_2 -Funktion.

Die Reduktion der transversalen Flußenergien bedeutet, daß die Größe ε ,

$$\varepsilon := \frac{1}{2} (E_{\text{div.flow},1} + E_{\text{div.flow},2}) / E_{\text{flow},3} \quad (5.47)$$

ebenfalls kleiner wird. ε ist ein Maß für die „Langgestrecktheit“ des Impulsellipsoids.

Abschließend kann nun festgestellt werden: Der Peak der Zweiteilchen-Korrelationsfunktion wird durch den Seitwärtsfluß der Fragmente, d. h. genauer, durch einen von Null verschiedenen Flußwinkel (vergl. Abschnitt 5.1.1.6) sowie durch einen kleinen Wert von ε , $\varepsilon < 1/2$, bewirkt²². Diese Aussage wird durch den experimentellen Befund von Referenz [Kot95] bestärkt, wonach der Peak der C_2 -Funktion verschwindet, sobald alle Events in ein und dieselbe Reaktionsebene gedreht werden.

5.2.8.7 Die Verteilungen der kinetischen Energie

Zum Schluß dieses Kapitels soll die Verteilung der kinetischen Energie für Lithium (Li), Beryllium (Be), Bor (B) und Kohlenstoff (C) bzgl. zentraler Au(150 A·MeV) + Au Reaktionen diskutiert werden. Die Verteilungen sind in Abbildung 5.22 gezeigt. Aus Konsistenzgründen wurden bei den Simulationsrechnungen die Flußenergien $E_{\text{div.flow},1}$ und $E_{\text{div.flow},2}$ wie im vorhergehenden Abschnitt um den Faktor 2 reduziert.

Die Abbildung zeigt deutlich, daß die Steigung einer Verteilung um so flacher wird, je schwerer das Element ist.

Dieses Verhalten läßt sich bereits verstehen, wenn anstelle der Gleichung (5.37) ein vereinfachter (sphärisch symmetrischer) Ansatz für die Phasenraumverteilung betrachtet wird:

$$w(\vec{r}, \vec{v}) = c \cdot e^{-\frac{Am_N}{2T}(\vec{v} - B\vec{r})^2} \cdot e^{-\left(\frac{r}{R}\right)^2} \quad (5.48)$$

Hierbei bezeichnet R den Kernradius. B ist keine Matrix mehr, sondern ein Skalar. Nach Integration über den Ort erhält man,

$$w(\vec{v}) \propto e^{-E(T + \frac{2}{3}A \cdot E_{\text{flow}})^{-1}}, \quad (5.49)$$

mit der kinetischen Energie $E = \frac{1}{2}m_N A \vec{v}^2$ und der Flußenergie $E_{\text{flow}} = \frac{3}{4}m_N (BR)^2$. In die Breite der Geschwindigkeitsverteilung geht also nicht nur die Temperatur, sondern auch die Flußenergie ein. Da $w(\vec{v})$ proportional ist zur

²² $\varepsilon < 1/2$ folgt aus Abbildung 5.15 und der Reduktion um den Faktor 2.

Anzahl der Teilchen pro Impuls, pro Raumwinkelement und pro Energieintervall,

$$w(\vec{v}) \propto \frac{dM}{pd\Omega dE}, \quad (5.50)$$

gilt:

$$\ln \left(\frac{dM}{pd\Omega dE} \right) = \frac{-E}{T + \frac{2}{3}A \cdot E_{\text{flow}}} + \text{const.} \quad (5.51)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Steigung um so flacher wird, je schwerer das Element ist.

Offensichtlich haben die leichten Elemente etwas zu wenig Fluß im Vergleich mit dem Experiment, während die schwereren sehr gut reproduziert werden. Da für alle Elemente die Flußenergie um den gleichen Faktor reduziert wurde, liefern die Verteilungen einen weiteren Hinweis darauf (vergl. letzten Abschnitt), daß die schweren Elemente mehr im Inneren des aufbrechenden Kerns gebildet werden.

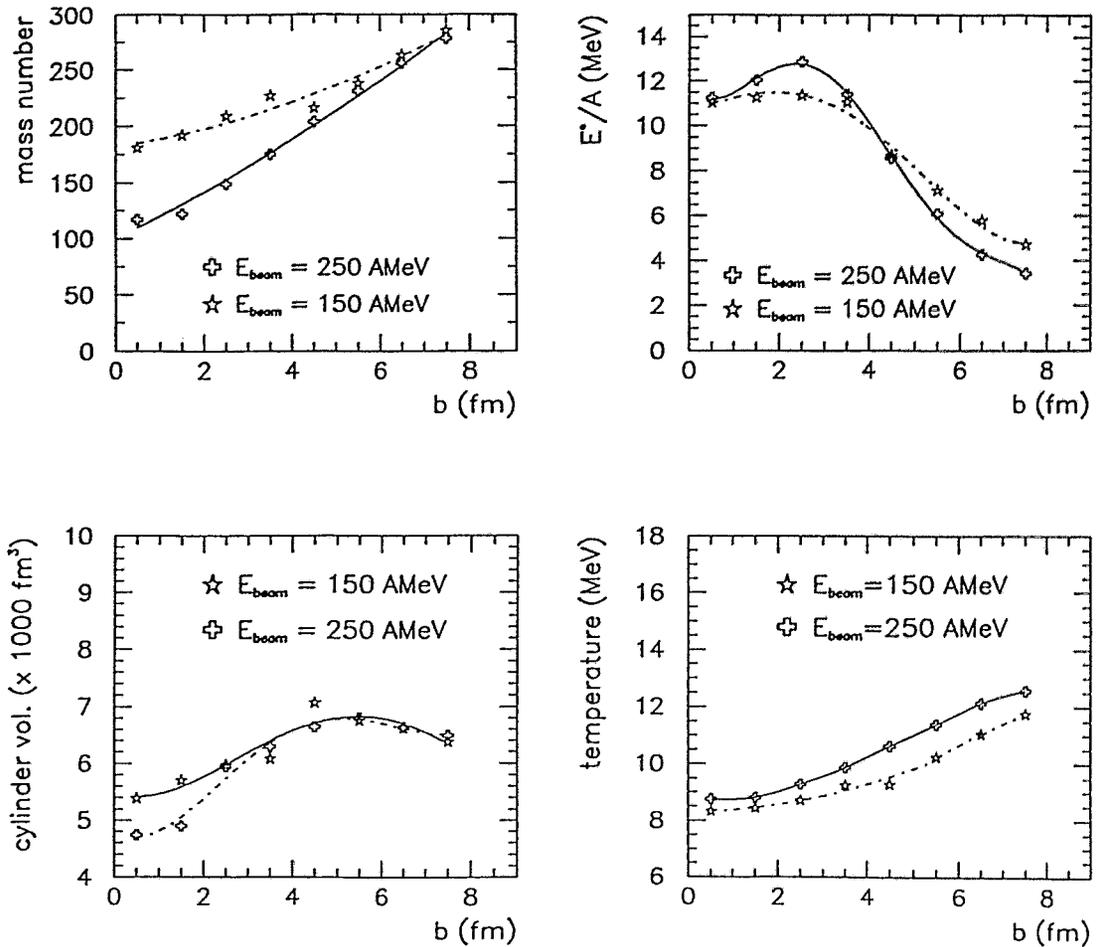


Abbildung 5.12: Massenzahl, Anregungsenergie, Aufbruchvolumen und Temperatur als Funktion des Stoßparameters für Gold auf Gold Reaktionen bzgl. zwei verschiedener Strahlenergien. Es wurde die mittlere nukleare Zustandsgleichung verwendet.

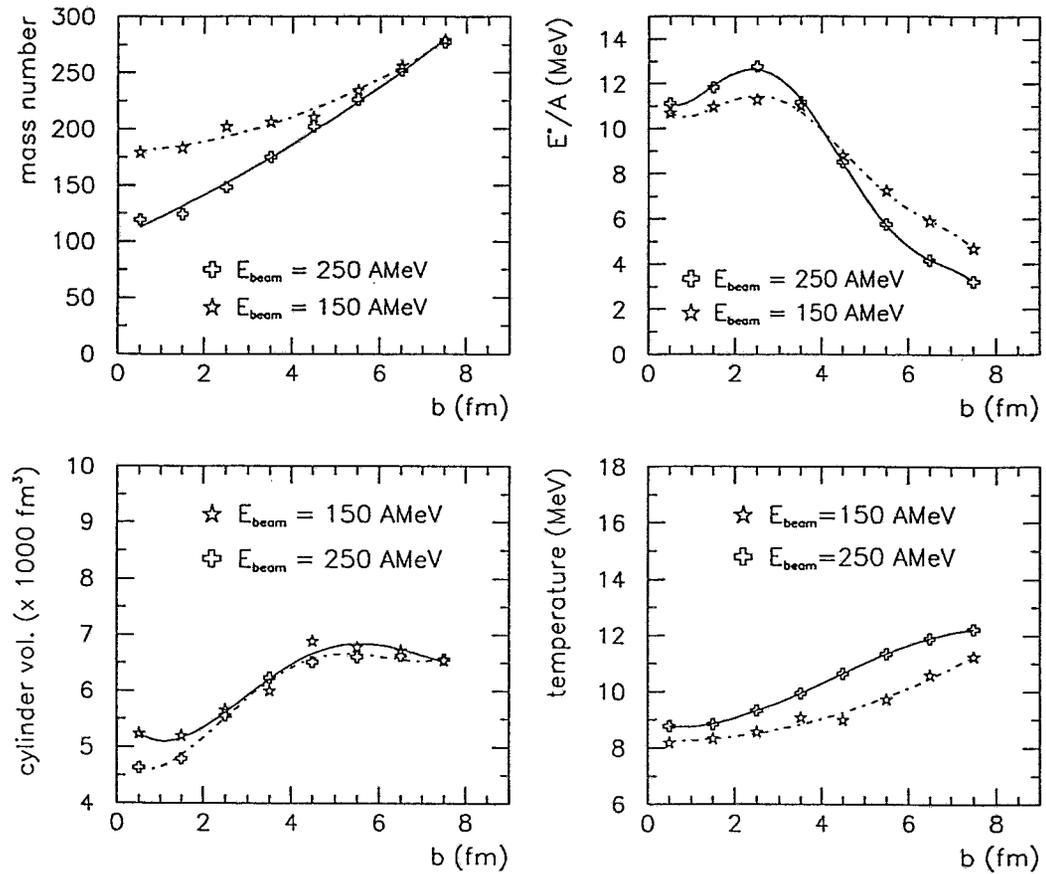


Abbildung 5.13: Massenzahl, Anregungsenergie, Aufbruchvolumen und Temperatur als Funktion des Stoßparameters für Gold auf Gold Reaktionen bzgl. zwei verschiedener Strahlenergien. Es wurde die weiche nukleare Zustandsgleichung verwendet.

