

Archiv-Ex.:

FZR-211

Februar 1998

Mathias Schleif

**Solitonische Feldkonfigurationen des
Nambu & Jona-Lasinio - Modells
im Medium**

Herausgeber:
FORSCHUNGSZENTRUM ROSSENDORF
Postfach 51 01 19
D-01314 Dresden
Telefon (03 51) 26 00
Telefax (03 51) 2 69 04 61

Als Manuskript gedruckt
Alle Rechte beim Herausgeber

Solitonische Feldkonfigurationen des Nambu & Jona-Lasinio – Modells im Medium

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

der Fakultät Mathematik und Naturwissenschaften
der Technischen Universität Dresden

von

Dipl.-Phys. Mathias Schleif
geboren am 06.11.66 in Neustrelitz

Gutachter: Prof. Dr. Gerhard Soff

Prof. Dr. Klaus Goeke

Dr. Rudi Wünsch

Eingereicht am: 7. Oktober 1997

Tag der Verteidigung: 11. Februar 1998

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Eigenschaften der Nambu & Jona-Lasinio – Lagrange-Dichte und ihre Motivation aus der Quantenchromodynamik	5
3	Quantenfeldtheorie bei endlicher Temperatur und Dichte	10
3.1	Zustandsfunktion, Großkanonisches Potential	10
3.2	Konzept der effektiven Wirkung	13
3.3	Die Näherung des mittleren Feldes	14
3.4	Thermische Green-Funktion für Quarks im klassischen äußeren Feld	16
4	Solitonische Feldkonfigurationen	19
4.1	Hedgehog-Felder	19
4.2	Thermodynamische Größen des Solitons	21
4.2.1	Großkanonisches Potential	21
4.2.2	Feldgleichungen	26
4.2.3	Innere und freie Energie, Entropie, Teilchenzahl	28
4.3	Thermische Erwartungswerte von solitonischen Observablen	30
4.4	Sonderbehandlung der Valenzquarks	34
5	Parameter des Modells	35
6	Lösungen der Feldgleichungen für ein homogenes Medium aus Konstituentenquarks	38
6.1	Effektives Potential, Gap-Gleichung	38
6.2	Abschätzung der kritischen Temperatur	42
6.3	Abschätzung des kritischen chemischen Potentials	45
7	Numerische Ergebnisse für solitonische Feldkonfigurationen	47
7.1	Temperatur- und Dichtebereich für solitonische Lösungen	48
7.2	Selbstkonsistenter chiraler Winkel und Mesonenfelder	49
7.3	Baryonendichte, Baryonenzahl und mittlerer quadratischer Radius	51
7.4	Energien des Solitons	56
8	Quasi-klassische Energiekorrekturen	59
8.1	Impulsfluktuationen und Schwerpunktskorrekturen	59
8.1.1	Trägheitsparameter für Translation – träge Masse des Solitons	64
8.1.2	Schwerpunktskorrigierte Energien des Solitons	69
8.2	Isospinfluktuationen und Rotationskorrekturen	71
8.2.1	Trägheitsparameter für Rotation im Isospin-Raum – Trägheitsmoment	74
8.2.2	Δ -Nukleon-Massenaufspaltung und Energien des Nukleons	78
9	Zusammenfassung und Ausblick	82

A Konventionen	84
A.1 Natürliche Einheiten	84
A.2 Minkowski-Raum	84
A.3 γ -Matrizen	85
A.4 Euklidischer Raum	85
B Summenformeln für Matsubara-Frequenzen	86
C Vertauschung des Hamilton-Operators mit dem Superspin	87
D Verwendete Basiszustände	89
E Nützliche Formeln des Exponentialoperators	91
F Berechnung des Trägheitsparameters für eine Translation des Solitons	94
G Berechnung des Trägheitsparameters für eine Rotation des Solitons	100
Literatur	106

Abbildungsverzeichnis

5-1	Parameter des Modells	37
6-1	Effektives Potential der Quarks in 1-Schleifen-Näherung	39
6-2	Temperatur- und dichteabhängige Konstituenten-Quarkmasse	42
7-1	Temperatur- und Dichtebereich für solitonische Lösungen	48
7-2	Selbstkonsistenter chiraler Winkel	50
7-3	Selbstkonsistente Mesonenfelder	51
7-4	Baryondichte des Solitons und Kastengröße bei numerischen Rechnungen	52
7-5	Baryondichte der See- und Mediumquarks	53
7-6	Baryondichte des Solitons in Abhängigkeit von Temperatur und Dichte der Umgebung	55
7-7	Mittlerer quadratischer Radius der solitonischen Feldkonfigurationen	56
7-8	See-, Medium- und mesonischer Beitrag zur inneren Energie des Solitons .	57
7-9	Innere und freie Energie sowie großkanonisches Potential des Solitons . . .	58
8-1	Kinetische Energie der Schwerpunktbewegung	70
8-2	Schwerpunktskorrigierte Energien des Solitons	71
8-3	See- und Mediumbeiträge zum Trägheitsmoment	78
8-4	Trägheitsmoment des Solitons und Δ -Nukleon-Massenaufspaltung	79
8-5	Energien des Nukleons in Abhängigkeit von Temperatur und Dichte der Umgebung	81

1 Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD) mit den Quarks und Gluonen als den elementaren Freiheitsgraden hat sich gegenwärtig als die Theorie der starken Wechselwirkung erwiesen. Diese Theorie besitzt die folgenden fundamentalen Eigenschaften. Bei hohen Energien verhält sie sich wie eine schwach wechselwirkende Theorie (*asymptotische Freiheit*) und ist aus diesem Grunde störungstheoretisch zugänglich. Bei niederen Energien sind die Quarks und Gluonen dagegen in Hadronen (Pionen, Nukleonen, Vektormesonen u. a.) gebunden. Dies ist die hadronische Phase, und man spricht vom sogenannten *Confinement*, was bislang keinesfalls theoretisch vollständig verstanden ist. Dieses nicht-störungstheoretische Problem führt zu Schwierigkeiten, die einer direkten Anwendung der QCD auf die Beschreibung stark wechselwirkender Materie bei mittleren und niedrigen Energien entgegenstehen. Aus diesem Grunde benutzt man in diesem Energiebereich effektive Feldtheorien, die zwar nicht direkt aus der vollen QCD abgeleitet werden können, die aber wesentliche Eigenschaften dieser Theorie reflektieren. Als Konstruktionsprinzipien dienen dabei vor allem Symmetriebetrachtungen und die Dimensionsanalyse. Daneben gibt es Versuche, die Eigenschaften der Hadronen basierend auf der fundamentalen Theorie mittels Gitterrechnungen zu bestimmen. Zum Verständnis der Resultate dieser "Computerexperimente" bleibt die Entwicklung von effektiven Modellen, die diese Daten reproduzieren, eine weiterhin sinnvolle Aufgabe.

Neben der lokalen $SU(N_c)$ -Symmetrie der QCD aufgrund der Konstruktion als Eichfeldtheorie, besitzt die Lagrange-Dichte der starken Wechselwirkung noch eine andere wichtige Symmetrie. Vernachlässigt man die Quarkstrommassen, so ist die Lagrange-Dichte der QCD symmetrisch unter der globalen chiralen Gruppe $SU_V(N_f) \times SU_A(N_f) \times U_V(1) \times U_A(1)$. Da die Quarkstrommassen der u- und d-Quarks sehr klein sind ($\simeq 10 \text{ MeV}$) ist dies eine besonders gute Näherung für diese leichtesten Quarksorten. Die $U_V(1)$ -Symmetrie ist mit der Erhaltung der Baryonenzahl verknüpft und die $SU_V(N_f)$ -Symmetrie sorgt für die Anordnung der Hadronen in Flavour-Multipletts. Die anderen Symmetrien haben keine solche Entsprechungen in der Natur. Während die $U_A(1)$ -Symmetrie durch Quanteneffekte gebrochen wird (chirale Anomalie), nimmt man an, daß der Grundzustand der Theorie die $SU_A(N_f)$ -Symmetrie spontan bricht, da keine chiralen Partner zu den bekannten Hadronen beobachtet worden sind. Diese spontane Symmetriebrechung ist verknüpft mit dem Auftreten masseloser Goldstone-Bosonen – den Pionen, Kaonen und η -Mesonen, die die Freiheitsgrade der unbeobachteten chiralen Partner besetzen. Da die Quarkstrommassen nicht exakt verschwinden und damit die chirale Symmetrie explizit gebrochen ist, besitzen diese Goldstone-Bosonen in der Natur ebenfalls eine endliche Masse.

Erhöht man die Energiedichte der hadronischen Phase, wie dies z. B. in relativistischen Schwerionenstößen mit Energien der kollidierenden Kerne von einigen GeV pro Nukleon realisiert wird, dann erwartet man Modifikationen in den Teilcheneigenschaften (Massen, Zerfallsbreiten, Kopplungskonstanten), die zu experimentell beobachtbaren Phänomenen führen können. Beispielsweise sollten die Änderungen der Massen im Medium, der an der Reaktion beteiligten Teilchen, zu Modifikationen der gemessenen Teilchenspektren führen.

Bei hinreichend hohen Energiedichten erwartet man zwei mögliche Phasenübergänge: ein Deconfinement der Quarks und Gluonen sowie die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie. Beim Deconfinement-Übergang geht die hadronische Phase in ein Quark-Gluonen-Plasma über. Das umgekehrte Szenario, die Bildung von Mesonen und Baryonen aus den Quarks, sollte nach der Urknall-Hypothese auch in der Entwicklung des Kosmos stattgefunden haben, als dessen Temperatur auf ca. 200 MeV fiel. Das Studium der Eigenschaften von Hadronen bei endlicher Temperatur und Teilchendichte kann zum Verständnis dieser Vorgänge beitragen.

Die Massen als wesentliche Eigenschaften von Hadronen im Medium wurden durch Gitterrechnungen, QCD-Summenregeln, mit Hilfe effektiver Lagrange-Dichten und durch phänomenologische Bag-Modelle bestimmt. Allerdings liefern diese unterschiedlichen Techniken zum Teil widersprüchliche Ergebnisse. So kommt man z. B. mit Hilfe der chiralen Störungstheorie zu der Aussage, daß sich die Masse der Nukleonen bei hohen Temperaturen ebenfalls mit T erhöht [1]. Auf der Basis einer effektiven Niederenergie-Lagrange-Dichte wurde das Brown-Rho-Skalierungsverhalten abgeleitet [2], bei dem die Nukleonen-Masse wie die Pion-Zerfallskonstante skaliert und bei Erhöhung der Temperatur abfällt. QCD-Summenregeln sagen ebenfalls ein Abnehmen der Nukleonen-Masse mit zunehmender Temperatur voraus [3]. In [4] wird mit Hilfe von Strom-Algebra und der Hypothese der partiellen Erhaltung des axialen Stromes (PCAC) argumentiert, daß Hadronen-Massen bis zur Ordnung T^2 temperaturunabhängig sind. Auf der Grundlage eines Quark-Meson-Kopplungs-Modells wurde die Dichteabhängigkeit der Nukleonen-Masse in einem Bag-Modell studiert [5]. Eine zunehmende Dichte hatte eine Abnahme der Nukleonen-Masse zur Folge. Man kommt zu dem Schluß, daß gegenwärtig noch keine einheitliche Beschreibung hadronischer Materie existiert.

Eine weitere Schwierigkeit besteht in der Definition der Masse bei endlichen Temperaturen [6]. Unterschiedliche Definitionen beschreiben im allgemeinen verschiedene physikalische Erscheinungen. Dies ist zum Teil auch bei den oben angegebenen Arbeiten zu berücksichtigen. So muß man z. B. zwischen der Polmasse, gegeben durch die Polstelle des Propagators, und der Screening-Masse, gegeben durch das Verhalten der hadronischen Korrelationsfunktionen bei großen räumlichen Abständen, unterscheiden. Die Pole des vollen Propagators kann man als elementare Anregungen im Medium verstehen, wohingegen die Screening-Masse Abschirmeffekte der Felder aufgrund der Umgruppierung der Teilchen im Medium bei Anwesenheit eines äußeren Feldes beschreibt (ähnlich dem Debye-Screening im elektromagnetischen Plasma). Vor kurzem wurden Gitterrechnungen (bei verschwindender Teilchendichte) zur Screening-Masse des Nukleons kurz vor dem Deconfinement durchgeführt [7, 8]. Es gibt Hinweise auf eine Erhöhung der Screening-Masse bei Erhöhung der Temperatur.