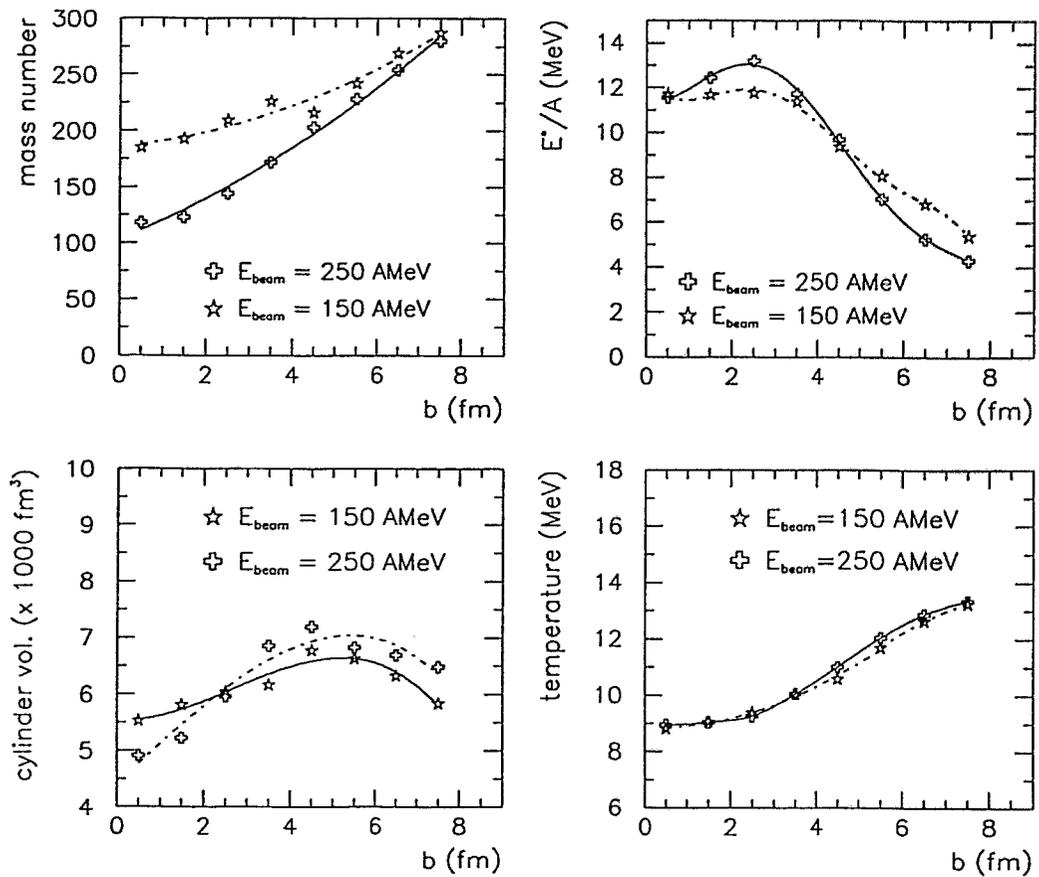


Abbildung 5.14: Massenzahl, Anregungsenergie, Aufbruchvolumen und Temperatur als Funktion des Stoßparameters für Gold auf Gold Reaktionen bzgl. zwei verschiedener Strahlenergien. Es wurde die harte nukleare Zustandsgleichung verwendet.

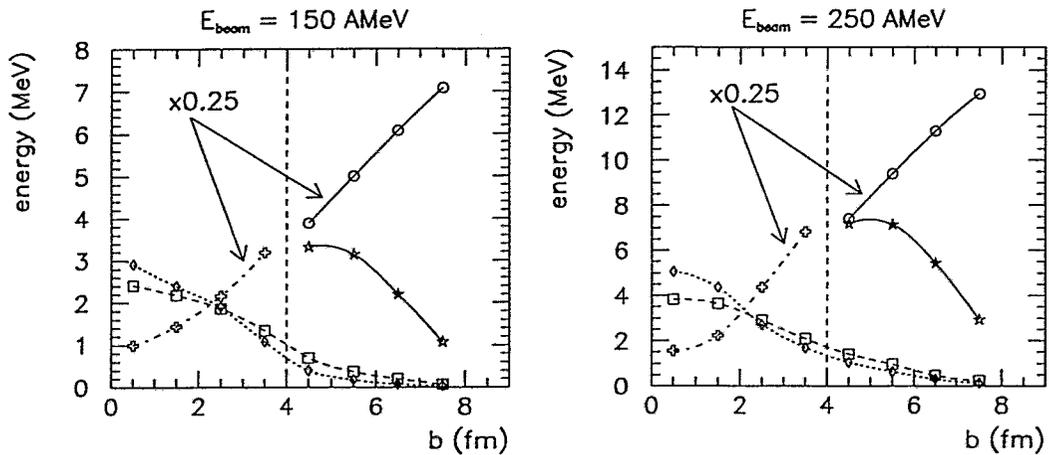


Abbildung 5.15: Flußenergien in Abhängigkeit vom Stoßparameter bzgl. $\text{Au} + \text{Au}$ Reaktionen bei einer Einschußenergie von $150 \text{ A} \cdot \text{MeV}$ und $250 \text{ A} \cdot \text{MeV}$. Die Quadrate gehören zu $E_{\text{div.flow},1}$, die Karos zu $E_{\text{div.flow},2}$ und die Sterne zu $E_{\text{div.flow},3}$. Die Kreuze beziehen sich auf $E_{\text{flow},3}$ und die Kreise auf $E_{\text{flow},g}$. Die Pfeile kennzeichnen Kurven, welche mit dem Faktor 0.25 multipliziert wurden. Es wurde die mittlere EOS verwendet.

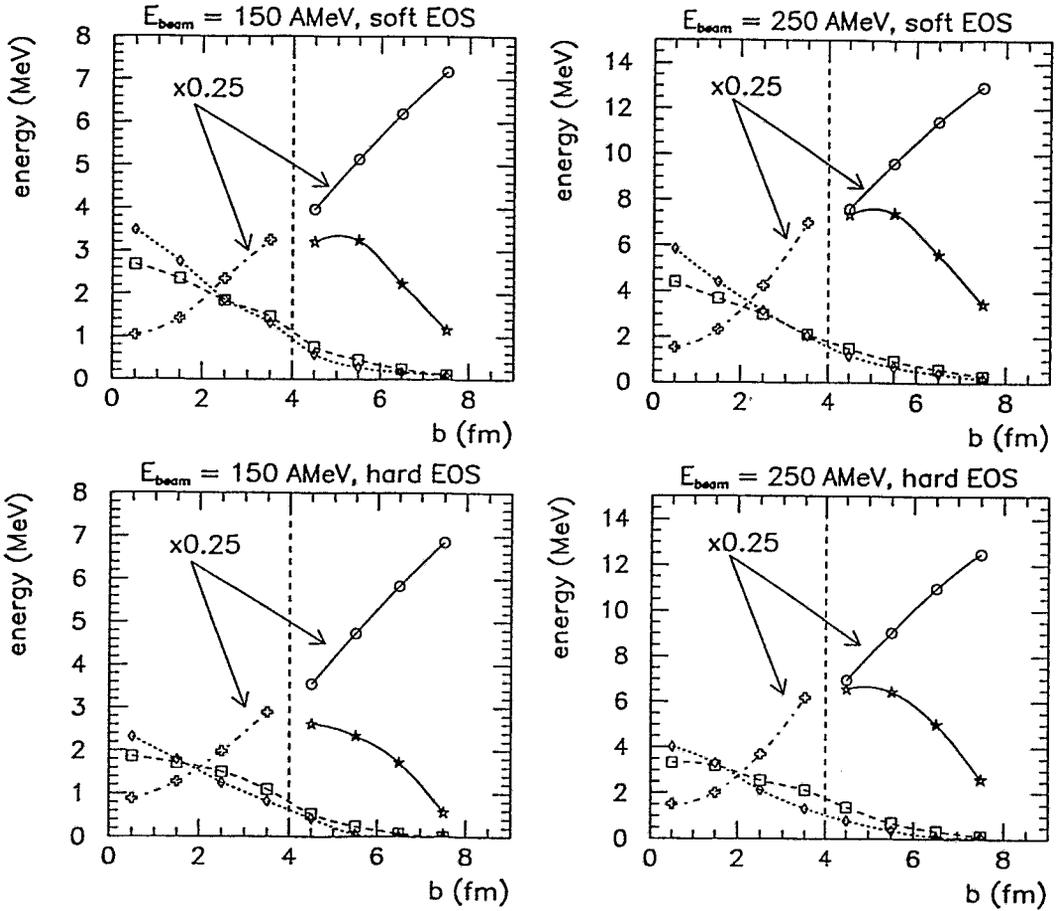


Abbildung 5.16: Flußenergien in Abhängigkeit vom Stoßparameter bzgl. Au + Au Reaktionen bei einer Einschußenergie von 150 A-MeV und 250 A-MeV für zwei verschiedene Parameterisierungen der nuklearen Zustandsgleichung (EOS). Die Quadrate gehören zu $E_{\text{div.flow,1}}$, die Karos zu $E_{\text{div.flow,2}}$ und die Sterne zu $E_{\text{div.flow,3}}$. Die Kreuze beziehen sich auf $E_{\text{flow,3}}$ und die Kreise auf $E_{\text{flow,g}}$. Die Pfeile kennzeichnen Kurven, welche mit dem Faktor 0.25 multipliziert wurden.

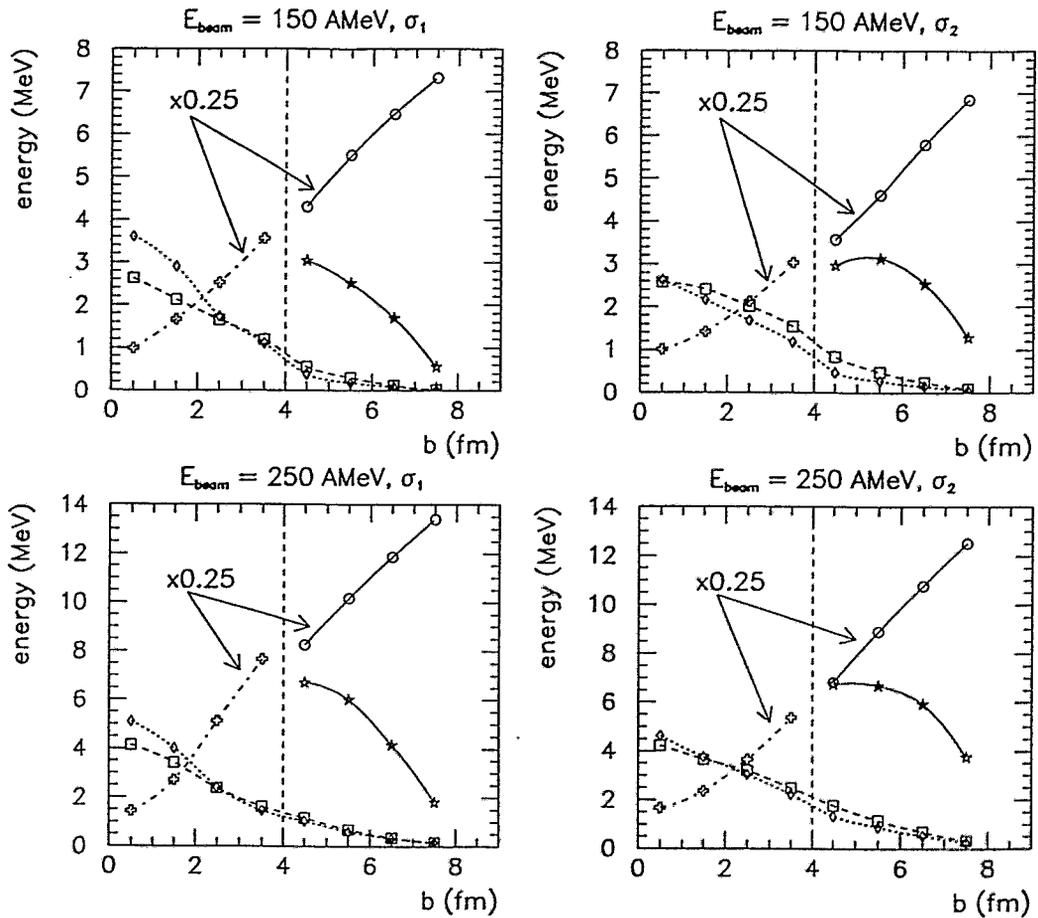


Abbildung 5.17: Flußenergien in Abhängigkeit vom Stoßparameter bzgl. $Au + Au$ Reaktionen bei einer Einschussenergie von 150 A-MeV und 250 A-MeV für zwei unterschiedlich große Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitte $\sigma_1 = \sigma \cdot 0.8$ (linke Spalte) und $\sigma_2 = \sigma \cdot 1.2$ (rechte Spalte). σ bezeichnet den elastischen Wirkungsquerschnitt. Die Quadrate gehören zu $E_{\text{div.flow,1}}$, die Karos zu $E_{\text{div.flow,2}}$ und die Sterne zu $E_{\text{div.flow,3}}$. Die Kreuze beziehen sich auf $E_{\text{flow,3}}$ und die Kreise auf $E_{\text{flow,g}}$. Die Pfeile kennzeichnen Kurven, welche mit dem Faktor 0.25 multipliziert wurden. Es wurde die mittlere EOS benutzt.

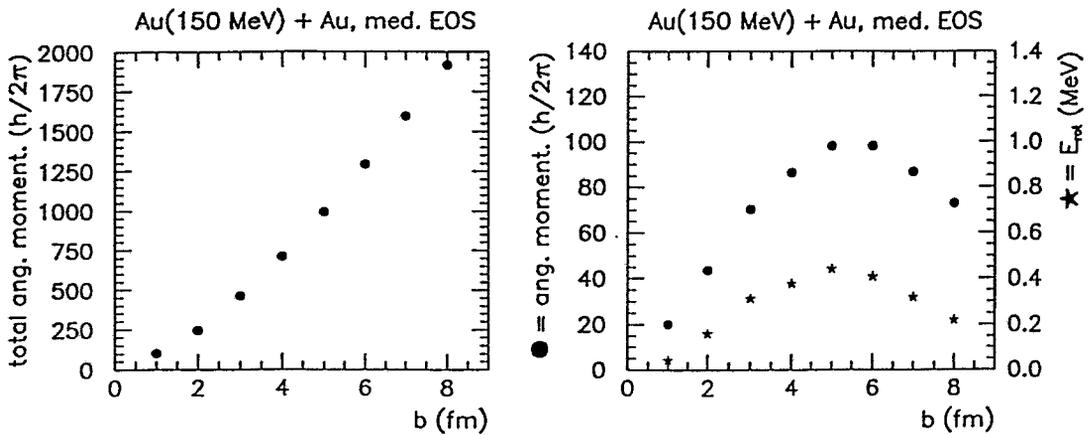


Abbildung 5.18: Drehimpuls in Abhängigkeit vom Stoßparameter für eine Au(150 A·MeV) + Au Reaktion. Im linken Bild ist der Gesamtdrehimpuls (bezogen auf den Schwerpunkt) des fragmentierenden Systems dargestellt. Im rechten Bild gehören die ausgefüllten Kreise zu dem Drehimpuls (bezogen auf den Schwerpunkt) der sich in der oberen Hemisphäre befindlichen Quelle. Die Sterne beziehen sich auf die dazugehörige Rotationsenergie E_{rot} . Die Rotationsenergie ist auf die Nukleonenzahl bezogen worden. Dies trifft jedoch nicht auf die Drehimpulse zu.

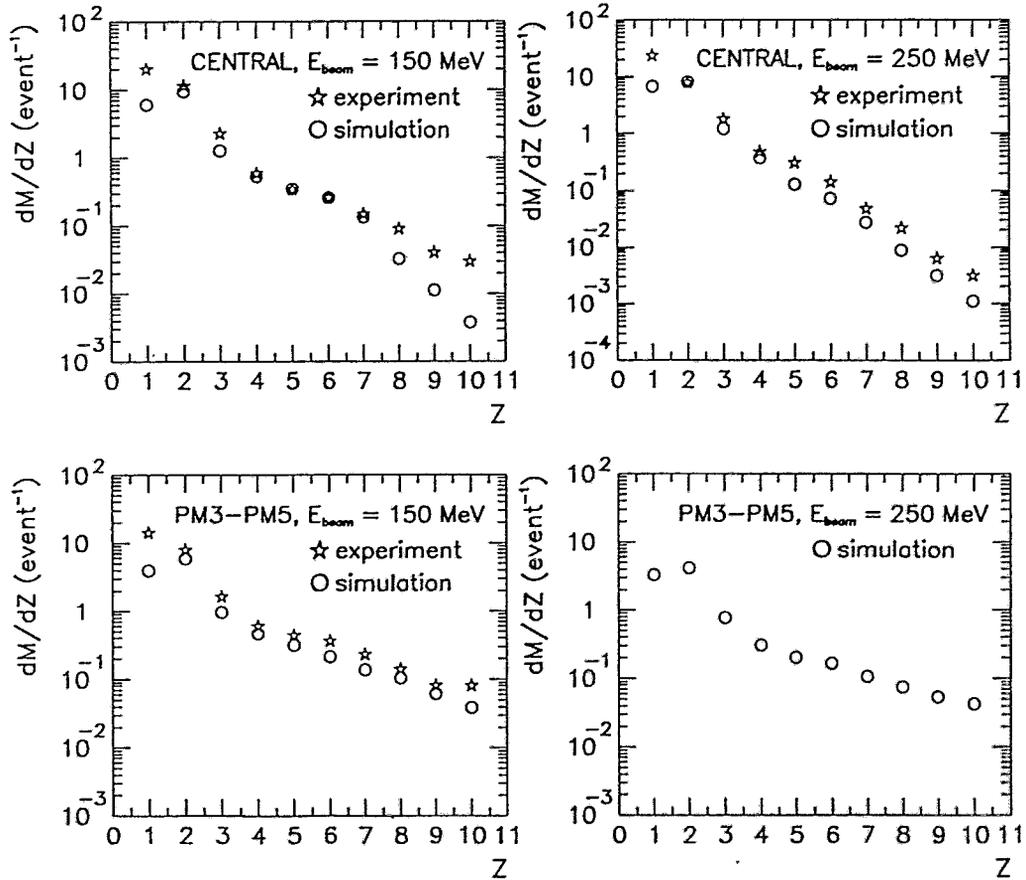


Abbildung 5.19: Ladungsverteilungen für zentrale und semizentrale Stöße im Vergleich mit den experimentellen Daten. Die experimentellen Daten für zentrale $Au(250 \text{ A}\cdot\text{MeV}) + Au$ Reaktionen stammen aus [Rei94], diejenigen für zentrale und semizentrale $Au(150 \text{ A}\cdot\text{MeV}) + Au$ Reaktionen aus [Kuh93]. Die experimentelle Ladungsverteilung für semizentrale Reaktionen mußte hierbei aus den Verteilungen bzgl. PM_3 , PM_4 und PM_5 extrahiert werden. Dies geschah unter Verwendung von: $\sigma(PM_3) = 960 \text{ mb}$, $\sigma(PM_4) = 887 \text{ mb}$ und $\sigma(PM_5) = 261 \text{ mb}$.

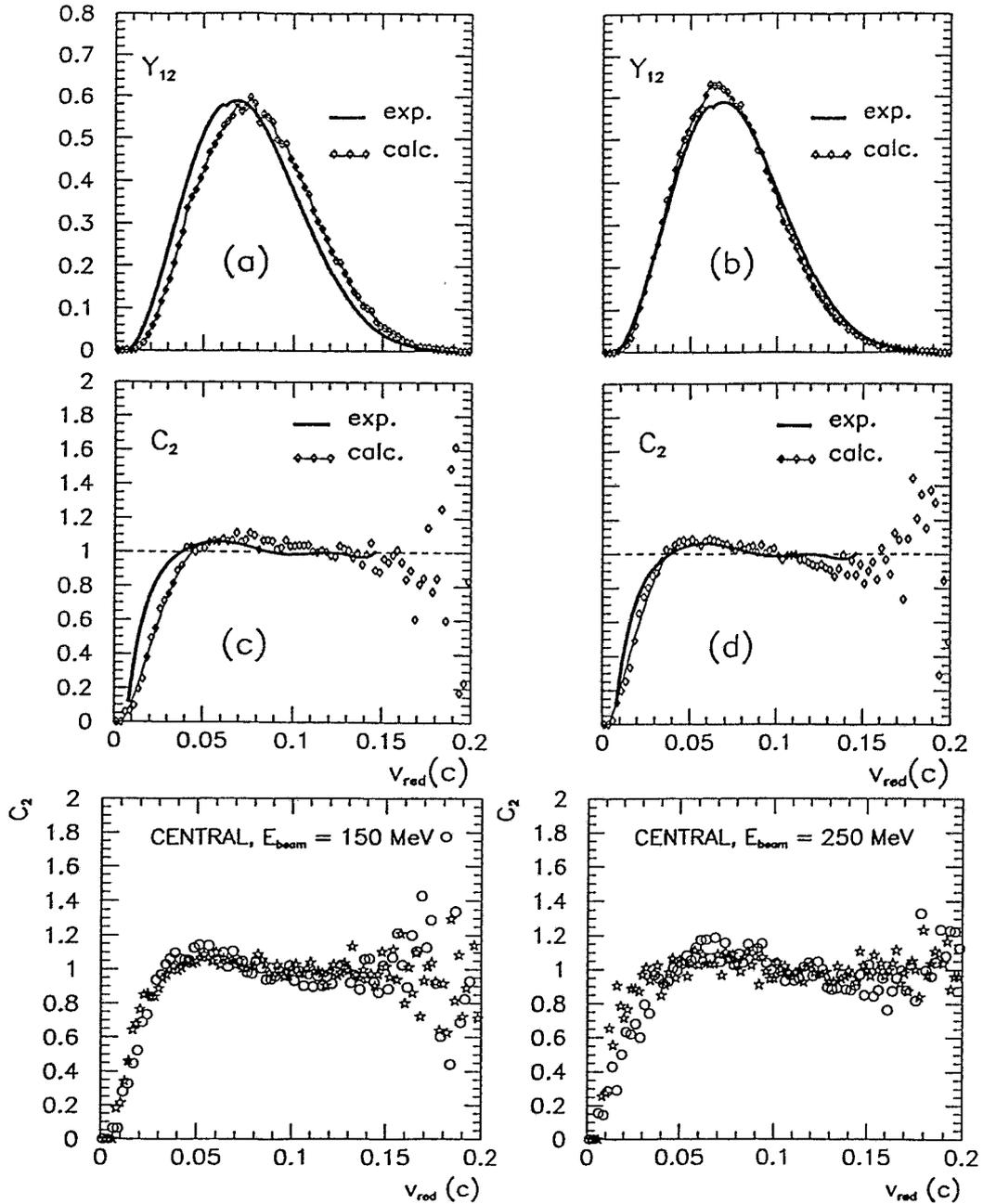


Abbildung 5.20: Y_{12} - und C_2 -Funktionen für zentrale Au + Au Stöße bzgl. einer Strahlenergie von 150 A·MeV (obere und mittlere Zeile) und 250 A·MeV (untere Zeile). Es wurden alle Fragmentkombinationen zwischen Fragmenten, deren Ladungszahl größer als 2 ist, berücksichtigt. Die experimentellen Daten stammen aus Referenz [Kot95]. In der unteren Zeile beziehen sich die Sterne auf das Experiment und die Kreise auf Rechnungen, bei denen die transversale Flußenergie um 50 % reduziert wurde. Bei den mit dem Modell berechneten Kurven in den Bildern (b) und (d) wurde die transversale Flußenergie ebenfalls um 50 % reduziert, wohingegen die Kurven in den Bildern (a) und (c) ohne Reduktion berechnet wurden.