In dieser Arbeit beschreiben wir Eigenschaften des Nukleons basierend auf einem chiralen Soliton-Modell. Ausgangspunkt ist dabei die (bis auf Quarkstrommassen) chirale invariante Nambu & Jona-Lasinio (NJL)-Lagrange-Dichte [9–11] mit einer 4-Quark-Punktwechselwirkung. Nach Anwendung der Näherung des zeitunabhängigen mittleren Feldes (MFA), eines bestimmten Regularisierungsschemas sowie bei Beschränkung der mittleren Felder auf Hedgehog-Struktur, gelangt man zu stabilen räumlich begrenzten

Feldkonfigurationen. Diese selbstkonsistent bestimmten Objekte mit einer räumlichen Ausdehnung von ungefähr 1 fm zählen zu den nicht-topologischen Solitonen, die das homogene System als Randbedingung für große Abstände vom Ursprung des Solitons enthalten. Die Übersichtsartikel in [12, 13] beschreiben dieses Soliton eingebettet im nicht-störungstheoretischen QCD-Vakuum. Die spontane chirale Symmetriebrechung manifestiert sich in einem nichtverschwindenden Vakuum-Quarkkondensat $\langle 0 | \hat{q}\hat{q} | 0 \rangle$, was die Ursache für eine Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse der leichten Quarks von ungefähr 400 MeV ist. Diese nicht-störungstheoretische Konstituenten-Quarkmasse der Ordnung Λ_{QCD} ermöglicht dann den Aufbau des Nukleons, mit einer Masse von etwa 1 GeV, als gebundenen Zustand von Konstituentenquarks. Dieses Soliton-Modell erwies sich als sehr erfolgreich bei der Berechnung von baryonischen Observablen im Vakuum.

Auf der anderen Seite beschreibt das NJL-Modell auch die chirale Symmetrierestauration in heißer und dichter Kernmaterie, modelliert durch ein Gas von Konstituentenquarks (z. B. [14]), dessen effektive Masse durch den thermischen Erwartungswert des chiralen Quarkkondensates bestimmt ist. Die Annahme ist dabei, daß die chirale Symmetriebrechung und nicht das Confinement die grundlegenden Eigenschaften der leichten Hadronen, insbesondere der Nukleonen, bestimmt.

Es ist eine attraktive Idee, beide Aspekte der NJL-Lagrange-Dichte zu vereinen und die Eigenschaften eines Solitons zu studieren, das in einem heißen Gas von Konstituentenquarks, mit einer dynamisch erzeugten effektiven Masse, eingebettet ist. Dieses Modell kann dann sowohl die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie und die damit verbundene Reduktion der Konstituenten-Quarkmasse, als auch die mögliche Auflösung des Solitons, was den Deconfinement-Übergang von hadronischer Materie simulieren soll, beschreiben. Im Gegensatz zu vielen anderen Modellen wird hier explizit die innere Struktur von Baryonen berücksichtigt, die durch das umgebende Medium verändert werden kann. In dem verwendeten Modell werden sowohl die Vakuum- als auch die Mediumpolarisation der Quarks aufgrund der ortsabhängigen solitonischen Felder in MFA vollständig berücksichtigt.

Dieser näherungsweise Zugang, in dem das Medium durch ein Quark-Gas modelliert wird, ist nicht ganz unproblematisch. Wenn das Soliton unterhalb einer kritischen Temperatur stabil ist, sollte auch das umgebende Medium selber aus Solitonen bestehen. Dies geht über die MFA-Näherung hinaus, in der man nur die durch die Reduktion der Konstituenten-Quarkmasse hervorgerufene Skalenänderung und deren Auswirkungen auf die selbstkonsistenten mittleren Felder studiert. Die freie Bewegung der Quarks in dem umgebenden Medium führt wahrscheinlich zu einer Überschätzung des Einflusses der Umgebung. Es wurden Versuche unternommen, die Quark-Freiheitsgrade des Mediums durch nukleonische zu ersetzen [15, 16], ohne weitere neue Parameter einzuführen. Hier kommt es allerdings schon bei der Dichte normaler Kernmaterie zur chiralen Symmetrierestauration [15, 17].

Das in dieser Arbeit verwendete Soliton ist in den meisten Aspekten nahezu identisch zum Soliton der Arbeiten [12, 16, 18]. Unterschiede ergeben sich aus der speziellen Behandlung der Valenzquarks (Abschnitt 4.4) und der Verwendung von chemischen Potentialen zur Justierung der Baryonenzahl des Solitons (Abschnitt 7.3). Ziel dieser Arbeit ist

das Studium von thermodynamischen Eigenschaften des Solitons und die Diskussion der sich dabei ergebenden Konsequenzen. Es geht um die Beantwortung der Frage, inwieweit das Soliton-Modell geeignet ist, baryonische Eigenschaften im Medium zu beschreiben. Desweiteren werden Energiekorrekturen berechnet, die ihre Ursache in den im Modell verwendeten Approximationen haben.

Aufgrund der Näherung des ortsabhängigen mittleren Feldes und des Hedgehog-Ansatzes werden die Translations- und (Iso-)Rotationsinvarianz verletzt. Als Folge davon enthält die solitonische Lösung eine Schwerpunktsbewegung und representiert eine Mischung aus Nukleon und Δ -Isobar, was einen direkten Vergleich mit den Massen dieser physikalischen Teilchen nicht zuläßt. Um die Energie der Schwerpunktsbewegung zu eliminieren und eine Feldkonfiguration mit definierten Spin und Isospin zu erhalten, verwenden wir die *Pushing*- und *Cranking*-Näherungen [19], die schon beim Soliton im Vakuum zur Anwendung kamen [20, 21]. Die Größe der entsprechenden Energiekorrekturen wird durch Trägheitsmomente des Solitons bestimmt. Diese müssen im Medium neu berechnet werden, was in dieser Arbeit getan wird. Die träge Masse des Solitons wird sich als identisch mit der inneren Energie des Solitons erweisen, was eine nichttriviale Verallgemeinerung der entsprechenden Beziehung für das Soliton im Vakuum [20] darstellt. Diesen Zusammenhang kann man analytisch mit Hilfe von Operatorrelationen und unter Ausnutzung der Feldgleichungen herstellen. Das Trägheitsmoment für die Rotation läßt sich auf keine bekannte Größe des Solitons zurückführen und muß separat numerisch bestimmt werden [22].

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. In Kapitel 2 werden Eigenschaften der NJL-Lagrange-Dichte und ihre Motivation aus der QCD behandelt. Die grundlegenden Formeln für die Quantenfeldtheorie bei endlichen Temperaturen (Thermodynamik von Quantenfeldern) sowie die Näherung des mittleren Feldes werden in Abschnitt 3 erklärt. Kapitel 4 gibt die Beziehungen für thermische Erwartungswerte des Solitons an. Die verwendeten Parameter sind in Abschnitt 5 beschrieben und Abschnitt 6 enthält die Betrachtung des homogenen Mediums von Konstituentenquarks. Die numerischen Ergebnisse für die solitonischen Feldkonfigurationen und die quasi-klassischen Energiekorrekturen sind in den Kapiteln 7 und 8 aufgeführt. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung der Resultate und der möglichen Erweiterungen in Abschnitt 9. Im Anhang sind die verwendeten Konventionen, die benutzte Basis für die numerischen Rechnungen sowie speziell längere Rechnungen zur Bestimmung der Trägheitsmomente angegeben.

2 Eigenschaften der Nambu & Jona-Lasinio – Lagrange-Dichte und ihre Motivation aus der Quantenchromodynamik

Wegen der großen Schwierigkeiten, die einer direkten Anwendung der QCD auf die Beschreibung stark wechselwirkender Materie bei mittleren und niedrigen Energien entgegenstehen, unternimmt man den aussichtsreichen Versuch, effektive Niederenergie-theorien der QCD zu konstruieren. Die Lagrange-Dichte der QCD ist skaleninvariant – vernachlässigt man die Quarkstrommassen so gibt es keinen Parameter (die Kopplungskonstante ist dimensionslos), der eine Energieskala auszeichnet. Was bedeutet dann eigentlich Niederenergie-theorie? Auf dem Niveau der Quantenfeldtheorie (QFT) wird durch das Renormierungsprogramm eine Skala $\Lambda_{\text{QCD}} \simeq 200 \text{ MeV}$ in die Theorie projiziert (*dimensionale Transmutation* [23]). Diese neue Skala bestimmt dann den Bereich, bei dem die Wechselwirkung stark wird (störungstheoretische Methoden versagen), sowie die Massen der Nukleonen.

Im folgenden werden einige grundlegende Ideen der Konstruktion einer effektiven Feldtheorie in Anlehnung an [24, 25] gegeben. Dazu betrachten wir eine Quantenfeldtheorie in 4 Raum-Zeit-Dimensionen mit einer charakteristischen Energieskala E_0 , wobei wir an der Physik auf der niederen Energieskala $E \ll E_0$ interessiert sind. Um eine Niederenergie-theorie zu konstruieren, wählen wir einen Abschneideparameter Λ in der Größenordnung E_0 und unterteilen die Feldfreiheitsgrade ϕ in einen Hoch- und Niederfrequenzanteil

$$\phi = \phi_H + \phi_L \quad \text{mit} \quad \phi_H : \omega > \Lambda \quad \text{und} \quad \phi_L : \omega < \Lambda . \quad (2.1)$$

Bei der Quantisierung im Pfadintegral-Formalismus ist die Vakuum \rightarrow Vakuum-Übergangsamplitude gegeben durch das Integral über alle möglichen Feldkonfigurationen

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_L \mathcal{D}\phi_H e^{iS(\phi_L, \phi_H)} = \int \mathcal{D}\phi_L e^{iS_\Lambda(\phi_L)} \quad (2.2)$$

mit

$$e^{iS_\Lambda(\phi_L)} = \int \mathcal{D}\phi_H e^{iS(\phi_L, \phi_H)} . \quad (2.3)$$

$S_\Lambda(\phi_L)$ ist dabei die effektive Niederenergie-Wirkung (Wilson-Wirkung), die bereits eine Ausintegration der hochfrequenten Freiheitsgrade enthält. Im allgemeinen ist diese Ausintegration nicht exakt möglich, falls es sich nicht um Gauß-Integrale handelt. Man kann aber die effektive Wirkung S_Λ in eine Reihe von lokalen Operatoren \mathcal{O}_i entwickeln

$$S_\Lambda = \int d^4x \sum_i g_i \mathcal{O}_i , \quad (2.4)$$

die mit den Symmetrien des Problems vereinbar sind. Im Pfadintegral-Formalismus sind die \mathcal{O}_i Funktionen der Niederenergie-Freiheitsgrade und deren Ableitungen.

Mit Hilfe der Dimensionsanalyse kann man aus dieser unendlichen Reihe, die für eine Niederenergie-theorie wesentlichen Terme herauspicken. Wir verwenden hier $\hbar = c = 1$ (siehe

Anhang A), so daß die Wirkung dimensionslos ist. Der Operator \mathcal{O}_i habe die Dimension E^{δ_i} , dann muß die Kopplungskonstante g_i die Dimension $E^{4-\delta_i}$ haben. Definiert man sich nun dimensionslose Kopplungen $\lambda_i = \Lambda^{\delta_i-4} g_i$ die von der Größenordnung 1 sind, dann ist der i -te Term in Gl. (2.4) von der Ordnung

$$\lambda_i \left(\frac{E}{\Lambda} \right)^{\delta_i-4}, \quad (2.5)$$

wobei E die Energie ist, bei der die Niederenergiethorie angewendet werden soll. Für $\delta_i > 4$ wird der Einfluß dieser Terme für die Niederenergiethorie mit wachsendem δ_i immer geringer - man spricht von *irrelevanten* Termen. Bei $\delta_i < 4$ werden diese Terme wesentlich (*relevant*). Operatoren mit $\delta_i = 4$ sind auf allen Skalen wichtig und werden *marginal* genannt. Die Idee ist nun, daß die Niederenergiephysik hauptsächlich durch die relevanten, marginalen und führenden irrelevanten Kopplungen bestimmt wird. Diese Ideen werden im folgenden zur Konstruktion einer effektiven Lagrange-Dichte aus der QCD benutzt.