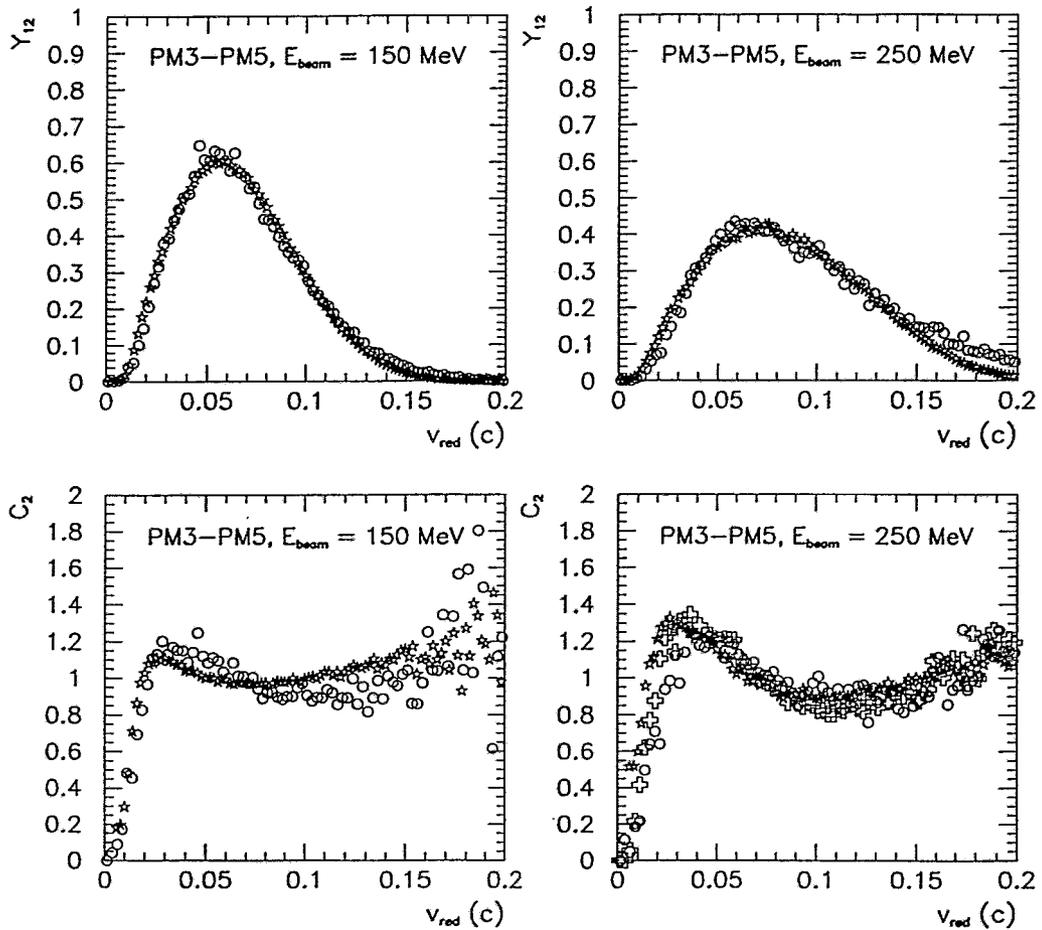


Abbildung 5.21: Y_{12} - und C_2 -Funktionen für semizentrale $\text{Au} + \text{Au}$ Kollisionen bzgl. einer Strahlenergie von $150 \text{ A}\cdot\text{MeV}$ und $250 \text{ A}\cdot\text{MeV}$. Es wurden alle Fragmentkombinationen zwischen Fragmenten berücksichtigt, deren Ladungszahl größer als 2 ist. Die experimentellen Daten (Sterne) wurden aus Referenz [Kot95] entnommen. Die Kreise beziehen sich auf Rechnungen, bei denen der transversale Fluß ($E_{\text{div.flow,1}}$ und $E_{\text{div.flow,2}}$) um den Faktor 2 reduziert wurde. Die Kreuze gehören zu Rechnungen, bei denen der transversale Fluß um den Faktor 4 verringert wurde.

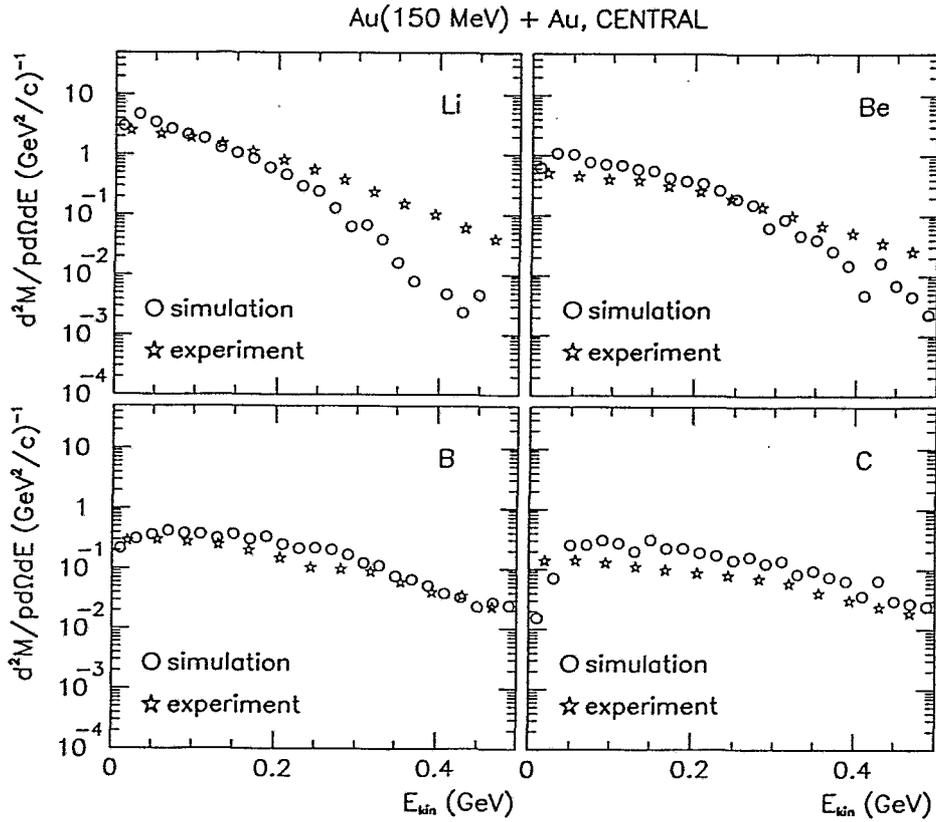


Abbildung 5.22: Doppeldifferentieller Wirkungsquerschnitt für Li, Be, B und C als Funktion der kinetischen Energie bzgl. zentraler Au(150 A·MeV) + Au Reaktionen. Die kinetische Energie wurde auf das Schwerpunktsystem bezogen. Der Akzeptanz-Winkel des Detektors lag zwischen 25° und 45° (bezogen auf das Schwerpunktsystem). Die experimentellen Werte (Sterne) stammen aus Referenz [Rei94]. Bei den theoretischen Werten (Kreise) wurden $E_{\text{div.flow,1}}$ und $E_{\text{div.flow,2}}$ um den Faktor 2 vermindert.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

In der mittlereenergetischen Schwerionenphysik tritt im besonderen Maße das Phänomen der Multifragmentation auf. Obwohl die Multifragmentation bereits seit Beginn der achtziger Jahre eingehend untersucht wird, ist sie bis heute noch nicht vollständig verstanden. Allerdings gelang vor kurzem der ALADIN-Gruppe von der GSI Darmstadt ein, für unser Verständnis über die multifragmentierende Kernmaterie bedeutendes Experiment [Poc95], wonach es nun als gesichert angesehen werden kann, daß in der angeregten Kernmaterie ein flüssig-gasförmig Phasenübergang stattfindet.

Für die Beschreibung mittlereenergetischer Schwerionenstöße wurde in dieser Arbeit ein Hybrid-Modell entwickelt. Es besteht aus dem Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck (BUU) Modell [Bau86, Bau87, Ber84], ein Modell für die Einteilchenphasenraumdicke, und dem Kopenhagener Statistischen Multifragmentationsmodell (SM-Modell) [Bon85a, Bon85b, Bar86c].

Das BUU-Modell ist sehr erfolgreich in der Beschreibung der zeitlichen Entwicklung des Kern-Kern-Stoßes vom Anfangszustand an, an dem die beiden Kerne getrennt vorliegen und aufeinander zufliegen, bis hin zu einer Zeit, nach der sich aus den zwei Kernen ein System entwickelt hat, welches kurz vor der Multifragmentation steht. Der Nachteil des Modells besteht darin, daß es die Fragmentation nicht beschreiben kann. Demgegenüber ist das SM-Modell sehr erfolgreich hinsichtlich der Beschreibung des fragmentierenden Systems (und der zeitlichen Entwicklung des Fragment-Systems). So konnte im Rahmen dieses Modells der oben erwähnte flüssig-gasförmig Phasenübergang vorausgesagt werden [Bon85b]. Der Nachteil des SM-Modells besteht darin, daß es die Vorgeschichte der angeregten Kernmaterie nicht kennt.

Mit der Vereinigung der beiden Modelle wurde nun gewissermaßen der Nachteil des einen Modells durch den Vorteil des anderen Modells ersetzt.

Grundvoraussetzung für die Vereinigung der beiden unterschiedlichen Modelle ist natürlich die Kenntnis der beiden Modelle. Darum wurden in den Kapiteln

2 und 3 das BUU-Modell und das SM-Modell erläutert. In Kapitel 4 wurden einige Observablen bereit gestellt und ausführlich diskutiert, welche hinsichtlich des Hybrid-Modells und auch für das Verständnis mittelergetischer Schwerionenreaktionen wichtig sind.

Wesentlich für den Zusammenbau der beiden Modelle ist ein Ansatz für die Phasenraumverteilung der Fragmente. Um zu solch einen Ansatz zu gelangen, mußte eine Vorstellung über die Bildung eines intermediären Zustandes gewonnen werden. Dies gelang zum einen mit der Entwicklung eines Perkulations-Expansions Modells (Abschnitt 5.1.1) und zum anderen mit der Entwicklung eines Hybrid-Modells (Abschnitt 5.1.2), welches einen speziellen Ansatz für die Anfangsgeschwindigkeiten der Fragmente enthielt.

In Abschnitt 5.2 wurde sodann das eigentliche Hybrid-Modell formuliert. Im Rahmen des Hybrid-Modells kommt es vor der Multifragmentation zu einer Verringerung der Anregungsenergie infolge einer Nicht-Gleichgewichtsemission leichter Teilchen und der Ausbildung eines Nukleonenflusses. Ferner erfährt die Kernmaterie bei zentralen Stößen einen Ein-Quellenaufbruch und bei semizentralen Stößen einen Zwei-Quellenaufbruch. Beide Aufbruch-Szenarien konnten mit einem einzigen Ansatz für die Phasenraumverteilung beschrieben werden. Das Hybrid-Modell enthält zwei, allerdings von einander nicht ganz unabhängige Größen (Parameter), die nur näherungsweise festgelegt werden können: die Grenzdichte und den Aufbruch-Zeitpunkt. Hiervon ist der Aufbruch-Zeitpunkt eine etwas problematische Größe. Er wirkt sich insbesondere auf die Dichte, die Anregungsenergie, die Temperatur sowie auf die Flußenergien und schließlich auf die Thermalisierung des fragmentierenden Systems aus. In dieser Arbeit wurde nun dargelegt, wie man die Break-up Zeit abschätzen kann. Des weiteren wurde anhand $\text{Au}(150 \text{ A}\cdot\text{MeV}) + \text{Au}$ Reaktionen exemplarisch gezeigt, daß das aufbrechende System als thermalisiert angesehen werden kann. Dabei stellte sich ferner heraus, daß die Thermalisierung nicht nur zum festgelegten Zeitpunkt des Aufbruches, sondern auch für etwas frühere Zeiten und (natürlich) spätere Zeiten ausreichend erfüllt ist. Insofern sollte sich die Unsicherheit in der Wahl des Aufbruch-Zeitpunktes nicht sehr auf die Ergebnisse des Modells auswirken.

Mit dem Modell wurden die Massenzahl, die Anregungsenergie, das Aufbruchvolumen und die Temperatur des fragmentierenden Systems berechnet. Ein auffälliges Verhalten zeigte hierbei die Temperatur. Sie steigt mit zunehmenden Stoßparameter an. Dies hängt damit zusammen, daß bei kleineren Stoßparametern ein größerer Anteil der kinetischen Energie als divergente Flußenergie vorliegt.

Besonderes Augenmerk wurde auf die Extraktion der Flußenergien gelegt. Zu diesem Zweck wurden spezielle Formeln entwickelt und mit den herkömmlichen in Beziehung gesetzt.

Hinsichtlich verschiedener Parameterisierungen der Zustandsgleichung (weich, mittel, hart) konnten keine signifikanten Änderungen bzgl. der Masse, der An-

regungsenergie, des Aufbruchvolumens und der Temperatur festgestellt werden. Dasselbe gilt auch für die Größe $ERAT$ (vergl. Gl. (4.20)). Die Flußenergien der Nukleonen nehmen bzgl. einer Strahlenergie von 150 A·MeV um ca. 1 MeV und bzgl. einer Strahlenergie von 250 A·MeV um ungefähr 2 MeV zu, wenn man von der harten auf die weiche Zustandsgleichung übergeht.

Eine Vergrößerung (Verringerung) des Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnittes erhöht (erniedrigt) die divergenten Flußenergien $E_{div.flow,1}$ und $E_{div.flow,3}$, d. h. den Fluß in der Reaktionsebene. Hingegen erniedrigt sich, bzgl. kleiner Stoßparameter, die zum Ausquetschfluß korrespondierende Flußenergie $E_{div.flow,2}$, wenn der Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnitt vergrößert wird, da dies einem Entweichen der Nukleonen senkrecht zur Reaktionsebene entgegenwirkt. Die zur translatorischen Bewegung einer Quelle gehörende Flußenergie $E_{flow,g}$ erniedrigt sich ebenfalls bei einer Vergrößerung des Nukleon-Nukleon-Wirkungsquerschnittes, da hierdurch die Kernmaterie stärker abgestoppt wird.

Die Analyse der Rotationsbewegung ergab, daß der Drehimpuls aufgrund der, in bezug auf die Anregungsenergie, kleinen Rotationsenergie hinsichtlich der Multi-fragmentation keine wesentliche Rolle spielt.

Des weiteren wurden die Entropien, die Flußwinkel, die Streuwinkelverteilung für sehr zentrale Stöße, die über den Stoßparameter gemittelten Zylinderhöhen und -radien sowie die Ladungsverteilungen und die Verteilungen der kinetischen Energie berechnet. Der Vergleich der Ladungsverteilungen und der Verteilungen der kinetischen Energie mit dem Experiment ergab eine hinreichend gute Übereinstimmung.

Mit dem Hybrid-Modell konnte zum ersten Mal umfassend der Einfluß der kollektiven Freiheitsgrade auf die Zweiteilchen-Korrelationsfunktion untersucht werden. Die Analyse ergab, daß der kollektive Fluß die Coulomb-Unterdrückung der Zweiteilchen-Korrelationsfunktion vergrößert. Dies muß berücksichtigt werden, wenn man die Aufbruchdichte anhand der Coulomb-Unterdrückung abschätzt. Der bei semizentralen Stößen auftretende Peak der Zweiteilchen-Korrelationsfunktion wird durch den Seitwärtsfluß der Fragmente bewirkt. Es ergaben sich ferner Anzeichen dafür, daß bei zentralen Stößen die Fragmente mehr in der näheren Umgebung des Schwerpunktes und bei semizentralen Stößen mehr in der näheren Umgebung der Hauptflußachse gebildet werden.

Gemäß Referenz [Hil95] kann man einen schweren Kern auch zum Zerfall bringen, indem man ihn mit Antiprotonen aufheizt¹. Bei derartigen Prozessen kommt es nicht zu einer Verformung des Kerns. Es treten fast keine mittelschweren Frag-

¹Genauer: Das Antiproton (Projektil) kreist auf einer immer kleiner werdenden Umlaufbahn um den Kern, bis es mit einem Neutron oder Proton annihiliert. Die daraus resultierenden Pionen (es sind im Mittel fünf) werden von dem Kern absorbiert, wodurch sich dieser aufheizt. Bei höherenergetischen Antiprotonen findet der Prozeß der Annihilation im Inneren des Kerns statt.

mente auf. Somit kann nicht von einer Multifragmentation gesprochen werden. Hingegen wird bei Kern-Kern-Reaktionen die Materie sehr stark verformt. Es kommt zu einem Materiefluß. Ferner multifragmentiert die Kernmaterie. Wie erwähnt, wurde in dieser Arbeit gezeigt, daß der Drehimpuls hinsichtlich der Multifragmentation vernachlässigbar ist.

Aufgrund dieser Sachverhalte kann man vermuten, daß nicht die thermische Energie allein wesentlich für die Multifragmentation ist, diese Annahme liegt den statistischen Modellen zugrunde, sondern daß auch der Fluß die IMF-Produktion im besonderen Maße (und nicht nur durch das Absenken der Anregungsenergie) beeinflußt.

Zukünftige Arbeiten mit dem Hybrid-Modell könnten hier ansetzen und diese Fragestellung auch anhand asymmetrischer Systeme (mit ihnen kann man den Fluß bequem „proportionieren“) untersuchen.

Weiterhin bestünde eine lohnende Aufgabe darin, den Anwendungsbereich des Hybrid-Modells hinsichtlich der Strahlenergie zu vergrößern.

Anhang

Anhang A

BEZIEHUNG ZWISCHEN DEN VERSCHIEDENEN FLÜSSEN

Satz: Gegeben sei ein System aus N Nukleonen. Ferner sei $\Theta_{kl} = \sum_{i=1}^N p_i^k p_i^l / (2m_N N)$, $E_{\text{flow}}^k = (\sum_{i=1}^N p_i^k r_i^k)^2 / (2m_N N \sum_{i=1}^N (r_i^k)^2)$ und $E_{\text{flow}}^{\text{sph}} = (\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i)^2 / (2m_N N \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^2)$, wobei \vec{p}_i den Impulsvektor und \vec{r}_i den Ortsvektor des i -ten Nukleons bezeichne. Dann gilt:

$$E_{\text{flow}}^{\text{sph}} \leq \sum_{k=1}^3 E_{\text{flow}}^k \leq \sum_{k=1}^3 \Theta_{kk}. \quad (\text{A.1})$$

Beweis:

(a) z.z.: $E_{\text{flow}}^{\text{sph}} \leq \sum_{k=1}^3 E_{\text{flow}}^k$.

Gemäß der Schwarzschen Ungleichung gilt,

$$\left[\sum_{k=1}^3 b_k c_k \right]^2 \leq \left[\sum_{k=1}^3 b_k^2 \right] \left[\sum_{k=1}^3 c_k^2 \right] \quad (b_k, c_k \in \mathbb{R}). \quad (\text{A.2})$$

Definiere:

$$c_k := \frac{1}{b_k} \sum_{i=1}^N p_i^k r_i^k, \quad b_k := + \sqrt{\sum_{i=1}^N (r_i^k)^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\Rightarrow \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^N p_i^k r_i^k \right]^2 \leq \left[\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^N (r_i^k)^2 \right] \left[\sum_{k=1}^3 \frac{(\sum_{i=1}^N p_i^k r_i^k)^2}{\sum_{i=1}^N (r_i^k)^2} \right] \quad (\text{A.4})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left[\sum_{k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^N p_i^k r_i^k \right) \right]^2}{2m_N N \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^N (r_i^k)^2} \leq \sum_{k=1}^3 \frac{\left(\sum_{i=1}^N p_i^k r_i^k \right)^2}{2m_N N \sum_{i=1}^N (r_i^k)^2} \quad (\text{A.5})$$

$$\Leftrightarrow E_{\text{flow}}^{\text{sph}} \leq \sum_{k=1}^3 E_{\text{flow}}^k, \quad \text{w.z.z.w.} \quad (\text{A.6})$$

(b) z.z.: $\sum_{k=1}^3 E_{\text{flow}}^k \leq \sum_{k=1}^3 \Theta_{kk}$.

$$\begin{aligned} E_{\text{flow}}^k &= \frac{1}{2m_N N} \frac{\left(\sum_{i=1}^N p_i^k r_i^k\right)^2}{\sum_{i=1}^N (r_i^k)^2} \\ &\leq \frac{1}{2m_N N} \frac{\left[\sum_{i=1}^N (p_i^k)^2\right] \left[\sum_{i=1}^N (r_i^k)^2\right]}{\sum_{i=1}^N (r_i^k)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

(Schwarzsche Ungleichung). Somit gilt $E_{\text{flow}}^k \leq \Theta_{kk}$. Hieraus folgt (b), w.z.z.w.

Anhang B

BERECHNUNG DER PARAMETER DER NUKLEONEN-PHASENRAUMVERTEILUNG

Zur Bestimmung der Parameter des Ansatzes für die Nukleonen-Phasenraumverteilung (Gl. (5.16)) werden im Θ -System die folgenden Mittelwerte berechnet: $\langle r_1^2 \rangle, \langle r_2^2 \rangle, \langle r_3^2 \rangle, \langle r_3 \rangle, \langle p_1^2 \rangle, \langle p_2^2 \rangle, \langle p_3^2 \rangle, \langle p_3 \rangle, \langle p_1 r_1 \rangle, \langle p_2 r_2 \rangle, \langle p_3 r_3 \rangle$. Anschließend werden die Gleichungen für die Mittelwerte nach den Parametern aufgelöst. Man erhält:

$$h = \frac{2}{U_{33}} \langle r_3 \rangle, \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{R}^> = \frac{h}{2} \vec{e}_3 \quad (\text{B.2})$$

$$r_{\perp} = 2 \sqrt{(\langle r_1^2 \rangle - U_{31}^2 \frac{h^2}{3}) / (1 - U_{31}^2)}, \quad (\text{B.3})$$

$$\vec{g}^> = \langle p_3 \rangle \vec{e}_3, \quad (\text{B.4})$$

$$B_i = (\langle p_i r_i \rangle - \frac{h}{2} U_{33} g_3 \delta_{3i}) / (\langle r_i^2 \rangle - (\frac{h}{2} U_{3i})^2), \quad (\text{B.5})$$

$$\Lambda_i = (\langle p_i^2 \rangle - B_i \langle p_i r_i \rangle - (g_3 - U_{33} B_3 \frac{h}{2}) g_3 \delta_{3i})^{-1}. \quad (\text{B.6})$$

Die Matrixelemente U_{ij} bestimmen die Transformation zwischen dem Θ - und dem L -System. Für den zu Gl. (5.16) entsprechenden Ansatz $w^<$ bzgl. der „unteren“ Hemisphäre“ gilt: $\vec{R}^< = -\vec{R}^>$ und $\vec{g}^< = -\vec{g}^>$.

Anhang C

RELATIVISTISCHE TRANSFORMATION DER GESCHWINDIGKEITEN

Ganz allgemein erhält man für die Transformation einer Geschwindigkeit \vec{v}' von einem Inertialsystem K' in ein Inertialsystem K ($c = 1$ gesetzt):

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}' + \gamma \vec{w} \cdot (\gamma \vec{w} \cdot \vec{v}' / (\gamma + 1) + 1)}{\gamma (1 + \vec{w} \cdot \vec{v}')} \quad (\text{C.1})$$

mit $\gamma := (1 - \vec{w}^2)^{-1/2}$. Die Geschwindigkeit \vec{w} ist die Geschwindigkeit, mit der sich K' gegenüber K bewegt. Wenn sich K' parallel zur z -Achse bewegt ergibt sich,

$$v_i = \frac{v_i'}{\gamma (1 + w_3 v_3')} \quad (i = 1, 2), \quad (\text{C.2})$$

$$v_3 = \frac{v_3' + w_3}{\gamma (1 + w_3 v_3')}. \quad (\text{C.3})$$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde von einem ruhenden Targetkern der Masse m_t und einem, sich mit einer kinetischen Energie $E_{\text{kin,p}}$ bewegenden Projektilkern der Masse m_p ausgegangen. Gefragt war, die Geschwindigkeit, mit der sich das Schwerpunktsystem gegenüber dem Laborsystem parallel zur z -Achse bewegt, durch m_p , m_t und $E_{\text{kin,p}}$ auszudrücken. Die Rechnung ergab:

$$w_3 = \frac{\sqrt{1 - m_p^2 / (m_p + E_{\text{kin,p}})^2}}{1 + m_t / (m_p + E_{\text{kin,p}})}. \quad (\text{C.4})$$

Anhang D

RELATIVISTISCHE BERECHNUNG DER RELATIVGESCHWINDIGKEIT ZWISCHEN ZWEI TEILCHEN

Für die Berechnung der Zweiteilchen-Korrelationsfunktion (Gl. (4.38)) mußte die Geschwindigkeit berechnet werden, mit der sich ein Teilchen gegenüber einem anderen Teilchen bewegt. Dies geschah auf der Grundlage des folgenden Satzes:

Die Relativgeschwindigkeit v_{12} zwischen einem Teilchen, welches sich in einem Lorentz-System mit der Geschwindigkeit \vec{v}_1 bewegt und einem anderen Teilchen, das sich in demselben Lorentz-System mit der Geschwindigkeit \vec{v}_2 fortbewegt, ist in jedem Lorentz-System gegeben durch ($c = 1$ gesetzt):

$$v_{12} = \sqrt{1 - \left(\sqrt{(\gamma_1^2 v_1^2 + 1)(\gamma_2^2 v_2^2 + 1)} - \gamma_1 \gamma_2 \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \right)^{-2}}, \quad (\text{D.1})$$

mit $\gamma_i = (1 - v_i^2)^{-1/2}$ ($i = 1, 2$).