Die QCD als Eichfeldtheorie mit der $SU(N_c)$ -Eichgruppe ist gegeben durch die folgende Lagrange-Dichte [26]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \sum_f \bar{q}_f [i\mathcal{D}(A) - m_f] q_f - \frac{1}{4} F^2(A) \\ &= \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{\alpha,\beta=1}^4 \sum_{i,j=1}^{N_c} \bar{q}_{f,\beta,j} \left[i \sum_{\mu=0}^3 (\gamma^\mu)_{\beta\alpha} D_{\mu,ji}(A) - m_f \delta_{\beta\alpha} \delta_{ji} \right] q_{f,\alpha,i} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\mu,\nu=0}^3 \sum_{a=1}^{N_c^2-1} F_{\mu\nu,a}(A) F_a^{\mu\nu}(A), \end{aligned} \quad (2.6)$$

wobei wir im letzten Ausdruck alle auftretenden Indizes explizit aufgeführt haben, was im folgenden nicht mehr getan wird. Über doppelt auftretende Indizes ist dann künftig, wenn nichts anderes vereinbart wird, immer zu summieren. Der letzte Term in Gl. (2.6) beschreibt die reine gluonische Theorie, wobei der gluonische Feldstärketensor $F_{\mu\nu,a}$ gegeben ist durch

$$F_{\mu\nu,a}(A) = \partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - g C_{abc} A_{\mu b} A_{\nu c}, \quad (2.7)$$

mit den gluonischen Vektorfeldern $A_{\mu a}$ mit $N_c^2 - 1$ Komponenten. Die eichkovariante Ableitung $D_{\mu,ij}(A)$ enthält die Gluonfelder und bestimmt somit die Quark-Gluon-Wechselwirkung

$$D_{\mu,ij}(A) = \partial_\mu \delta_{ij} + ig A_{\mu a} (T_a)_{ij}. \quad (2.8)$$

Die Koeffizienten C_{abc} sind die Strukturkonstanten gegeben durch $[T_a, T_b] = i C_{abc} T_c$. Die Matrizen T_a haben die Dimension $N_c \times N_c$ und sind die Erzeuger der $SU(N_c)$ -Gruppe. g ist die Kopplungskonstante der QCD und m_f sind die Quarkstrommassen der verschiedenen Quark-Flavour deren Gesamtzahl N_f beträgt. Ausgangspunkt für die quantisierte Theorie ist das erzeugende Funktional, was im Pfadintegral-Formalismus ohne Ankopplung äußerer

Quellen gegeben ist durch

$$Z_{\text{QCD}} = \int \mathcal{D}q^\dagger \mathcal{D}q \mathcal{D}A_\mu^a e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{QCD}}} . \quad (2.9)$$

Das obige Pfadintegral ist in mehrfacher Hinsicht nicht gut definiert. Die lokale Eichinvarianz von \mathcal{L}_{QCD} erfordert die Einführung von eichfixierenden Termen und Faddeev-Popov-Geistern [26]. Auch danach enthält das dann erweiterte Pfadintegral noch Divergenzen, was eine Regularisierung notwendig macht. Die im folgenden durchgeführte Argumentation ist deshalb heuristisch zu verstehen.

Aus der Hochenergietheorie Gl. (2.9) ist nun eine effektive Niederenergietheorie zur Beschreibung von Baryonen, speziell der Nukleonen, zu konstruieren. Auf dem Niveau der Baryonen sind keine gluonischen Freiheitsgrade aber ein bestimmter Quark-Flavour-Inhalt (z. B. Proton $\sim uud$) zu erkennen. Im Sinne der am Anfang dargestellten Konstruktionsprinzipien für eine Niederenergietheorie bilden die gluonischen Felder die hochfrequenten Freiheitsgrade. In einem ersten Schritt könnte man versuchen, diese gluonischen Felder auszuintegrieren, um aus der QCD eine effektive Quark-Flavour-Dynamik (QFD) der starken Wechselwirkung zu erhalten. Da dies nicht direkt möglich ist, suchen wir nach lokalen Quark-Feldoperatoren im Sinne von Gl. (2.4). \mathcal{O}_i bestehe aus a Quarkfeldern q und b Ableitungen nach x . Da die Dimension der Quarkfelder $[q] = E^{3/2}$ und die Dimension der Ableitungen $[\frac{\partial}{\partial x}] = E$ beträgt, ergibt sich für die Dimension δ_i von \mathcal{O}_i

$$\delta_i = \frac{3}{2}a + b . \quad (2.10)$$

Die Massenterme in einer Quarktheorie sind $-\bar{q}mq$ also $a = 2, b = 0$, was auf $\delta_i = 3 < 4$ führt. Sie sind somit relevante Terme. Kinetische Terme $\bar{q}\not{\partial}q$ führen mit $a = 2, b = 1$ auf $\delta_i = 4$ und sind damit marginal, d. h. wichtig auf allen Skalen. Verzichtet man auf weitere Ableitungen der Quarkfelder und beachtet, daß aufgrund der Lorentz-Invarianz nur Bilinearkombinationen der Quarkfelder in Frage kommen (also a gerade), so erhält man für den niedrigsten irrelevanten Term mit $a = 4$ die Form $(\bar{q}\Gamma q)^2$, wobei Γ vorerst noch eine Kombination aus Dirac-, Flavour- und Farb-Matrizen sein kann. Beschränkt man sich auf Farb-Singulett-Wechselwirkungen, enthält Γ die Einheitsmatrix im Farb-Raum. Zur weiteren Spezifizierung der Wechselwirkungsterme, die vier Quarkfelder enthalten, muß man weitere Symmetrien zu Rate ziehen.

Die Lagrange-Dichte der QCD (Gl. (2.6)) besitzt, bis auf die Terme mit den Quarkstrommassen, die globale chirale $U_V(N_f) \times U_A(N_f)$ Symmetrie. Fordert man diese Symmetrie nun für die Wechselwirkungsterme der Niederenergietheorie, so wäre insgesamt folgende effektive Lagrange-Dichte bis zur Dimension $\delta = 6$ möglich [27, 28]

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\not{\partial} - m)q + \frac{G_1}{2} [(\bar{q}T_i^f q)^2 + (\bar{q}T_i^f i\gamma_5 q)^2] - \frac{G_2}{2} [(\bar{q}T_i^f \gamma_\mu q)^2 + (\bar{q}T_i^f i\gamma_5 \gamma_\mu q)^2] , \quad (2.11)$$

in der beide Summen unabhängig voneinander chiral invariant bei den Transformationen

$$\begin{aligned} q &\rightarrow U_V q & \bar{q} &\rightarrow \bar{q} U_V^\dagger & \text{mit} & U_V = e^{i\alpha T_i^f} , \\ q &\rightarrow U_A q & \bar{q} &\rightarrow \bar{q} U_A & \text{mit} & U_A = e^{i\beta T_i^f \gamma_5} , \end{aligned} \quad (2.12)$$

mit den Transformationsparametern α_i, β_i , sind. Die Summation über den Index i in den Gln. (2.11) und (2.12) erstreckt sich von $i = 0$ bis $i = N_f^2 - 1$. Die T_i^f sind dabei die Erzeugenden der Flavour-Gruppe, worauf das hochgestellte "f" hinweisen soll. Es gilt $T_0^f = \sqrt{1/2N_f} I_f$ mit der Einheitsmatrix I_f im Flavour-Raum. Die Quarkstrommassen-Matrix m ist diagonal im Flavour-Raum $m = \text{diag}\{m_u, m_d, \dots\}$. Die erste Summe in Gl. (2.11) enthält die Quadrate von skalaren und pseudoskalaren Bilinearkombinationen der Quarkfelder und die zweite Summe enthält die vektoriellen und axialvektoriellen Terme.

Zu den Wechselwirkungstermen in Gl. (2.11) gelangt man auch, wenn von einer Farbstrom-Farbstrom-Wechselwirkung proportional zu $j_a^\alpha j_a^\mu$ ausgegangen wird [29]. Dabei ist j_a^μ ein Farb-Oktett-Flavour-Singulett Strom gegeben durch

$$j_a^\mu = \bar{q} T_a \gamma^\mu q, \quad (2.13)$$

mit den T_a als Erzeuger der $SU(N_c)$ -Farb-Gruppe. Man muß dazu eine Fierz-Transformation im Dirac-, Flavour- und Farb-Raum durchführen und sich dann auf die Farb-Singulett Terme beschränken [30].

Eine weitere Motivation für die obige effektive Lagrange-Dichte kommt von den Instanton-Modellen der QCD [31–33]. Instantonen sind räumlich und zeitlich lokalisierte Lösungen der "klassischen" nichtabelschen Yang-Mills-Theorie ohne Quarks in der euklidischen Raum-Zeit, die einem lokalen Minimum der euklidischen Wirkung entsprechen. Diese nicht-störungstheoretischen Konfigurationen beschreiben Tunnelprozesse. Anstatt der Quark-Gluon-Wechselwirkung kann man dann Quarks betrachten, die sich in einem Hintergrund von Instanton-Antiinstantonen bewegen. Eine sehr anschauliche Beschreibung dieser Prozesse findet man in [34]. Mittelt man über das Instanton-Antiinstanton-Ensemble, so bleibt eine effektive Quarktheorie mit einer 4-Fermion-Wechselwirkung übrig.

Von t'Hooft [35, 36] ist gezeigt worden, daß die Instantoneffekte die $U_A(1)$ -Symmetrie brechen. Dies ist ein Beispiel für eine Symmetriebrechung durch Quanteneffekte, welche als Anomalie bezeichnet wird. Will man diese Symmetriebrechung schon auf dem Niveau der Lagrange-Dichte realisieren, so schafft man dies mit einem Zusatzterm [35, 36]

$$\mathcal{L}_A = G_A \{ \det [\bar{q}_i (1 + \gamma_5) q_j] + \det [\bar{q}_i (1 - \gamma_5) q_j] \}, \quad (2.14)$$

wobei die Determinante bezüglich der Flavourindizes i, j der Quarkfelder zu nehmen ist. Beschränkt man sich auf nur zwei Quark-Flavour, so kann man Gl. (2.14) mit Hilfe der Isospin-Matrizen schreiben als [37]

$$\mathcal{L}_A = \frac{G_A}{2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\tau q)^2 - (\bar{q}\tau q)^2 - (\bar{q}i\gamma_5 q)^2]. \quad (2.15)$$

Dieser Term wird bei der Konstruktion der NJL-Lagrange-Dichte berücksichtigt. Die chirale Anomalie hängt auch mit der Nichtinvarianz des Funktionalintegralmaßes zusammen [38]. Grundlegende Größe in einer quantisierten Feldtheorie ist das erzeugende Funktional. Benutzen wir zur Quantisierung der Feldtheorie den Pfadintegralformalismus, so ergibt sich das erzeugende Funktional durch die Abintegration über die Felder und deren kanonischen Feldimpulse. Als Symmetrieforderung muß man nun die Invarianz des

erzeugenden Funktionals betrachten und nicht die Invarianz der Wirkung wie im klassischen Fall. Dabei entsteht bei der Transformation des Funktionalmaßes eine Jacobi-Determinante ($\mathcal{D}q^\dagger \mathcal{D}q \rightarrow \mathcal{D}q'^\dagger \mathcal{D}q' = J \mathcal{D}q^\dagger \mathcal{D}q$). Ist nun $J \neq 1$ so spricht man von einer Anomalie, und bei der Berechnung der Divergenz von Strömen können zusätzliche Terme auftreten, die klassisch nicht vorhanden sind, da in der klassischen Feldtheorie ja nicht über alle möglichen Feldkonfigurationen integriert wird, sondern nur die Felder betrachtet werden, die den Euler-Lagrange-Gleichungen genügen.

Beschränkt man sich auf die u- und d-Quarks und verzichtet auf die vektoriellen Wechselwirkungsterme der effektiven Lagrange-Dichte in Gl. (2.11), d.h. in einer entsprechenden mesonischen Theorie (siehe auch Kapitel 3.1) vernachlässigt man Vektor- und Axialvektormesonen, so ergibt sich nach Addition des $U_A(1)$ brechenden Terms (Gl. (2.15)) und der Annahme $G_1 = G_A$

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q + \frac{G}{2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \tau q)^2] . \quad (2.16)$$

Das ist die im folgenden benutzte NJL-Lagrange-Dichte [9,10] mit einer chiral invarianten 4-Quark-Punktwechselwirkung. Die Quarkfelder $q(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix}$ sind zweikomponentige Spinoren im Flavour-Raum und u, d sind jeweils vierkomponentige Dirac-Spinoren mit $N_c=3$ Farb-Freiheitsgraden. Weiterhin machen wir keinen Unterschied zwischen den (im Vergleich zur Nukleonen-Masse $\simeq 1$ GeV ohnehin kleinen) Quarkstrommassen der u- und d-Quarks $m_u = m_d = m$. Die 4-Fermion-Kopplungskonstante G wird im von uns betrachteten Niederenergiebereich als impulsunabhängig angenommen und wird später über den Pionzerfall empirisch bestimmt, da sie aufgrund der starken Kopplung nicht direkt aus der QCD abgeleitet werden kann. Sie hat die Dimension E^{-2} und liegt, nach den Ausführungen über effektive Niederenergie-theorien, in der Größenordnung $\Lambda_{\text{QCD}}^{-2}$.

Neben der Lorentz-Invarianz der Lagrange-Dichte (Gl. (2.16)) bleibt diese auch invariant bei einer globalen Phasentransformation $U_V(1)$ und einer globalen chiralen Symmetrietransformation im Flavour-Raum $SU_V(2) \times SU_A(2)$

$$\begin{aligned} U_V(1) : q &\rightarrow q' = e^{i\phi} q , \\ SU_V(2) : q &\rightarrow q' = e^{i\alpha\tau/2} q , \\ SU_A(2) : q &\rightarrow q' = e^{i\gamma_5\beta\tau/2} q \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit beliebigen Transformationsparametern ϕ , α , β und den Pauli-Matrizen τ als Erzeuger der $SU(2)$ -Flavour-Gruppe, welche die Isospin-Gruppe ist. Der Term mit der aus u- und d-Quark gemittelten Quarkstrommasse m in der Lagrange-Dichte (Gl. (2.16)) bricht die $SU_A(2)$ -Symmetrie explizit, so daß diese Symmetrie exakt nur im Fall $m = 0$ gegeben ist. Da der Quarkstrommassen-Term im Vergleich zur Wechselwirkungsenergie aber klein ist, ist diese Symmetrie nur wenig gestört. Das Noether-Theorem führt auf klassischem Niveau zu folgenden erhaltenen Strömen

$$\begin{aligned} U_V(1) : \partial^\mu B_\mu &= 0 , \\ SU_V(2) : \partial^\mu \mathbf{V}_\mu &= 0 , \\ SU_A(2) : \partial^\mu \mathbf{A}_\mu &= -m \bar{q} i\gamma_5 \tau q \xrightarrow{m \rightarrow 0} 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

mit dem isoskalaren Baryon-Strom B_μ (bis auf einen Faktor $1/N_c$), dem Isektor-Strom V_μ und dem Isektor-Axialstrom A_μ

$$\begin{aligned} B_\mu &= \bar{q} \gamma_\mu q, \\ V_\mu &= \bar{q} \gamma_\mu \frac{\tau}{2} q, \\ A_\mu &= \bar{q} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{\tau}{2} q. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Nach dem Noether-Theorem ist das Volumenintegral über die nullte Komponente der Ströme eine Erhaltungsgröße, was letztendlich die Erhaltung der Baryonenzahl, des Isospins und die (partielle) Erhaltung der Isospin-Axialladung zum Ausdruck bringt.

3 Quantenfeldtheorie bei endlicher Temperatur und Dichte

Ausgangsgröße für die Behandlung von thermodynamischen Eigenschaften von Quantenfeldern ist die thermodynamische Zustandfunktion. Dies ist die analoge Größe zur Vakuum \rightarrow Vakuum-Übergangsamplitude in der üblichen Quantenfeldtheorie. In Kapitel 3.1 werden die Schritte angegeben, wie man aus der Lagrange-Dichte die Zustandfunktion berechnet. Dabei wird die Pfadintegral-Formulierung benutzt. Die Idee der effektiven Wirkung wird in Abschnitt 3.2 vermittelt. In Kapitel 3.3 wird die von uns später genutzte Näherung des mittleren Feldes behandelt, und in Kapitel 3.4 wird in diesem Zusammenhang die thermische Green-Funktion für Quarks im klassischen äußeren Feld angegeben.

3.1 Zustandfunktion, Großkanonisches Potential

Um thermodynamische Eigenschaften von Quantenfeldern zu beschreiben, nutzen wir den Formalismus imaginärer Zeiten, auch Matsubara-Formalismus genannt [39–41]. Er beruht auf einer formalen Analogie zwischen der Quantenfeldtheorie im Euklidischen Raum und der Quantenstatistik. Physikalisch sind das unterschiedliche Situationen, die sich aber durch den Funktionalintegralzugang rein technisch sehr ähnlich beschreiben lassen.

Wir betrachten ein großkanonisches Ensemble von u- und d-Quarks mit dem chemischen Potential $\mu_u = \mu_d = \mu$ (isospin-symmetrische Quarkmaterie) bei der Temperatur T . Grundlegende Größe zur Berechnung von thermodynamischen Eigenschaften ist die großkanonische Zustandfunktion

$$\mathcal{Z}(T, \mu, V) = \text{Spe}^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/T}$$

$$= \int_{\text{antip.}} \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}q \exp \left\{ - \int_0^{1/T} d\tau \int_V d^3r \left[-i\pi \frac{\partial q}{\partial \tau} + \mathcal{H}(\pi, q) - \mu \mathcal{N}(\pi, q) \right] \right\} \quad (3.1)$$

mit den formalen Differentialen $\mathcal{D}q = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \prod_r dq(\mathbf{r}, \tau_i)$ und $\mathcal{D}\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \prod_r \frac{d\pi(\mathbf{r}, \tau_i)}{2\pi}$, $\tau_n - \tau_1 = 1/T$. In der ersten Zeile der obigen Gleichung sind $\hat{H}(\hat{\pi}, \hat{q})$ und $\hat{N}(\hat{\pi}, \hat{q})$ die feldquantisierten (zweitquantisierten) Hamilton- bzw. Teilchenzahl-Operatoren. \hat{q} , $\hat{\pi}$ sind dabei die Feld- bzw. kanonischen Feldimpulsoperatoren. Den Operator $e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/T}$ kann man als "Zeitentwicklungsoperator" in Analogie zu $e^{-i\hat{H}(t_1 - t_0)}$ der üblichen QFT mit den imaginären "Zeiten" $t_0 = 0$, $t_1 = -i/T$ auffassen. In der zweiten Zeile von Gl. (3.1) ist die Zustandsfunktion durch ein Pfadintegral ausgedrückt. In diesem Formalismus sind die Quarkfelder antivertauschende komplexe Grassmann-Variablen¹ und genügen der antiperiodischen Randbedingung zu den reellen euklidischen Zeiten ($\tau = it$) $\tau=0$ und $\tau=1/T$: $q(\mathbf{r}, \tau=1/T) = -q(\mathbf{r}, \tau=0)$. Thermodynamik von Quantenfeldern beinhaltet sowohl die Quantisierung der klassischen Feldtheorie als auch die Quantenstatistik mit dieser dann quantisierten Feldtheorie. Diese zwei Aspekte sind kompakt in dem Phasenraumintegral (Gl. (3.1)) enthalten. Es ermöglicht die Beschreibung von Quantenfluktuationen, die auch bei verschwindender Temperatur vorhanden sind (übliche QFT), als auch thermischer Fluktuationen.

Für unsere Lagrange-Dichte (Gl. (2.16)) gilt $\pi = iq^\dagger$ und wir erhalten für die Zustandsfunktion (Gl. (3.1))

$$\mathcal{Z}(T, \mu, V) = \int \mathcal{D}q^\dagger \mathcal{D}q e^{-\mathcal{A}[q^\dagger, q](T, \mu, V)} \quad (3.2)$$

mit

$$\mathcal{A}[q^\dagger, q](T, \mu, V) = \int_0^{1/T} d\tau \int_V d^3r \left\{ q^\dagger (\partial_\tau + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m - \mu) q - \frac{G}{2} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \tau q)^2] \right\}, \quad (3.3)$$

wobei $\mathbf{p} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ ist. Da das Integrationsvolumen V in unserer Betrachtung stets das gleiche sein soll, unterdrücken wir in den folgenden Gleichungen die Abhängigkeit von V .

Das großkanonische Potential ist definiert als

$$\Omega(T, \mu) = -T \ln \mathcal{Z}(T, \mu), \quad (3.4)$$

und die mittlere Teilchenzahl N und Entropie S sind gegeben durch

$$N = -\frac{\partial}{\partial \mu} \Omega(T, \mu), \quad S = -\frac{\partial}{\partial T} \Omega(T, \mu). \quad (3.5)$$

Die freie Energie F erhält man aus dem großkanonischen Potential durch eine Legendre-Transformation, bei der das chemische Potential durch die Teilchenzahl ausgedrückt wird

$$F(T, N) = \left[1 - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \Omega(T, \mu) \Big|_{\mu=\mu(T, N)}. \quad (3.6)$$

¹Dies ist notwendig, um die Resultate des Operator-Formalismus zu reproduzieren, bei dem die Quark-Feldoperatoren den Antivertauschungsrelationen genügen.

Die mittlere innere Energie E erhält man durch eine weitere Legendre-Transformation, bei der die Temperatur durch die Entropie ersetzt wird

$$E(S, N) = \left[1 - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - T \frac{\partial}{\partial T} \right] \Omega(T, \mu) \Bigg|_{\substack{\mu = \mu(S, N) \\ T = T(S, N)}} \quad (3.7)$$

Der Wechselwirkungsterm der Wirkung (Gl. (3.3)) enthält Terme, die eine Abintegration über die Quarkfelder und deren kanonischen Feldimpulse in geschlossener Form unmöglich machen (kein "Gauß-Integral" für die Grassmann-Variablen q, q^\dagger). Um diese Terme zu eliminieren, was uns dann die Ausintegration der Quarkfelder erlaubt, multiplizieren wir \mathcal{Z} mit einer Konstanten, die wir als Gauß-Integral über bosonische Hilfsfelder, die keine kinetischen Terme enthalten, einführen

$$K = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi e^{-\frac{1}{2G} \int_0^{1/T} d\tau \int d^3r [(\sigma + G \bar{q}q - m)^2 + (\pi + G \bar{q}i\gamma_5 \tau q)^2]} \quad (3.8)$$

Dies ist die Pfadintegralversion einer Hubbard-Stratonovich-Transformation [42–46] bei Verwendung von Feldoperatoren. Aufgrund der Integrationsgrenze $1/T$ bei der Integration über die euklidische Zeit τ ist K temperaturabhängig, was später nach geeigneter Normierung keine Rolle spielen wird. Die Zustandfunktion ist nun gegeben durch

$$\mathcal{Z}(T, \mu) = \int \frac{\mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi}{K} e^{-\mathcal{A}^m[\sigma, \pi]} \int \mathcal{D}q^\dagger \mathcal{D}q e^{-\int_0^{1/T} d\tau \int d^3r [q^\dagger (\partial_\tau + h(\sigma, \pi) - \mu) q]} \quad (3.9)$$

mit dem rein mesonischen Anteil an der Wirkung

$$\mathcal{A}^m[\sigma, \pi] = \frac{1}{2G} \int_0^{1/T} d\tau \int d^3r [(\sigma - m)^2 + \pi^2] \quad (3.10)$$

h ist der Hamilton-Operator in erster Quantisierung, der nun die Hilfsfelder enthält

$$h = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta (\sigma + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5) \quad (3.11)$$

Die Selbstwechselwirkung der Quarks ist durch eine Wechselwirkung der Quarks mit den Hilfsfeldern ersetzt. Durch diesen Trick kann man nun in Gl. (3.9) die Quarkfelder ausintegrieren² und erhält

$$\mathcal{Z}(T, \mu) = \int \frac{\mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi}{K} e^{-\mathcal{A}^m[\sigma, \pi]} \cdot \det [\partial_\tau + h(\sigma, \pi) - \mu] \quad (3.12)$$

²Für komplexe antivertauschende Variablen η, η^* mit $\eta = (\xi_1 + i\xi_2)/\sqrt{2}$ und $\eta^* = (\xi_1 - i\xi_2)/\sqrt{2}$ mit reellwertigen antivertauschenden Variablen ξ_1, ξ_2 und den definierten Integralen $\int d\eta \eta = \int d\eta^* \eta^* = 1$ sowie $\int d\eta = \int d\eta^* = \int d\eta \eta^* = \int d\eta^* \eta = 0$ gilt $\int \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \exp(-\int dx dy \eta^*(x) g(x, y) \eta(y)) = \det g$ mit $\mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta = \prod_x (d\eta^*(x) d\eta(x))$.

Um die Quarkfelder herausintegrieren zu können, hat man neue Freiheitsgrade, ein isoskalares-skalares (σ) und isovektorielle-pseudoskalare (π) Felder, eingeführt. Aufgrund der zuvor genannten Gründe werden wir die feldunabhängige Konstante K im folgenden weglassen. Gleichung (3.12) definiert uns eine effektive mesonische Theorie mit der Zustandsfunktion

$$\mathcal{Z}(T, \mu) = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\pi e^{-\mathcal{A}'[\sigma, \pi]} \quad (3.13)$$

und der mesonischen Wirkung

$$\mathcal{A}'[\sigma, \pi] = -\ln \det [\partial_\tau + h(\sigma, \pi) - \mu] + \mathcal{A}^m[\sigma, \pi]. \quad (3.14)$$

Sie besteht aus der sogenannten Quark-Determinante, die funktional von den mesonischen Feldern abhängt, und aus der klassischen Wirkung (Gl. (3.10)) der mesonischen Felder.