Beweis: Sei $p_1 = (E_1, \vec{p}_1)$ der Viererimpuls von Teilchen 1 und $p_2 = (E_2, \vec{p}_2)$ derjenige von Teilchen 2. Im Ruhssystem von Teilchen 1 lautet dann die Invariante $(p_1 p_2)$:

$$p_1 p_2 = E_1 E_2 - \vec{0} \cdot \vec{p}_2 = m_1 E_2 \quad (\text{D.2})$$

$$\Leftrightarrow E_2 = \frac{p_1 p_2}{m_1}. \quad (\text{D.3})$$

Daraus folgt,

$$\vec{p}_2^2 = \frac{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}{m_1^2}. \quad (\text{D.4})$$

Weiterhin ist $\vec{p}_2 = m_2 \gamma_2 \vec{v}_2 = E_2 \vec{v}_2 = (p_1 p_2 / m_1) \vec{v}_2$, wobei Gleichung (D.3) ausgenutzt wurde. Nach Einsetzen in Gleichung (D.4) erhält man,

$$\vec{v}_2^2 = \frac{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}{(p_1 p_2)^2}. \quad (\text{D.5})$$

$|\vec{v}_2|$ ist die Geschwindigkeit von Teilchen 2, bezogen auf das Ruhssystem von Teilchen 1, also gleich der Relativgeschwindigkeit v_{12} zwischen den Teilchen. Die rechte Seite von Gleichung (D.5) ist aber eine Invariante.

Darum gilt in jedem Inertialsystem:

$$v_{12} = \sqrt{\frac{(p_1 p_2)^2 - (m_1 m_2)^2}{(p_1 p_2)^2}}. \quad (\text{D.6})$$

Mit $p_1 p_2 = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2$ und $\vec{p}_i = m_i \gamma_i \vec{v}_i$ ($\gamma_i = (1 - v_i^2)^{-1/2}$, $i = 1, 2$) kann man nun die Gleichung (D.6) äquivalent umformen zu (D.1), q.e.d.

Anhang E

NUMERISCHE BERECHNUNG DER C_2 -FUNKTION

Aufgrund der folgenden Überlegungen gelang es, die numerische Berechnung der C_2 -Funktion (Gl. 4.38) rationell zu gestalten.

Der Abschnitt, der bei der Berechnung der C_2 -Funktion die meiste Rechenzeit in Anspruch nimmt, ist derjenige, in dem die $Y_{12,\text{mix}}$ -Funktion berechnet wird, da hierfür alle reduzierten Relativgeschwindigkeiten zwischen den Teilchen der verschiedenen Events zu berechnen sind. Falls pro Event — die Anzahl der Events pro Programmdurchlauf sei mit „eventnum“ bezeichnet — „multipl“ Teilchen produziert werden, dann müssen in einem Programmdurchlauf $\frac{1}{2} \cdot (\text{multipl})^2 \cdot [(\text{eventnum})^2 - \text{eventnum}]$ reduzierte Relativgeschwindigkeiten berechnet werden. Bei einer Gold auf Gold Reaktion werden im Mittel ca. 60 Teilchen pro Event erzeugt. Wenn man für einen Programmdurchlauf 20000 Events ansetzt², dann müßten demnach $7 \cdot 10^{11}$ Relativgeschwindigkeiten berechnet werden. Um nun Rechenzeit zu sparen, werden die Events in eine Anzahl von „blocknum“ Blöcken gruppiert, wobei jeder Block „eventblo“ Events enthält, und nur noch die reduzierten Relativgeschwindigkeiten zwischen den Teilchen der zu einem Block gehörigen verschiedenen Events berechnet. Nunmehr müssen nur noch $\frac{1}{2} \cdot (\text{multipl})^2 \cdot [(\text{eventblo})^2 - \text{eventblo}] \cdot \text{blocknum}$ reduzierte Relativgeschwindigkeiten berechnet werden. Im obigen Beispiel reduziert sich damit die Anzahl der zu berechnenden reduzierten Relativgeschwindigkeiten von $7 \cdot 10^{11}$ auf $2 \cdot 10^9$, falls *eventblo* mit 50 veranschlagt wird. Der Fehler, der durch diesen programmtechnischen Kunstgriff bewirkt wurde, hat sich bei allen numerischen Studien nicht merklich ausgewirkt, wie man leicht durch Verdoppeln von *eventblo* feststellen konnte.

In Abbildung 6 ist ein FORTRAN-Programmausschnitt abgebildet, mit dem die $Y_{12,\text{mix}}$ -Berechnung ausgeführt wurde. Zunächst werden die Multiplizität „nfr“ (= multipl)“, die Massen „mass“, die Ladungen „charge“ sowie die Geschwindigkeiten „velocity“ für alle Events des entsprechenden Event-Blockes herausgelesen. Danach werden alle möglichen Teilchenkombinationen zwischen den Teilchen von verschiedenen Events vermöge den Schleifen mit den Anweisungsnummern 8, 10, 9, 11 gebildet. Die Schleifenvariablen „m“ und „n“ durchlaufen die Events pro Block, die Schleifenvariablen „i“ und „j“ bezeichnen die Teilchen. Die If-Anweisungen, die die Ladungen (charge) der Fragmente abfragen, dienen dazu, um die in Gleichung (4.38) auftretende Summe über bestimmte Fragmentkombinationen zu berücksichtigen. Falls die Ladungen der Fragmente im vorgegebenen Bereich liegen, wird im Unterprogramm „selection“ überprüft, ob die Fragmente in den Detektor fliegen und die Detektorschwellen passieren. Ferner wird in die-

²Im Experiment am Schwerionen-Synchrotron (SIS) der GSI Darmstadt ereignen sich ca. 1000 Reaktionen pro Teilchenpaket. Ein Arbeitstakt dauert in etwa 1 Sekunde. Eine Strahlzeit mehrere Stunden. Von daher sind 20000 Events sicher nicht zu hoch gegriffen.

```

do 1 i1 = 1, blocknum
  do i2 = 1, eventblo
    read(17) nfr, (mass(j,i2),j=1,nfr),
    > (charge(j,i2),j=1,nfr),
    > ((velocity(i,j,i2),i=1,3),j=1,nfr),
    > multipl(i2) = nfr
  end do
  do 8 m = 1, eventblo - 1
    do 10 i = 1, multipl(m)
      if (((charge(i,m).GE.a1).AND.(charge(i,m).LE.b1)).OR.
    > ((charge(i,m).GE.c1).AND.(charge(i,m).LE.d1))) then
        do 9 n = m + 1, eventblo
          do 11 j = 1, multipl(n)
            if (.NOT.(((charge(i,m).GE.a1).AND.(charge(i,m).LE.b1)
    > .AND.(charge(j,n).GE.c1).AND.(charge(j,n).LE.d1)
    > )
    > .OR.((charge(j,n).GE.a1).AND.(charge(j,n).LE.b1)
    > .AND.(charge(i,m).GE.c1).AND.(charge(i,m).LE.d1)
    > ))) then
              yesno = .false.
            else
              call selection(m,n,i,j,mass(i,m),mass(j,n))
            end if
            if (yesno) then
    > velored = velorel(m,n,i,j)/
              sqrt(real(charge(i,m) + charge(j,n)))
              argu = int(velored/width + 1.)
              if (argu .GE. err) then
                call error ! print error message
              end if
              y12mix(argu) = y12mix(argu) + 1
            end if
          continue
        11
        9 continue
      end if
    10 continue
  8 continue
1 continue

```

Abbildung E.1: Programmausschnitt für die Berechnung der $Y_{12,mix}$ -Funktion.

sem Unterprogramm der Relativwinkel berechnet, den die Geschwindigkeitsvektoren der beiden Fragmente einschließen. Wenn nun die Teilchen vom Detektor registriert werden und sich ihr Relativwinkel in dem vorgegebenen Bereich befindet, dann wird mit der Funktion „velorel“ die Relativgeschwindigkeit zwischen den zwei Fragmenten berechnet und sodann ihre reduzierte Relativgeschwindigkeit „velored“. Anschließend wird die Nummer „argu“ desjenigen Bins bestimmt, in dessen Bereich die reduzierte Relativgeschwindigkeit liegt (alle Bins haben die gleiche Breite „width“). Und schließlich wird die Anzahl „y12mix(argu)“ — das ist der Funktionswert $Y_{12,mix}$ — der sich in diesem Bin befindlichen reduzierten Relativgeschwindigkeiten um 1 erhöht.

Die Berechnung der Y_{12} -Funktion erfolgt analog zur Berechnung der $Y_{12,mix}$ -Funktion (sie ist explizit etwas einfacher, da hierfür nur die reduzierten Relativgeschwindigkeiten zwischen den Teilchen desselben Events zu berechnen sind).

Der Wert der C_2 -Funktion ergibt sich dann einfach aus der Division des Y_{12} -Wertes durch den $Y_{12,\text{mix}}$ -Wertes, wobei natürlich die beiden Verteilungen zuvor normiert werden müssen. Als Normierung wurde festgelegt, daß die Flächen unter den Graphen der beiden Verteilungen gleich sein müssen.

Literaturverzeichnis

- [AbS65] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, (Dover Publications, New York, 1965).
- [Aic84] J. Aichelin, J. Hüfner and R. Ibarra, Phys. Rev. **C30** (1984) 107.
- [Aic86] J. Aichelin and H. Stöcker, Phys. Lett. **B176** (1986) 14.
- [Aic88] J. Aichelin, G. Peilert, A. Bohnet, A. Rosenhauer, H. Stöcker and W. Greiner, Phys. Rev. **C37** (1988) 2451.
- [Ain87] T. L. Ainsworth, E. Baron, G. E. Brown, J. Cooperstein and M. Prakash, Nucl. Phys. **A464** (1987) 740.
- [Alb85] S. Albergo, S. Costa, E. Costanzo and A. Rubbino, Nuovo Cimento **A89** (1985) 1.
- [Bar86] H. W. Barz, J. P. Bondorf, R. Donangelo and H. Schulz, Phys. Lett. **B169** (1986) 318.
- [Bar86c] H. W. Barz, J. P. Bondorf, R. Donangelo, I. N. Mishustin and H. Schulz, Nucl. Phys. **A448** (1986) 753.
- [Bar93] H. W. Barz, J. P. Bondorf, R. Donangelo, B. Heide, H. Schulz and K. Sneppen, Proc. Int. Workshop XXI on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, Edt. H. Feldmeier, Hirschegg, Austria, Jan. 18-23, 1993, p. 263.
- [Bar93p] H. W. Barz, private Mitteilung (1993).
- [Bar94a] H. W. Barz and B. Heide, Proceedings of the FOBOS Workshop '94, Edt. W. Wagner, Cracow, Poland, June 28-30, 1994, p. 165.
- [Bar94b] H. W. Barz and B. Heide, Proc. Int. Workshop XXII on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, Edt. H. Feldmeier, W. Nörenberg, Hirschegg, Austria, Jan. 17-22, 1994, p. 119.
- [Bau75] H. G. Baumgart, J. U. Schott, Y. Sahamoto, E. Schopper, H. Stöcker, J. Hofmann, W. Scheid and W. Greiner, Z. Phys. **A273** (1975) 359.