3.2 Konzept der effektiven Wirkung

Die Idee der effektiven Wirkung [47, 48] besteht darin, aus der Quantentheorie, wie sie z. B. durch Gl. (3.13) gegeben ist, eine effektive klassische Theorie für die Erwartungswerte der Quantenfelder $\hat{\sigma}$, $\hat{\pi}$ zu machen. Zur Abkürzung wählen wir ab jetzt die kompakte Schreibweise $\phi_a = (\sigma, \pi)$ mit $a = 0, 1, 2, 3$, $x = (r, \tau)$ und $\int d^4x = \int_0^{1/T} d\tau \int d^3r$. Die thermischen Erwartungswerte seien dann $\bar{\phi}_a = (\bar{\sigma}, \bar{\pi})$. Sie sind im Pfadintegral-Formalismus gegeben durch

$$\bar{\phi}_a(x) \equiv \langle \hat{\phi}_a(x) \rangle = \mathcal{Z}^{-1} \int \mathcal{D}\phi_b \phi_a(x) \exp(-\mathcal{A}'[\phi_b]) \quad (3.15)$$

bzw. bei Ankopplung äußerer klassischer Quellen $j_a(x)$ für die einzelnen Felder $\phi_a(x)$

$$\bar{\phi}_a(x)[j_b] \equiv \bar{\phi}_a^j(x) = \mathcal{Z}[j_b]^{-1} \int \mathcal{D}\phi_b \phi_a(x) \exp(-\mathcal{A}'[\phi_b, j_b]) \quad (3.16)$$

mit

$$\mathcal{A}'[\phi_b, j_b] = \mathcal{A}'[\phi_b] + \int d^4x j_b(x) \phi_b(x) \quad (3.17)$$

und

$$\mathcal{Z}[j_b] = \int \mathcal{D}\phi_b \exp(-\mathcal{A}'[\phi_b, j_b]) \equiv \exp(-W[j_b]). \quad (3.18)$$

Ein Vergleich mit Gl. (3.4) zeigt, daß $W[j_b]$ bis auf den Faktor $1/T$ die Rolle des großkanonischen Potentials bei Anwesenheit von äußeren Quellen spielt. Aus den letzten beiden Beziehungen ist ersichtlich, daß sich der Erwartungswert der Felder bei Anwesenheit von äußeren Quellen auch schreiben läßt als

$$\bar{\phi}_a^j(x) = -\mathcal{Z}[j_b]^{-1} \frac{\delta \mathcal{Z}[j_b]}{\delta j_a(x)} = \frac{\delta W[j_b]}{\delta j_a(x)}. \quad (3.19)$$

Die Erwartungswerte in Gl. (3.15) ergeben sich aus der obigen Beziehung nach anschließendem Nullsetzen der Quellen. Diese Erwartungswerte der Quantenfelder genügen einer

Euler-Lagrange-Feldgleichung, die aus der Extremalisierung der sogenannten *effektiven Wirkung* $\Gamma[\bar{\phi}_a^j]$ folgt, die ein Funktional der Erwartungswerte der Felder ist. Das heißt

$$\frac{\delta\Gamma[\bar{\phi}_a^j]}{\delta\bar{\phi}_a^j(x)} = -j_a(x). \quad (3.20)$$

Die gesuchte effektive Wirkung ist gegeben durch eine funktionale Legendre-Transformation

$$\Gamma[\bar{\phi}_a^j] = W[j_b] - \int d^4x \bar{\phi}_b^j(x) j_b(x) \Big|_{j_b=j_b[\bar{\phi}_b^j]}. \quad (3.21)$$

Bildet man die funktionale Ableitung von der so definierten effektiven Wirkung nach $\bar{\phi}_a^j$, so kann man sich davon überzeugen, daß Gl. (3.20) erfüllt wird. Dabei muß man beachten, daß die Quellen j_b wegen Gl. (3.19) nun selber von den $\bar{\phi}_a^j$ abhängen.

Die so definierte Wirkung enthält die volle Information des quantenmechanischen Systems, da W in Gl. (3.18) die komplette Ausintegration über die Felder enthält. In dieser Allgemeinheit ist Γ nicht berechenbar, und man muß Näherungen durchführen.

3.3 Die Näherung des mittleren Feldes

Die Näherung des mittleren Feldes erhält man durch eine Sattelpunktsnäherung (semiklassische Näherung) in Gl. (3.18) bezüglich der ϕ_a Felder, d. h. an Stelle der Abintegration über alle möglichen Felder nehmen wir nur den Integranden mit den ϕ_a^{cl} Feldern, die die Wirkung \mathcal{A}' minimieren. Bei verschwindenden Quellen ist dann die Zustandssumme in Gl. (3.18) in dieser mittleren Feldnäherung (MFA) gegeben durch $\mathcal{Z}_{\text{MFA}} \approx \exp(-\mathcal{A}'[\phi_a^{\text{cl}}])$. und bei verschwindenden Quellen gilt $\mathcal{A}'[\phi_a^{\text{cl}}] = W_{\text{MFA}} = \Gamma_{\text{MFA}}$, und wegen Gl. (3.4) sind die Feldgleichungen (Gl. (3.20)) dann äquivalent zur Minimierung des großkanonischen Potentials

$$\Omega_{\text{MFA}} = -T \ln \mathcal{Z}_{\text{MFA}} = T \mathcal{A}'[\phi_a^{\text{cl}}], \quad (3.22)$$

wobei die ϕ_a^{cl} der Feldgleichung

$$\frac{\delta\Omega_{\text{MFA}}[\phi_b^{\text{cl}}]}{\delta\phi_a^{\text{cl}}(x)} = 0 \quad (3.23)$$

genügen, was mit Gln. (3.10) und (3.14) auf ³

$$\phi_a^{\text{cl}}(x) = m\delta_{0a} + GT \text{Sp} \left[\partial_{\tau'} + h(\phi_b^{\text{cl}}(x')) - \mu \right]^{-1} \frac{\delta h(\phi_b^{\text{cl}}(x'))}{\delta\phi_a^{\text{cl}}(x)} \quad (3.24)$$

führt. Die Quarkdeterminante in Ω_{MFA} enthält Divergenzen und die obigen Gleichungen, einschließlich der Feldgleichungen für die mittleren Felder $\phi_a^{\text{cl}}(x)$, erhalten erst nach einer Regularisierung einen Sinn.

³ $\delta \ln \det B = \ln \det(B + \delta B) - \ln \det B$ und Formel (E.18) aus dem Anhang bis zur ersten Ordnung in δB führt auf $\delta \ln \det B = \text{Sp} B^{-1} \delta B$.

Die Spur in Gl. (3.24) enthält dabei nur die Integration über die Quarkfelder und besteht aus einer funktionalen Spur (Raum-Zeit-Integration in Ortsdarstellung), sowie aus der Spur tr über die Dirac-, Isospin- und Farb-Matrizen

$$\text{Sp } o = N_c \int_0^{1/T} d\tau \int d^3\mathbf{r} \text{tr}_{\gamma\tau} \langle \mathbf{r}, \tau | o | \mathbf{r}, \tau \rangle . \quad (3.25)$$

Da wir nur Farb-diagonale Operatoren betrachten, wird die Spur über den Farb-Freiheitsgrad gleich als Faktor N_c herausgezogen. Die Spur über die Dirac-Matrizen und über die Isospin-Matrizen berücksichtigt Teilchen, Antiteilchen und Spin-Freiheitsgrade der u- und d-Quarks. Der Einfachheit wegen verzichten wir im folgenden immer auf den Index "cl" und "MFA" und vereinbaren, daß mit ϕ_a nun immer die mittleren Felder aus Gl. (3.24) gemeint sind.

Da unser Formalismus das thermodynamische Gleichgewicht zur Voraussetzung hat, müßte eine mögliche Zeitabhängigkeit der ϕ_a Felder langsam gegenüber derjenigen Zeit sein, die das System benötigt, um ins thermodynamische Gleichgewicht zu gelangen. Im folgenden verzichten wir auf diese Möglichkeit und betrachten zeitunabhängige aber im allgemeinen ortsabhängige ϕ_a Felder und damit wegen Gl. (3.11) auch einen zeitunabhängigen Quark-Hamilton-Operator. Das bedeutet, wir beschreiben ein zeittranslationsinvariantes System und werden im folgenden mit den Energieeigenzuständen (-werten) des Einteilchen-Quark-Hamilton-Operators h – günstig der Raum-Zeit-Symmetrie des Problems angepaßt – arbeiten. Für die Spur eines Einteilchen-Operators o ist dann die folgende Darstellung günstig

$$\text{Sp } o = N_c \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \alpha, n | o | \alpha, n \rangle \quad (3.26)$$

mit

$$\begin{aligned} h | \alpha, n \rangle &= \varepsilon_{\alpha} | \alpha, n \rangle , \\ \frac{\partial}{\partial \tau} | \alpha, n \rangle &= -i\omega_n | \alpha, n \rangle . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die zeitabhängigen Einteilchenzustände $|\alpha n\rangle$ sind dabei in Ortsdarstellung gegeben zu

$$\langle \mathbf{r}, \tau | \alpha, n \rangle = \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1/T}} e^{-i\omega_n \tau} = \langle \mathbf{r} | \alpha \rangle \cdot \langle \tau | n \rangle \quad (3.28)$$

und erfüllen die antiperiodische Randbedingung $\langle \mathbf{r}, \tau=0 | \alpha, n \rangle = - \langle \mathbf{r}, \tau=1/T | \alpha, n \rangle$ mit den ungeraden Matsubara-Frequenzen $\omega_n = (2n+1)\pi T$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Die Φ_{α} sind die auf das Volumen normierten Einteilchen-Energieeigenfunktionen (Spinoren im $\gamma \otimes \tau$ Raum)

$$\int d^3\mathbf{r} \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Phi_{\alpha'}(\mathbf{r}) = \delta_{\alpha\alpha'} , \quad (3.29)$$

und die Normierung in Gl. (3.28) ist so gewählt, daß gilt

$$\langle \alpha, n | \alpha', n' \rangle = \int_0^{1/T} d\tau \int d^3r \langle \alpha, n | \mathbf{r}, \tau \rangle \langle \mathbf{r}, \tau | \alpha', n' \rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{nn'}. \quad (3.30)$$

Da die betrachteten Operatoren unabhängig vom Farb-Freiheitsgrad sind, liefert die Summation über alle Farben den Entartungsfaktor N_c , den wir explizit angeben. Eine Summe \sum_α über alle Eigenzustände des Operators o schließt dann den Farbfreiheitsgrad nicht mehr ein.

3.4 Thermische Green-Funktion für Quarks im klassischen äußeren Feld

Das zeitunabhängige mittlere Feld kann man als ein statisches äußeres Feld auffassen in dem sich die Quarks bewegen. Es ist dann möglich die Green-Funktion durch die Energieeigenwerte und Energieeigenfunktionen des Einteilchenproblems (Lösung der Dirac-Gleichung mit äußerem Feld $\phi_a(\mathbf{r})$) auszudrücken. Im folgenden geben wir die Berechnung der Green-Funktion im Operator-Formalismus an.

Die Green-Funktion ist der thermische Erwartungswert des zeitgeordneten Produktes von Heisenberg-Feldoperatoren. Im imaginären Zeitformalismus benutzt man zweckmäßig die sogenannten Matsubara-Operatoren [39, 49]

$$\begin{aligned} \hat{q}(\mathbf{r}, \tau) &= e^{(\hat{H}-\mu\hat{N})\tau} \hat{q}(\mathbf{r}) e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})\tau}, \\ \tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}, \tau) &= e^{(\hat{H}-\mu\hat{N})\tau} \hat{q}^\dagger(\mathbf{r}) e^{-(\hat{H}-\mu\hat{N})\tau}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

mit dem zweitquantisierten Hamilton-Operator $\hat{H} = \int d^3r \hat{q}^\dagger(\mathbf{r}) h \hat{q}(\mathbf{r})$ und dem Teilchenzahloperator $\hat{N} = \int d^3r \hat{q}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{q}(\mathbf{r})$, deren Schrödinger- und Heisenberg-Darstellung identisch sind. Gleichung (3.31) ist die analoge Beziehung zu den in der üblichen Quantenfeldtheorie benutzten Heisenberg-Feldoperatoren $\hat{q}(t, \mathbf{r}) = e^{i\hat{H}t} \hat{q}(\mathbf{r}) e^{-i\hat{H}t}$ ⁴. Die Matsubara-Operatoren erfüllen bei gleichen Zeitargumenten dieselben Antivertauschungsrelationen wie die Schrödinger-Feldoperatoren $\hat{q}(\mathbf{r})$ und $\hat{q}^\dagger(\mathbf{r})$

$$\{\hat{q}(\mathbf{r}', \tau), \tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}, \tau)\} = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad \{\hat{q}(\mathbf{r}', \tau), \hat{q}(\mathbf{r}, \tau)\} = \{\tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}', \tau), \tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}, \tau)\} = 0. \quad (3.32)$$

Da τ reell ist, gilt im allgemeinen $\tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}, \tau) \neq (\hat{q}(\mathbf{r}, \tau))^\dagger$ – aus diesem Grunde die etwas ungewöhnliche Bezeichnung. Die temperaturabhängige Green-Funktion ist in Analogie zur üblichen Green-Funktion definiert durch den thermischen Erwartungswert des zeitgeordneten Produktes von Matsubara-Operatoren

$$\begin{aligned} G_{ik}(\mathbf{r}', \tau'; \mathbf{r}, \tau) &\equiv -\langle T_\tau \hat{q}_i(\mathbf{r}', \tau') \tilde{\hat{q}}_k(\mathbf{r}, \tau) \rangle \\ &= -\langle \hat{q}_i(\mathbf{r}', \tau') \tilde{\hat{q}}_k(\mathbf{r}, \tau) \rangle \Theta(\tau' - \tau) + \langle \tilde{\hat{q}}_k(\mathbf{r}, \tau) \hat{q}_i(\mathbf{r}', \tau') \rangle \Theta(\tau - \tau') \end{aligned} \quad (3.33)$$

⁴Der Hamilton-Operator \hat{H} ist hier auf dem Meanfield-Niveau und enthält nur die Wechselwirkung der Quarks mit den mesonischen Feldern und ist damit keinesfalls der volle Operator des Ausgangsproblems mit der komplizierten Quark-Selbstwechselwirkung. Insofern handelt es sich in Gl. (3.31) nicht um die eigentlichen Heisenberg-Feldoperatoren. Die so definierten Operatoren berücksichtigen das äußere Feld in "nullter" Näherung, man spricht auch vom Furry-Bild [50].

mit dem Zeitordnungsoperator T_τ für euklidische Zeiten, und i, k sind Dirac- und Isospinindizes. Der thermische Erwartungswert kann berechnet werden zu

$$\mathcal{G}_{ik}(\mathbf{r}', \tau'; \mathbf{r}, \tau) = -e^{\Omega^q/T} \text{Sp} \left[\hat{\rho} T_\tau \hat{q}_i(\mathbf{r}', \tau') \tilde{\hat{q}}_k(\mathbf{r}, \tau) \right] \quad \text{mit } \hat{\rho} = e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/T}. \quad (3.34)$$

Hier ist Ω^q der Anteil am großkanonischen Potential, der von der Quark-Determinante stammt $\Omega^q = -T \ln \det(\partial_\tau + h - \mu)$. Der mesonische Anteil (Gl. (3.10)) liefert selber keinen Beitrag zum Erwartungswert der Quarkfelder (siehe auch Kapitel 4.3). Setzt man nun Gl. (3.31) in die obige Beziehung ein und nutzt die Invarianz der Spur gegenüber zyklischem Vertauschen, so kann man zeigen, daß die Green-Funktion nur von der Zeitdifferenz $\tau' - \tau$ abhängt, die im folgenden mit η bezeichnet wird. Es ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Green-Funktion bei $\eta < 0$ und $\eta > 0$ mit $-1/T \leq \eta \leq 1/T$

$$\mathcal{G}_{ik}(\eta; \mathbf{r}', \mathbf{r}) = -\mathcal{G}_{ik}(\eta + 1/T; \mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad \text{mit } \eta < 0, \quad (3.35)$$

wobei das Zeitargument der Green-Funktion auf der rechten Seite positiv ist. Da wir die Quarks in einem ortsabhängigen äußeren Feld betrachten, hängt \mathcal{G} von den Argumenten \mathbf{r}' und \mathbf{r} einzeln ab und nicht nur von der Differenz $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$. \mathcal{G} kann in eine Fourier-Reihe entwickelt werden

$$\mathcal{G}_{ik}(\eta; \mathbf{r}', \mathbf{r}) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{ik}(\omega_n; \mathbf{r}', \mathbf{r}) e^{-i\omega_n \eta}, \quad (3.36)$$

und $\mathcal{G}_{ik}(\omega_n; \mathbf{r}', \mathbf{r})$ ist nun durch die Lösungen des Einteilchenproblems darstellbar. Dazu bemerken wir, daß aus Gl. (3.31), für nicht von τ abhängige Operatoren \hat{H} und \hat{N} , die zu den sonst üblichen Heisenberg-Bewegungsgleichungen analogen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{q}(\mathbf{r}, \tau) = [\hat{H} - \mu \hat{N}, \hat{q}(\mathbf{r}, \tau)] \quad (3.37)$$

folgen. Mit Hilfe der Kommutatoridentität

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B, \quad (3.38)$$

der Zuordnung $A = \tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}', \tau)$, $B = (h_{\mathbf{r}'} - \mu)\hat{q}(\mathbf{r}', \tau)$ und $C = \hat{q}(\mathbf{r}, \tau)$ und den Antivertauschungsrelationen für die Quark-Feldoperatoren zu gleichen Zeiten (Gl. (3.32)), ergibt sich aus der Beziehung (3.37)

$$(\partial_\tau + h_{\mathbf{r}} - \mu)\hat{q}(\mathbf{r}, \tau) = 0, \quad (3.39)$$

d. h. $\hat{q}(\mathbf{r}, \tau)$ gehorcht auf Operatorniveau der Dirac-Gleichung mit chemischen Potential. Bilden wir nun die Zeitableitung des zeitgeordneten Produktes von Feldoperatoren, so ergibt sich

$$\partial_\tau T_\tau \hat{q}(\mathbf{r}', \tau') \tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}, \tau) = T_\tau \partial_\tau \hat{q}(\mathbf{r}', \tau') \tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}, \tau) + \delta_T(\tau' - \tau) \left\{ \hat{q}(\mathbf{r}', \tau'), \tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}, \tau) \right\}. \quad (3.40)$$

Der Term mit der δ_T -Funktion, die die Normierung $\int_0^{1/T} d\tau \delta_T(\tau) = 1$ erfüllt, entsteht durch die Ableitung der Θ -Funktionen, die die Zeitordnung sichern. Für die Zeitableitung des

Feldoperators setzen wir nun Gleichung (3.39) ein, bringen den Term auf die linke Seite und erhalten die Operatorgleichung

$$(\partial_{\tau'} + h_{\mathbf{r}'} - \mu) T_{\tau} \hat{q}(\mathbf{r}', \tau') \tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}, \tau) = \delta_T(\tau' - \tau) \{ \hat{q}(\mathbf{r}', \tau'), \tilde{\hat{q}}(\mathbf{r}, \tau) \}. \quad (3.41)$$

Für $\tau' \neq \tau$ verschwindet die rechte Seite und für $\tau' \rightarrow \tau$ können wir den Antikommutator zu gleichen Zeiten (Gl. (3.32)) einsetzen. Mit unserer Definition der Green-Funktion in Gl. (3.33) ergibt sich nach Mittelung der letzten Gleichung

$$(\partial_{\tau'} + h_{\mathbf{r}'} - \mu) \mathcal{G}(\mathbf{r}', \tau'; \mathbf{r}, \tau) = -\delta_T(\tau' - \tau) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}). \quad (3.42)$$

Die δ -Funktionen auf der rechten Seite drücken wir nun mit Hilfe der Eigenfunktionen der Operatoren ∂_{τ} und $h_{\mathbf{r}}$ aus. Mit Hilfe von Gl. (3.28) erhalten wir

$$\begin{aligned} \delta_T(\tau' - \tau) &= \langle \tau' | \tau \rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle \tau' | n \rangle \langle n | \tau \rangle = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_n(\tau' - \tau)}, \\ \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) &= \langle \mathbf{r}' | \mathbf{r} \rangle = \sum_{\alpha} \langle \mathbf{r}' | \alpha \rangle \langle \alpha | \mathbf{r} \rangle = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}') \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.43)$$

Setzen wir dies in die rechte Seite von Gl. (3.42) ein und lassen den inversen Operator $(\partial_{\tau'} + h_{\mathbf{r}'} - \mu)^{-1}$ von links auf die Gleichung wirken, dann ergibt sich mit Gl. (3.27)

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}', \tau'; \mathbf{r}, \tau) = T N_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\alpha} \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_{\alpha} + \mu} \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}') \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n(\tau' - \tau)}. \quad (3.44)$$

Ein direkter Vergleich mit Gl. (3.36) und $\eta = \tau' - \tau$ liefert

$$\mathcal{G}_{ik}(\omega_n; \mathbf{r}', \mathbf{r}) = N_c \sum_{\alpha} \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_{\alpha} + \mu} \Phi_{\alpha,i}(\mathbf{r}') \Phi_{\alpha,k}^{\dagger}(\mathbf{r}). \quad (3.45)$$

Aus der Green-Funktion kann man die Teilchendichte $\rho(\mathbf{r}) = T \sum_{n,i} \mathcal{G}_{ii}(\omega_n; \mathbf{r}, \mathbf{r})$ bzw. nach Volumenintegration die Teilchenzahl N berechnen. Die Teilchenzahl über μ integriert liefert wegen Gl. (3.5) dann das großkanonische Potential. Die bei dieser Integration entstehende Integrationskonstante, die nicht von μ abhängt, muß dann noch bestimmt werden. Dabei muß man auch beachten, daß die mesonischen Felder $\phi_a(\mathbf{r})$ über Gl. (3.10) einen Beitrag zu den Energien liefern. Wir werden aber später bei der Berechnung der thermodynamischen Größen des Solitons direkt vom (regularisierten) großkanonischen Potential ausgehen.

4 Solitonische Feldkonfigurationen

Im folgenden betrachten wir ortsabhängige Felder $\phi_a(\mathbf{r})$, die einer Konfiguration mit endlicher Energie entsprechen und die sich nur in einem endlichen Raumgebiet von ihren konstanten asymptotischen Werten unterscheiden. Sie werden als *solitonische* Feldkonfigurationen bezeichnet. In Kapitel 4.1 wird ein spezieller Ansatz für die mesonischen Felder $\phi_a(\mathbf{r})$ erläutert (Hedgehog-Ansatz), für den solitonische Lösungen gefunden wurden. Kapitel 4.2 enthält die Formeln zur Berechnung der grundlegenden thermodynamischen Größen des Solitons. Hier werden das Problem der Regularisierung des großkanonischen Potentials behandelt und die nichtlinearen Feldgleichungen für die mesonischen Felder $\phi_a(\mathbf{r})$ abgeleitet. In Kapitel 4.3 werden Formeln zur Berechnung von Observablen des Solitons angegeben.

4.1 Hedgehog-Felder

Den ortsabhängigen mittleren Feldern werden im folgenden weitere einschränkende Bedingungen auferlegt. Durch "Hedgehog"-Ansatz, sphärische Symmetrie und chiralen Zirkel sind die mittleren Felder durch eine einzige Funktion, die nur vom Abstand zum Ursprung abhängt, bestimmt.

Der Hedgehog-Ansatz verknüpft die Richtung des isovektoriellen π -Feldes im Isospin-Raum mit dem Ortsvektor auf folgende Art

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r}) = \pi(r)\hat{\mathbf{r}}, \quad (4.1)$$

wobei $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ den Einheitsvektor im Ortsraum darstellt. Aufgrund der (lokalen) Isomorphie zwischen der SU(2)-Isospin-Gruppe und der SO(3)-Drehgruppe kann man das π -Feld als Vektor im dreidimensionalen Isospin-Raum auffassen. Der Ansatz (Gl. (4.1)) bedeutet, daß der Isospin am Ort \mathbf{r} stets in Richtung des Ortsvektors \mathbf{r} ausgerichtet ist.