- [Bau85] W. Bauer, D. R. Dean, U. Mosel and U. Post, *Phys. Lett.* **B105** (1985) 53.
- [Bau86] W. Bauer, G. F. Bertsch, W. Cassing and U. Mosel, *Phys. Rev.* **C34** (1986) 2127.
- [Bau87] W. Bauer, Dissertation, Universität Gießen, 1987.
- [Bau93] W. Bauer, private Mitteilung (1993).
- [Ber78] G. F. Bertsch, *Nuclear Physics with Heavy Ions and Mesons*, Edt. R. Balian, (North-Holland, Amsterdam, 1978).
- [Ber83] G. F. Bertsch and P. J. Siemens, *Phys. Lett.* **B126** (1983) 9.
- [Ber84] G. F. Bertsch, H. Kruse and S. DasGupta, *Phys. Rev.* **C29** (1984) 673.
- [Ber88] G. F. Bertsch and S. DasGupta, *Phys. Reports* **160** (1988) 189.
- [BHS85] B.-H. Sa and D. H. E. Gross, *Nucl. Phys.* **A437** (1985) 643.
- [Bia86] A. Bialas and R. Peschanski, *Nucl. Phys.* **B273** (1986) 703.
- [Bia88] A. Bialas and R. Peschanski, *Nucl. Phys.* **B308** (1988) 857.
- [Bla59] J. M. Blatt und V. F. Weisskopf, *Theoretische Kernphysik*, (Teubner, Leipzig, 1959).
- [Bla83] M. Blann and V. K. Vonach, *Phys. Rev.* **C28** (1983) 1475.
- [Bla89] M. Blann, T. Komoto and I. Tservaya, *Phys. Rev.* **C40** (1989) 2498.
- [Bla91] M. Blann, M. G. Mustafa, G. Peilert, H. Stöcker and W. Greiner, *Phys. Rev.* **C44** (1991) 431.
- [Boa88] D. H. Boal and J. N. Glosli, *Phys. Rev.* **C38** (1988) 1870.
- [Boh75] A. Bohr und B. R. Mottelson, *Struktur der Atomkerne*, Bd. I, (Akademie-Verlag, Berlin, 1975).
- [Bon82] J. P. Bondorf, *Nucl. Phys.* **A387** (1982) 256.
- [Bon85a] J. P. Bondorf, R. Donangelo, I. N. Mishustin, C. J. Pethik, H. Schulz and K. Sneppen, *Nucl. Phys.* **A443** (1985) 321.
- [Bon85b] J. P. Bondorf, R. Donangelo, I. N. Mishustin and H. Schulz, *Nucl. Phys.* **A444** (1985) 460.
- [Bon90] J. P. Bondorf, C. H. Dasso, R. Donangelo and G. Pollarolo, *Phys. Lett.* **B240** (1990) 28.

- [Bow91] D. R. Bowman et al., Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1527.
- [Bow92] D. R. Bowman et al., Phys. Rev. **C46** (1992) 1834.
- [Buc81a] G. Buchwald, L. P. Csernai, J. A. Maruhn, W. Greiner and H. Stöcker, Phys. Rev. **C24** (1981) 135.
- [Buc81b] G. Buchwald, L. P. Csernai, J. A. Maruhn, W. Greiner and H. Stöcker, Z. Phys. **A303** (1981) 111.
- [Buc83a] G. Buchwald, G. Graebner, J. Theis, J. A. Maruhn, W. Greiner and H. Stöcker, Phys. Rev. **C28** (1983) 1119.
- [Buc83b] G. Buchwald, G. Graebner, J. Theis, J. A. Maruhn, W. Greiner and H. Stöcker, Phys. Rev. **C28** (1983) 2349.
- [Cam94] X. Campi, H. Krivine and E. Plagnol, Phys. Rev. **C50** (1994) R2680.
- [Cas86] W. Cassing, Habilitationsschrift, T H Darmstadt, GSI Report, GSI-86-6 (1986).
- [Cas90] W. Cassing, V. Metag, U. Mosel and K. Nita, Phys. Reports **188** (1990) 363.
- [Cse83] L. P. Csernai et al., Phys. Rev. **C28** (1983) 2001.
- [Cug80] J. Cugnon, Phys. Rev. **C22** (1980) 1885.
- [Cug81] J. Cugnon, T. Mizutani and J. Vandermeulen, Nucl. Phys. **A352** (1981) 505.
- [Cug83] J. Cugnon and D. L'Hote, Nucl. Phys. **A397** (1983) 519.
- [Dan83] P. Danielewicz and M. Gyulassi, Phys. Lett. **B129** (1983) 283.
- [Dan84] P. Danielewicz, Ann. Phys. **152** (1984) 239.
- [Dan85] P. Danielewicz and G. Odyniec, Phys. Lett. **B157** (1985) 146.
- [DeA92] A. R. DeAngelis, D. H. E. Gross and R. Heck, Nucl. Phys. **A537** (1992) 606.
- [Dos87] K. G. R. Doss, H. Å. Gustafsson, H. Gutbrod, J. W. Harris, B. V. Jacak, K. H. Kampert, B. Kolb, A. M. Poskanzer, H. G. Ritter, H. R. Schmidt, L. Teitelbaum, M. Tincknell, S. Weiss and H. Wieman, Phys. Rev. Lett. **59** (1987) 2720.
- [Eis75] J. M. Eisenberg and W. Greiner, Nuclear Models, vol. 1, (North-Holland, Amsterdam, 1975).

- [Fai82] G. Fai and J. Randrup, Nucl. Phys. **A281** (1982) 557.
- [Fai83] G. Fai and J. Randrup, Nucl. Phys. **A404** (1983) 551.
- [Fel90] H. Feldmeier, Nucl. Phys. **A515** (1990) 147.
- [Fel95] H. Feldmeier, K. Bieler and J. Schnack, Nucl. Phys. **A586** (1995) 493.
- [Fis67] M. E. Fisher, Physics **3** (1967) 255.
- [Fun78] S. Y. Fung, W. Gorn, G. P. Kiernan, J. J. Lu, Y. T. Oh and R. T. Poe, Phys. Rev. Lett. **41** (1978) 1592.
- [Gol59] G. Goldhaber, W. B. Fowler, S. Goldhaber, T. E. Kalogeropoulos and W. M. Powell, Phys. Rev. Lett. **3** (1959) 181.
- [Gro83] D. H. E. Gross, Phys. Scripta **T5** (1983) 213.
- [Gro85] D. H. E. Gross and X. Z. Zhang, Phys. Lett. **B161** (1985) 47.
- [Gro86] D. H. E. Gross, X. Z. Zhang and S. Y. Xu, Phys. Rev. Lett. **56** (1986) 1544.
- [Gro93] D. H. E. Gross, Nucl. Phys. **A553** (1993) 175c.
- [Gus84] H. Å. Gustafsson et al., Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1590.
- [Gut89] H. H. Gutbrod, K. H. Kampert, B. Kolb, A. M. Poskanzer, H. G. Ritter and H. R. Schmidt, Phys. Lett. **B216** (1989) 267.
- [Gut90] H. H. Gutbrod, K. H. Kampert, B. Kolb, A. M. Poskanzer, H. G. Ritter, R. Schicker and H. R. Schmidt, Phys. Rev. **C42** (1990) 640.
- [Hag92] K. Hagel et al., Phys. Rev. Lett. **68** (1992) 2141.
- [Han54] R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss, Phil. Mag. **45** (1954) 663.
- [Han56a] R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss, Nature, **177** (1956) 27.
- [Han56b] R. Hanbury-Brown and R. Q. Twiss, Nature, **178** (1956) 1046.
- [Har92] Ch. Hartnack, Dissertation, Universität Frankfurt a. M., 1992; GSI Report, GSI-93-05 (1993).
- [Har94] C. Hartnack, J. Aichelin, H. Stöcker and W. Greiner, Phys. Lett. **B336** (1994) 131.
- [Hei93] B. Heide, FZR-report, FZR 93-10 (1993).

- [Hei94] B. Heide and H. W. Barz, Phys. Lett. **B337** (1994) 53 and erratum Phys. Lett. **B340** (1994) 267.
- [Hei95] B. Heide and H. W. Barz, Nucl. Phys. **A588** (1995) 918.
- [Her93] N. Herrmann, Nucl. Phys. **A553** (1993) 175c.
- [Hil95] D. Hilscher (HMI Berlin), Untersuchungen der Produktion und des Zerfalls heißer Kerne mit Antiprotonen, Vortrag am FZ-Rossendorf (22.05.1995); D. Hilscher et al. (PS208 collaboration), First Results on the Decay of Hot Nuclei at Low Spin (PS208), HMI Report, ISSN 0936-0891.
- [HSt88a] D. Hahn and H. Stöcker, Phys. Rev. **C37** (1988) 1048.
- [HSt88b] D. Hahn and H. Stöcker, Nucl. Phys. **A476** (1988) 718.
- [Hue85] J. Hüfner, Phys. Reports **125** (1985) 129.
- [Idi94] D. Idier, M. Farine, B. Remaud and F. Sébille, Ann. Phys. Fr. **19** (1994) 159.
- [Jaq92] H. R. Jaqaman, A. R. DeAngelis, A. Ecker and D. H. E. Gross, Nucl. Phys. **A541** (1992) 492.
- [Jeo94] C. J. Jeong et al. (FOPI collaboration), Phys. Rev. Lett. **72** (1994) 3486.
- [Kae92] B. Kämpfer et al., Proc. Int. Workshop XX on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, Edt. H. Feldmeier, Hirscheegg, Austria, Jan. 20-25, 1992, p. 67.
- [Kae93] B. Kämpfer, R. Kotte, J. Mösner, W. Neubert, D. Wohlfarth et al. (FOPI collaboration), Phys. Rev. **C48** (1993) R955.
- [Kam86] K. H. Kampert, Dissertation, Universität Münster, 1986.
- [Kho92] D.T. Khoa, N. Ohtsuka, Amand Faessler, M. A. Matin, S. W. Huang, E. Lehmann and Y. Lofty, Nucl. Phys. **A542** (1992) 671.
- [Kim92] Y. D. Kim, R. T. deSouza, C. K. Gelbke, W. G. Gong and S. Pratt, Phys. Rev. **C45** (1992) 387.
- [Kli81] Y. L. Klimontorovich and D. Kremp, Physica **A109** (1981) 517.
- [Koc91] V. Koch, B. Blättel, W. Cassing and U. Mosel, Nucl. Phys. **A532** (1991) 715.

- [Koo90] S. E. Koonin und D. C. Meredith, Physik auf dem Computer 1, (Oldenbourg Verlag, 1990).
- [Kot92] R. Kotte, private Mitteilung (1992).
- [Kot94] R. Kotte, private Mitteilung (1994).
- [Kot95] R. Kotte, B. Kämpfer, J. Mösner, W. Neubert, D. Wohlfarth et al. (FOPI collaboration), Phys. Rev. C51 (1995) 2686.
- [Kuh93] C. Kuhn et al. (FOPI collaboration), Phys. Rev. C48 (1993) 1232.
- [Lan66] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, Statistische Physik, Bd. V, (Akademie-Verlag, Berlin, 1966).
- [Lat85] J. M. Lattimer, C. J. Pethick, D. G. Ravenhall and D. Q. Lamb, Nucl. Phys. A432 (1985) 646.
- [Lin93] V. Lindenstruth et al. (ALADIN collaboration), GSI-report, GSI-93-54 (1993).
- [Mek78] A. Z. Mekjian, Phys. Rev. C17 (1978) 1051.
- [Mig72] A. B. Migdal, JETP 34 (1972) 1184.
- [Mil91] U. Milkau, Dissertation, Universität Frankfurt a. M., 1991; GSI Report, GSI-91-34 (1991).
- [Moe95] T. Moehlenkamp (ALADIN/LAND collaboration), Proceedings of the XXXIII. International Winter Meeting on Nuclear Physics, Bormio, Italy, Jan. 23-27, 1995, p. 383.
- [Mos74] U. Mosel, P. G. Zint and K. H. Passler, Nucl. Phys. A236 (1974) 252.
- [Nei90] L. W. Neise, Dissertation, Universität Frankfurt a. M., 1990; GSI Report, GSI-90-24 (1990).
- [Nor28] L. W. Nordheim, Proceedings Royal Soc. (London), vol. A119 (1928) 689.
- [Num92] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, Numerical Recipes in FORTRAN, (Cambridge University Press, 1992).
- [Pan84] A. D. Panagiotou, M. W. Curtin, H. Toki, D. K. Scott, P. J. Siemens, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 496.
- [Pei88] G. Peilert, A. Rosenhauer, J. Aichelin, H. Stöcker and W. Greiner, Mod. Phys. Lett. A3 (1988) 459.