Zusätzlich fordern wir sphärische Symmetrie der mittleren Mesonenfelder

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{r}) &= \sigma(r), \\ \pi(\mathbf{r}) &= \pi(r), \end{aligned} \quad (4.2)$$

mit $r = |\mathbf{r}|$. Hedgehog-Ansatz und sphärische Symmetrie der Mesonenfelder haben zur Folge, daß der Hamilton-Operator (Gl. (3.11)) mit dem Superspin

$$\mathbf{g} = (\mathbf{l} + \mathbf{s}) + \mathbf{t}, \quad (4.3)$$

der die Summe aus Bahndrehimpuls \mathbf{l} , Spin \mathbf{s} und Isospin \mathbf{t} der Quarks ist, und mit dem relativistischen Paritäts-Operator

$$\Pi = \gamma^0 P \quad (4.4)$$

vertauscht (siehe auch Anhang C)

$$[h, \mathbf{g}] = [h, \Pi] = [\Pi, \mathbf{g}] = 0. \quad (4.5)$$

Der nichtrelativistische Paritäts-Operator P ist definiert durch $P\phi(\mathbf{r}) = \phi(-\mathbf{r})$. Es gibt damit Quark-Einteilchenzustände mit definierter Energie, Superspin und Parität, und es liegt Entartung bezüglich der Projektion $m = -g, -g + 1, \dots, g - 1, g$ von \mathbf{g} vor.

Als letztes beschränken wir die Mesonenfelder auf den sogenannten chiralen Zirkel (nichtlineares Modell)

$$\sigma^2 + \pi^2 = \text{konst.} = \sigma_0^2. \quad (4.6)$$

Der chirale Zirkel wurde auch in einer Reihe von anderen Modellen (wie z. B. im chiralen Sigma-Modell von Gell-Mann und Levy [51] als Minimum des Mexikanerhut-Potentials) verwendet. In [52, 53] wurde gezeigt, daß ohne den chiralen Zirkel keine stabilen solitonischen Feldkonfigurationen im Vakuum existieren, so daß diese Bedingung von uns übernommen wurde.

Mit diesen Annahmen läßt sich der Einteilchen-Hamilton-Operator (Gl. (3.11)) darstellen als

$$h = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta \sigma_0 [\cos \theta(r) + i \hat{\mathbf{r}} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5 \sin \theta(r)] \quad (4.7)$$

mit dem sogenannten chiralen Winkel (Profil) $\theta(r)$, der nur vom Abstand zum Ursprung abhängt. σ_0 bestimmt als Amplitude der Hedgehog-Felder die "Potentialtiefe" der mittleren Felder, in denen sich die Quarks bewegen.

Jetzt müssen noch die Randbedingungen des chiralen Winkels festgelegt werden. Die Forderung nach Eindeutigkeit des π -Feldes am Ursprung führt auf die Bedingung $\pi(r=0) = 0$, was für den chiralen Winkel $\theta(r=0) = -n\pi$ bedeutet, wobei n eine ganze Zahl ist. Für große Entfernungen vom Ursprung fordern wir ein homogenes paritätsinvariantes Medium, d. h. das isovektorielle-pseudoskalare π -Feld muß verschwinden. Für das isoskalare-skalare σ -Feld lassen wir einen von Null verschiedenen asymptotischen Wert σ_0 zu, der die spontane chirale Symmetriebrechung realisiert. Zu diesem Zweck setzen wir

$$\theta(r \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.8)$$

Die Differenz

$$n = \frac{1}{\pi} [\theta(r \rightarrow \infty) - \theta(r = 0)] \quad (4.9)$$

bezeichnet man als Windungszahl des Hedgehog-Feldes. Zur Beschreibung von Nukleonen verwenden wir $n=1$, was zur Absenkung genau eines gebundenen Niveaus im Einteilchenspektrum der Quarks führt [12, 13]. Solitonen im Vakuum mit größerer Windungszahl wurden in [54] untersucht.

Neben einem ortsabhängigen chiralen Winkel betrachten wir den Quark-Hamilton-Operator für den homogenen Fall, den man mit $\theta \equiv 0$ aus Gl. (4.7) erhält

$$h_0 = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta \sigma_0. \quad (4.10)$$

Dieser homogene Zustand steht für eine effektiv freie Theorie von Quarks mit der *Konstituenten-Quarkmasse* σ_0 , die die elementaren Quarkanregungen im homogenen Medium beschreibt und zu einem Gap im Einteilchen-Energiespektrum der Quarks führt. Mehr dazu im Kapitel 6. Die Randbedingung, daß die mesonischen Felder asymptotisch gegen die Felder des homogenen Mediums gehen, ist typisch für *nicht-topologische* solitonische Feldkonfigurationen, in die sich das hier behandelte Modell einordnet.

4.2 Thermodynamische Größen des Solitons

Das Soliton wird in unserem Modell als eine lokalisierte Abweichung von der homogenen Feldkonfiguration des Mediums beschrieben, die von den im mittleren Feld gebundenen Valenzquarks erzeugt wird. Die Valenzquarks führen zu einer Polarisierung sowohl des Mediums als auch des Dirac-Sees. Diese Polarisierungseffekte werden in der Näherung des mittleren Feldes vollständig berücksichtigt, d. h. die Quark-Determinante wird exakt berechnet. Bei der Berechnung von Erwartungswerten des Solitons hat man einen eventuell von Null verschiedenen Erwartungswert des homogenen Mediums zu subtrahieren.

4.2.1 Großkanonisches Potential

Im folgenden geben wir die Ausdrücke für das großkanonische Potential, innere Energie, Entropie und Teilchenzahl für die solitonische Feldkonfiguration an. Dabei muß noch eine spezielle Regularisierung angegeben werden. Desweiteren werden die Valenzquarks, die das niedrigste abgesenkte positive Energieniveau der Quarks besetzten und zu einem gebundenen Zustand dieser Valenzquarks im Medium führen, gesondert behandelt.

Um eine kompakte Schreibweise zu ermöglichen, definieren wir die folgenden Einteilchen-Operatoren

$$D(\mu) = \partial_\tau + h - \mu, \quad (4.11)$$

$$D_0(\mu) = \partial_\tau + h_0 - \mu. \quad (4.12)$$

Es erweist sich als zweckmäßig, positiv definite hermitesche Operatoren einzuführen. Da die euklidische Zeit τ reell ist, ergibt sich für den Operator der Zeitableitung der antihermitesche Charakter $\partial_\tau^\dagger = -\partial_\tau$. Wegen der Hermitizität ($h^\dagger = h$) und Zeitunabhängigkeit ($[h, \partial_\tau] = 0$) der Quark-Hamilton-Operatoren gilt dann für die hermiteschen Operatoren $A(\mu)$ und $A_0(\mu)$

$$A(\mu) \equiv D(\mu)^\dagger D(\mu) = -\partial_\tau^2 + (h - \mu)^2, \quad (4.13)$$

$$A_0(\mu) \equiv D_0(\mu)^\dagger D_0(\mu) = -\partial_\tau^2 + (h_0 - \mu)^2. \quad (4.14)$$

Da wir im folgenden eine Zerlegung der Quark-Determinante in einen nicht explizit von der Temperatur und dem chemischen Potential abhängigen Anteil und einen explizit T , μ -abhängigen Anteil durchführen werden, benötigen wir die Spur eines Operators im Fall $(\mu, T) \rightarrow 0$, wobei die Summen über die diskreten Matsubara-Frequenzen durch eine Integration ersetzt werden ($\omega_n \rightarrow \omega$, $T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}$)

$$\lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp } o = N_c \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \langle \alpha, \omega | o | \alpha, \omega \rangle, \quad (4.15)$$

mit den zu Gln. (3.27) und (3.28) analogen Beziehungen

$$h | \alpha, \omega \rangle = \varepsilon_\alpha | \alpha, \omega \rangle,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \tau} |\alpha, \omega\rangle &= -i\omega |\alpha, \omega\rangle, \\ \langle \mathbf{r}, \tau | \alpha, \omega\rangle &= \Phi_\alpha(\mathbf{r}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega\tau} = \langle \mathbf{r} | \alpha\rangle \cdot \langle \tau | \omega\rangle\end{aligned}\quad (4.16)$$

mit der Normierung

$$\langle \alpha, \omega | \alpha', \omega'\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int d^3\mathbf{r} \langle \alpha, \omega | \mathbf{r}, \tau\rangle \langle \mathbf{r}, \tau | \alpha', \omega'\rangle = \delta_{\alpha\alpha'} \delta(\omega - \omega'). \quad (4.17)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (3.26) und (4.15) und dem Anhang B sind die im folgenden berechneten Ausdrücke nachrechenbar.

Wie im Kapitel 3.3 erläutert, ist das großkanonische Potential in MFA bezüglich der ϕ_a Felder gegeben durch die euklidische Wirkung in Gl. (3.14) und die Beziehung (3.22). Der erste Term auf der rechten Seite in Gl. (3.14) kommt von der Integration über die Quarkfelder. Der daraus resultierende Anteil am großkanonischen Potential wird im folgenden mit Ω^q bezeichnet. Nach Subtraktion des entsprechenden Anteils im Potential des homogenen Systems ist dieser Beitrag gegeben durch

$$\Omega^q = -T \ln \frac{\det D(\mu)}{\det D_0(\mu)}. \quad (4.18)$$

Da im Spektrum des Operators $D(\mu)$ zu jedem Eigenwert auch sein komplex konjugierter gehört, gilt

$$\det D(\mu) = \det D(\mu)^\dagger = \sqrt{\det [D(\mu)^\dagger D(\mu)]} = \sqrt{\det A(\mu)} \quad (4.19)$$

und damit

$$\Omega^q = -\frac{1}{2} T \ln \frac{\det A(\mu)}{\det A_0(\mu)} = -\frac{1}{2} T \text{Sp} [\ln A(\mu) - \ln A_0(\mu)], \quad (4.20)$$

mit den hermiteschen Operatoren aus Gl. (4.13) und Gl. (4.14). Die Quark-Determinante ist somit reell und enthält keinen Imaginärteil. Der Ausdruck in Gl. (4.20) enthält noch Divergenzen, die jetzt behandelt werden.

Wir regularisieren nur den Anteil zum großkanonischen Potential (Gl. (4.20)), der für $T, \mu \rightarrow 0$ (im expliziten Sinne) übrig bleibt und entkoppeln damit die Regularisierung von einer expliziten Abhängigkeit von der Temperatur und dem chemischen Potential, was die Ausdrücke wesentlich vereinfacht. Diese resultierende Größe bezeichnen wir als *Dirac-See*-Anteil $\Omega^{q,\text{see}}$. Mit Hilfe der Beziehungen (4.15) und (4.16) ergibt sich der unregularisierte divergente Ausdruck

$$\begin{aligned}\Omega^{q,\text{see}} &\equiv -\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} [\ln A(0) - \ln A_0(0)] = -\frac{N_c}{2} \sum_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \ln \frac{\omega^2 + \varepsilon_\alpha^2}{\omega^2 + (\varepsilon_\alpha^0)^2} \\ &= -\frac{N_c}{2} \sum_\alpha [|\varepsilon_\alpha| - |\varepsilon_\alpha^0|] \rightarrow \infty,\end{aligned}\quad (4.21)$$

der die Polarisierung der virtuellen Quarks und Antiquarks aufgrund der ortsabhängigen Hedgehog-Felder beschreibt. ε_α und ε_α^0 sind dabei die Energieeigenwerte des Quark-Hamilton-Operators h , der die ortsabhängigen Hedgehog-Felder enthält bzw. des Quark-Hamilton-Operators h_0 des homogenen Systems. Aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Hedgehog-Felder (siehe Kapitel 4.2.2) sind die Energieeigenwerte ebenfalls temperaturabhängig und $\Omega^{\text{q,see}}$ ist implizit von den thermodynamischen Parametern abhängig. Der obige Ausdruck beschreibt die Differenz der Nullpunktsenergien der Quarks mit dem für Fermionen typischen negativen Vorzeichen. Die Verschiebung der Nullpunktsenergien der Quarks durch den Einfluß der ortsabhängigen Felder σ und π ist mit einer Energiedifferenz bezüglich des homogenen Mediums verbunden (Casimir-Effekt).

Die Aufspaltung der divergenten Größe (Gl. (4.20)) in einen divergenten (Gl. (4.21)) und einen endlichen Anteil ist nicht eindeutig, so daß die von uns gewählte Regularisierung nicht zwingend ist. Mit der hier verwendeten Zerlegung der Quark-Determinante erhält man für den endlichen Anteil der reellen Quarks und Antiquarks formal die üblichen Formeln für ein Fermi-Gas (ohne Nullpunktsenergien). Zur Diskussion ob man diesen Mediumanteil auch regularisieren sollte, siehe Kapitel 6.