- [Pei89] G. Peilert et al., Phys. Rev. **C39** (1989) 1402.
- [Pei92] G. Peilert, Dissertation, Universität Frankfurt a. M., 1992; GSI Report, GSI-92-13 (1992).
- [Plo91] M. Ploszajczak and A. Tucholski, Nucl. Phys., **A523** (1991) 651.
- [Pra87] S. Pratt and M. B. Tsang, Phys. Rev. **C36** (1987) 2390.
- [Poc85] J. Pochodzalla et al., Phys. Lett. **B161** (1985) 256.
- [Poc86a] J. Pochodzalla, C. B. Chitwood, D. J. Fields, C. K. Gelbke, W. G. Lynch, D. H. Boal and J. C. Shillcock, Phys. Lett. **B174** (1986) 36.
- [Poc86b] J. Pochodzalla, C. K. Gelbke, C. B. Chitwood, D. J. Fields, W. G. Lynch, M. B. Tsang and W. A. Friedman, Phys. Lett. **B175** (1986) 275.
- [Poc87] J. Pochodzalla et al., Phys. Rev. **C35** (1987) 1695.
- [Poc89] J. Pochodzalla, W. Trautmann and U. Lynen, Phys. Lett. **B232** (1989) 41.
- [Poc91] J. Pochodzalla, Habilitationsschrift, Universität Frankfurt a. M., GSI Report, GSI-91-11 (1991).
- [Poc95] J. Pochodzalla, T. Möhlenkamp, T. Rubehn et al. (ALADIN collaboration), GSI Preprint, GSI-95-13 (1995).
- [Ran81] J. Randrup and S. E. Koonin, Nucl. Phys. **A356** (1981) 223.
- [Rei92] W. Reisdorf, Proc. Int. Workshop XX on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, Edt. H. Feldmeier, Hirschegg, Austria, Jan. 20-25, 1992, p. 38.
- [Rei94] W. Reisdorf, Proc. Int. Workshop XXII on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, Edt. H. Feldmeier, W. Nörenberg, Hirschegg, Austria, Jan. 17-22, 1994, p. 93.
- [Rin80] P. Ring and P. Schuck, The Nuclear Many Body Problem, (Springer, New York, 1980).
- [Rit85] H. G. Ritter, K. G. R. Doss, H. Å. Gustafsson, K. H. Kampert, B. Kolb, H. Löhner, B. Ludewigt, A. M. Poskanzer, A. Warwick and H. Wieman, Nucl. Phys. **A447** (1985) 3c.
- [San92] T. C. Sangster et al., Phys. Rev. **C46** (1992) 1404.

- [Sch74] W. Scheid, H. Müller and W. Greiner, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 741.
- [Sie79] P. J. Siemens and J. I. Kapusta, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 1486.
- [Sie83] P. J. Siemens, *Nature (London)* **305** (1983) 410.
- [Sou91] R. T. de Souza et al., *Phys. Lett.* **B268** (1991) 6.
- [Sto80] R. Stock et al., *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 1243.
- [Sto86] R. Stock, *Phys. Rep.* **135** (1986) 259.
- [Sto79a] H. Stöcker, J. A. Maruhn and W. Greiner, *Z. Phys.* **A290** (1979) 297.
- [Sto79b] H. Stöcker, J. A. Maruhn and W. Greiner, *Phys. Lett.* **B81** (1979) 303.
- [Sto81] H. Stöcker, A. A. Ogloblin and W. Greiner, *Z. Phys.* **A403** (1981) 259.
- [Sto82] H. Stöcker et al., *Nucl. Phys.* **A387** (1982) 205c.
- [Sto83] H. Stöcker, G. Buchwald, G. Gräbner, P. Subramanian, J. A. Maruhn, W. Greiner, B. J. Jacak and G. D. Westfall, *Nucl. Phys.* **A400** (1983) 63.
- [Sni60] R. F. Snider, *J. Chem. Phys.* **32** (1960) 1051.
- [UeU33] E. A. Uehling and G. E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **C5** (1933) 552.
- [Wan85] S. J. Wang and W. Cassing, *Ann. Phys.* **159** (1985) 328.
- [Wei35] C. F. von Weizsäcker, *Z. Physik* **96** (1935) 431.
- [Wei37] V. Weisskopf, *Phys. Rev.* **52** (1937) 295.
- [Wei40] V. Weisskopf and D. E. Ewing, *Phys. Rev.* **57** (1940) 472.
- [Wei76] W. Weise and G. E. Brown, *Phys. Rep.* **C27** (1976) 1.
- [Wie93] Th. Wienold, Dissertation, Universität Heidelberg, 1993; GSI Report, GSI-93-28 (1993).
- [Yar79] Y. Yariv and Z. Fraenkel, *Phys. Rev.* **C20** (1979) 2227.
- [Yar81] Y. Yariv and Z. Fraenkel, *Phys. Rev.* **C24** (1981) 488.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Nukleare Zustandsgleichung	17
2.2	Zeitliche Entwicklung der Dichteverteilungen für $b = 0$ fm	24
2.3	Zeitliche Entwicklung der Dichteverteilungen für $b = 6$ fm	25
2.4	Ortsdichte plus Kontur-Plot	26
3.1	Räumliche Verteilung der Fragmente	33
3.2	Struktogramm bzgl. SM-Modell	40
3.3	Verteilung von Fragmenten innerhalb einer Kugel	41
4.1	Mittlere kinetische Energie für Au(150 MeV/n) + Au Stöße	44
4.2	Flußwinkelverteilungen für Nb(400 MeV/n) + Nb Stöße	45
4.3	Beschreibung einer Kern-Kern-Kollision	46
4.4	Squeeze-Winkel-Verteilung	48
4.5	Mittelwerte der Transversalimpulse als Funktion der Rapidität	51
4.6	Azimutale Winkelkorrelation verschiedener Fragmente als Funktion der Rapidität	52
4.7	Erläuterung zur Bestimmung des sphärischen Flusses	53
4.8	<i>ERAT</i> -Werte über Stoßparameter	56
4.9	<i>ERAT</i> -Verteilung bzgl. Au(150 A·MeV) + Au Reaktionen	57
4.10	Streuwinkelverteilung bzgl. einer Au(150A·MeV) + Au Reaktion	58
4.11	Temperatur als Funktion der Anregungsenergie	62
4.12	Multiplizitätsverteilung geladener Teilchen	63
4.13	Ladungsabhängigkeit der Korrelationsfunktion	67
5.1	Fragmentbildung im Rahmen eines Perkulationsmodells	72
5.2	Ladungsverteilung bzgl. Au(150 A·MeV) + Au Reaktionen	73
5.3	C_2 -Kurven bzgl. Au(150 A·MeV)+Au Reaktionen	75
5.4	C_2 -Kurven bzgl. Au(100 A·MeV)+Au Reaktionen	76
5.5	Einige quellspezifische Größen	81
5.6	Geschwindigkeitsspektren für semizentrale Au(150 A·MeV)+Au Stöße	82
5.7	Orts- und Impulsverteilung bzgl. einer Au(150 A·MeV) + Au Reaktion	84
5.8	Geschwindigkeitsprofile von $\langle v_3 \rangle$	87

5.9	Erläuterung zur Abschätzung der Aufbruch-Zeit	91
5.10	Temperaturen und Flüsse in Abhängigkeit der Zeit	93
5.11	Vergleich der Impulsverteilungen des Hybrid-Modells mit denjenigen des BUU-Modells	96
5.12	A, E^*/A , Volumen und Temperatur bzgl. mittlerer EOS	104
5.13	A, E^*/A , Volumen und Temperatur bzgl. weicher EOS	105
5.14	A, E^*/A , Volumen und Temperatur bzgl. harter EOS	106
5.15	Flußenergien in Abhängigkeit vom Stoßparameter	107
5.16	Flußenergien bzgl. verschiedener EOSs	108
5.17	Flußenergien bzgl. verschieden großer Wirkungsquerschnitte	109
5.18	Drehimpuls in Abhängigkeit vom Stoßparameter	110
5.19	Ladungsverteilungen für zentrale und semizentrale Stöße	111
5.20	Y_{12} - und C_2 -Fktn. bzgl. zentraler Stöße	112
5.21	Y_{12} - u. C_2 -Fktn. bzgl. semizentraler Stöße	113
5.22	$d^2M/(pd\Omega dE)$ für Li, Be, B und C	114
E.1	Programmausschnitt für die Berechnung der $Y_{12,mix}$ -Funktion	124

Tabellenverzeichnis

3.1	Zerfallskanäle eines ($A_0 = 4, Z_0 = 2$)-Systems	29
5.1	Pseudo-Temperaturen in Verbindung mit dem Stoßparameter . .	97
5.2	Entropien in Verbindung mit dem Stoßparameter	98
5.3	Flußwinkel und Stoßparameter	99

Erklärung:

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Ich erkenne die Promotionsordnung der Technischen Universität Dresden im vollen Umfang an.



Bernd Heide

Danksagung

Herrn Prof. Dr. G. Soff möchte ich dafür danken, daß er mir, einem Physiker vom Forschungszentrum Rossendorf, die Möglichkeit gab, in seinem Arbeitsseminar teilzunehmen. Seine Anregungen und sein Interesse am Fortgang meiner Arbeit waren äußerst wertvoll und hilfreich.

Herrn Dr. habil. H. W. Barz danke ich für die intensive und kollegiale Betreuung, die in hohem Maße zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat.

Bei Herrn Dr. R. Wünsch möchte ich mich für die fachliche Unterstützung bedanken, die er mir jederzeit zukommen lies. Auch das freundschaftliche Verhältnis zu ihm schätzte ich sehr.

Für aufschlußreiche Diskussionen möchte ich mich bei den folgenden Personen bedanken: Herr Dr. R. Kotte, Herr D. Wohlfarth, Frau Dr. B. Naumann, Herr Dr. habil. B. Kämpfer, Herr Dr. A. Pfitzner, Herr Dr. habil. W. Reisdorf, Herr T. Möhlenkamp und Herr A. Peter.

Dem Team vom Rechenzentrum, insbesondere Frau U. Fromm, Herrn E. Müller und Herrn A. Geyer, möchte ich für die freundliche Unterstützung danken.

Dem Leiter des Institutes für Kern- und Hadronenphysik, Herrn Dr. H. Prade, und dem Leiter der Theorie-Abteilung, Herrn Dr. habil. F. Döna, danke ich für die von ihnen geschaffenen, hervorragenden Arbeitsmöglichkeiten.

Für die freundliche Hilfe bei der Bewältigung organisatorischer Angelegenheiten bedanke ich mich bei der Sekretärin des Institutes, Frau E. Kluge.

Weiterhin möchte ich mich bei allen Mitgliedern der Theorie-Abteilung sowie bei den fliegenden Barrakudas für die lockere und angenehme Atmosphäre bedanken.

Ein ganz liebes Dankeschön richte ich an meine Freundin Silke Namuth, an meinen Bruder Jürgen und an die Familien Frank und Jankewitz für die moralische Unterstützung.

Mein ehemaliger Lehrer, Herr Dr. E. Nestler, trieb mich dazu, aus der beruflichen Monotonie auszusteigen und ein Studium aufzunehmen. Er brachte somit den Stein, die Doktorarbeit, ins Rollen. Hierfür bin ich ihm sehr dankbar.

Diese Arbeit wurde mit Mitteln des Bundesministeriums für Forschung und Technologie gefördert.