Das Vorhandensein der ortsabhängigen Hedgehog-Felder führt im Mittel zu einer Absenkung des Betrages der Einteilchenenergieniveaus ($|\varepsilon_\alpha|$) gegenüber dem homogenen Fall ($|\varepsilon_\alpha^0|$), so daß $\Omega^{\text{q,see}}$ positiv ist. So eine grundlegende Eigenschaft sollte durch die Regularisierung nicht zerstört werden. Eine ausführliche Diskussion verschiedener Regularisierungsmethoden ist in [55] gegeben. Die Anwendung von verschiedenen Regularisierungsmethoden wird im allgemeinen zu unterschiedlichen Aussagen des Modells führen. In den Arbeiten [56, 57] wurden die Auswirkungen von unterschiedlichen Regularisierungsschemas (unterschiedliches Abschneiden im Impulsraum, Pauli-Villars-, proper-time-Regularisierung) auf die Eigenschaften des Solitons im QCD-Vakuum untersucht. Es stellte sich heraus, daß die Eigenschaften des Solitons bei Verwendung einer Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse $M_{\text{vak}} \approx 400 \text{ MeV}$ (siehe auch Abschnitt 5) nur wenig von der speziell gewählten Regularisierung abhängen.

Wir benutzen hier Schwinger's *proper-time* Schema [58], in der der Logarithmus in Gl. (4.21) durch eine Integraldarstellung ersetzt wird. Für eine positive reelle Zahl a gilt $1/a = \int_0^\infty ds e^{-sa}$. Integriert man diese Beziehung über a , so ergibt sich $\ln b - \ln a = -\int_0^\infty ds s^{-1}(e^{-sb} - e^{-sa})$ mit positiven reellen Zahlen a und b . Sind a und b positiv definite hermitesche Operatoren, so gilt dann die entsprechende Beziehung nach Spurbildung. Bei der Regularisierung wird der Dirac-See-Anteil (Gl. (4.21)) ersetzt durch

$$\begin{aligned} \Omega^{\text{q,see}} \longrightarrow \Omega_\Lambda^{\text{q,see}} &= \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds s^{-1} [e^{-sA(0)} - e^{-sA_0(0)}] \\ &= \frac{N_c}{2} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds s^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sum_\alpha [e^{-s(\omega^2 + \varepsilon_\alpha^2)} - e^{-s(\omega^2 + (\varepsilon_\alpha^0)^2)}] \\ &= -\frac{N_c}{2} \sum_\alpha [R_\varepsilon(\varepsilon_\alpha; \Lambda) |\varepsilon_\alpha| - R_\varepsilon(\varepsilon_\alpha^0; \Lambda) |\varepsilon_\alpha^0|] . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dabei ist $R_\varepsilon(\varepsilon; \Lambda)$ die Regularisierungsfunktion für die Einteilchenenergien

$$R_\varepsilon(\varepsilon; \Lambda) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}|\varepsilon|} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds s^{-3/2} e^{-s\varepsilon^2} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(-1/2, (\varepsilon/\Lambda)^2\right) \quad (4.23)$$

mit der unvollständigen Gammafunktion $\Gamma(z, a) \equiv \int_a^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}$ auf der rechten Seite. Sie schneidet die Beiträge von Niveaus mit $|\varepsilon| \gg \Lambda$ exponentiell ab. Bei der Integration über ω wurde das Gauß-Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-s\omega^2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$ genutzt.

Für $\Lambda \rightarrow \infty$, d. h. im unregularisierten Fall, ergibt sich wieder der ursprüngliche Ausdruck (4.21). Um dies zu sehen, muß man beachten das aufgrund des negativen Argumentes in der unvollständigen Gammafunktion in Gl. (4.23) diese Größe selber für $\Lambda \rightarrow \infty$ divergiert. Man kann mittels partieller Integration diese Gammafunktion in eine mit positiven Argument überführen. Es gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(z, a) &\equiv \int_a^{\infty} ds s^{z-1} e^{-s} = \frac{1}{z} s^z e^{-s} \Big|_a^{\infty} + \int_a^{\infty} ds \frac{1}{z} s^z e^{-s} \\ &= -\frac{1}{z} a^z e^{-a} + \frac{1}{z} \Gamma(z+1, a) \quad \text{mit } z \neq 0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

was für unseren Fall auf

$$\Gamma\left(-1/2, (\varepsilon/\Lambda)^2\right) = 2\frac{\Lambda}{|\varepsilon|} e^{-(\varepsilon/\Lambda)^2} - 2\Gamma\left(1/2, (\varepsilon/\Lambda)^2\right) \quad (4.25)$$

führt. An Stelle des Grenzwertes von Gl. (4.23) betrachten wir die Differenz

$$\begin{aligned} R_\varepsilon(\varepsilon_\alpha; \Lambda)|\varepsilon_\alpha| - R_\varepsilon(\varepsilon_\alpha^0; \Lambda)|\varepsilon_\alpha^0| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1/2, (\varepsilon_\alpha/\Lambda)^2\right) |\varepsilon_\alpha| - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(1/2, (\varepsilon_\alpha^0/\Lambda)^2\right) |\varepsilon_\alpha^0| \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Lambda \left[e^{-(\varepsilon_\alpha^0/\Lambda)^2} - e^{-(\varepsilon_\alpha/\Lambda)^2} \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

und erhalten mit

$$\Gamma\left(1/2, (\varepsilon/\Lambda)^2\right) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \Gamma(1/2, 0) = \sqrt{\pi} \quad (4.27)$$

die Aussage

$$R_\varepsilon(\varepsilon_\alpha; \Lambda)|\varepsilon_\alpha| - R_\varepsilon(\varepsilon_\alpha^0; \Lambda)|\varepsilon_\alpha^0| \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} |\varepsilon_\alpha| - |\varepsilon_\alpha^0|, \quad (4.28)$$

da in diesem Limes der letzte Term auf der rechten Seite von Gl. (4.26) gegen Null geht. Die letzten zwei Gleichungen werden bei Grenzwertbetrachtungen oftmals von Nutzen sein.

Der ultraviolette Abschneideparameter Λ darf nicht mit dem fundamentalen Skalenparameter Λ_{QCD} der QCD, der als Renormierungsgruppeninvariante die Kopplungsstärke der starken Wechselwirkung bestimmt und bei ca. 200 MeV liegt, verwechselt werden. Das hier verwendete NJL-Modell ist nicht renormierbar. In renormierbaren Theorien wird die

Abhängigkeit der physikalischen Größen vom speziellen Wert des Regularisierungsparameters durch das Renormierungsprogramm (Renormierung von Massen, Kopplungskonstanten, Felder) beseitigt. In einer effektiven Niederenergiethorie hat man aber von Anfang an eine Skala gesetzt, die die Gültigkeit der Theorie begrenzt, so daß hier die Forderung nach Renormierbarkeit nicht zwingend ist. Die Festlegung des Abschneideparameters Λ wird in Abschnitt 5 gegeben. Die Größenordnung kann durch das Instanton-Vakuum-Modell, in dem der Abschneideparameter mit dem Inversen der mittleren Instantonausdehnung zusammenhängt: $\Lambda \sim \bar{\rho}^{-1} \simeq 600 \text{ MeV}$ [59], abgeschätzt werden.

Für den verbleibenden endlichen Rest $\Omega^q - \Omega^{q,\text{see}}$ im kanonischen Potential (Gl. (4.20)) der Beiträge der reellen Quarks und Antiquarks, dem *Medium*-Anteil am großkanonischen Potential, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Omega^{q,\text{med}}(T, \mu) &\equiv \Omega^q - \Omega^{q,\text{see}} = -\frac{1}{2}T \ln \frac{\det A(\mu)}{\det A_0(\mu)} + \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \ln \frac{\det A(0)}{\det A_0(0)} \\
&= -\frac{N_c}{2}T \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{\omega_n^2 + (\varepsilon_{\alpha} - \mu)^2}{\omega_n^2 + (\varepsilon_{\alpha}^0 - \mu)^2} + \frac{N_c}{2} \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \ln \frac{\omega^2 + \varepsilon_{\alpha}^2}{\omega^2 + (\varepsilon_{\alpha}^0)^2} \\
&= -N_c T \sum_{\alpha} \ln \frac{1 + \exp\{-[|\varepsilon_{\alpha}| - \mu \text{sign}(\varepsilon_{\alpha})]/T\}}{1 + \exp\{-[|\varepsilon_{\alpha}^0| - \mu \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0)]/T\}} - \mu N_c B^{\text{see}} \\
&= N_c T \sum_{\alpha} \ln \frac{1 - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu)}{1 - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu)} - \mu N_c B^{\text{see}} \tag{4.29}
\end{aligned}$$

mit der typischen mittleren fermionischen Besetzungszahl

$$\tilde{n}(\varepsilon; T, \mu) = \frac{1}{e^{[|\varepsilon| - \mu \text{sign}(\varepsilon)]/T} + 1} \tag{4.30}$$

für Quarks ($\varepsilon > 0$) und Antiquarks ($\varepsilon < 0$). Man kann dies uminterpretieren, indem man von Teilchen und Antiteilchen mit positiver Energie ($|\varepsilon|$) aber entgegengesetzten chemischen Potentialen spricht. Die Baryonenzahl B^{see} des Dirac-Sees ist gegeben durch

$$B^{\text{see}} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} [\text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) - \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0)] . \tag{4.31}$$

Im Normalfall ist auch für die ortsabhängige Lösung die Anzahl der positiven und negativen Energieniveaus gleich und B^{see} verschwindet. Nur wenn die Bindung der Energieniveaus so stark wird, daß ein oder mehrere Niveaus ihr Vorzeichen wechseln, ist B^{see} von Null verschieden. Dies ist der Fall wenn die Kopplungskonstante G groß genug ist. Die Kopplungskonstante wird in Abschnitt 5 mit der Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse verknüpft. Von den Rechnungen für das Soliton im Vakuum ist bekannt, daß ein Vorzeichenwechsel des niedrigsten positiven Einteilchen-Energieniveaus der Quarks bei einer Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse von etwa 750 MeV auftritt [60]. Dieser Fall wird in der Arbeit nicht betrachtet, so daß hier stets $B^{\text{see}} = 0$ gilt. Der Mediumbeitrag in Gl. (4.29) hängt von den mittleren Besetzungszahlen (Gl. (4.30)), d. h. der thermodynamischen

Wahrscheinlichkeit mit der die Einteilchenniveaus der Quarks besetzt werden, ab. Er beschreibt die Polarisierung des Mediums aufgrund der solitonischen mesonischen Felder.

Nach der Regularisierung ist der Beitrag der Quarks zum großkanonischen Potential gegeben durch die Summe aus regularisiertem Seeanteil und Mediumanteil

$$\Omega_{\Lambda}^q(T, \mu) = \Omega_{\Lambda}^{q, \text{see}} + \Omega^{q, \text{med}}(T, \mu) . \quad (4.32)$$

Der rein mesonische Beitrag Ω^m zum großkanonischen Potential ist gegeben durch den letzten Term auf der rechten Seite in Gl. (3.14), was mit Gl. (3.10) nach Abzug der mesonischen Energie des homogenen Mediums ($\sigma = \sigma_0, \pi_0 = 0$) auf

$$\begin{aligned} \Omega^m &= \frac{1}{2G} \int d^3\mathbf{r} [(\sigma - m)^2 + \pi^2] - \frac{1}{2G} \int d^3\mathbf{r} (\sigma_0 - m)^2 \\ &= \frac{1}{2G} \int d^3\mathbf{r} (\sigma^2 + \pi^2 - \sigma_0^2) + \frac{m}{G} \int d^3\mathbf{r} (\sigma_0 - \sigma) \end{aligned} \quad (4.33)$$

führt. Das gesamte, auf das homogene Medium von Konstituentenquarks bezogene, regularisierte großkanonische Potential ist die Summe aus dem Quarkbeitrag (Gl. (4.32)) und dem rein mesonischen Anteil (Gl. (4.33))

$$\Omega_{\Lambda}[\sigma, \pi; \sigma_0](T, \mu) = \Omega_{\Lambda}^q[\sigma, \pi; \sigma_0](T, \mu) + \Omega^m[\sigma, \pi; \sigma_0] \quad (4.34)$$

und ist ein Funktional der mesonischen Felder.

4.2.2 Feldgleichungen

Die mittleren mesonischen Felder $\phi_a = (\sigma, \pi)$ ergeben sich gemäß Gl. (3.23) aus der Variation des regularisierten großkanonischen Potentials (Gl. (4.34)) nach den mesonischen Feldern

$$\frac{\delta \Omega_{\Lambda}[\phi_a](T, \mu)}{\delta \phi_a(\mathbf{r})} = 0 . \quad (4.35)$$

Zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise wählen wir die Abkürzung $\Gamma_a = (\gamma^0, i\gamma^0\gamma_5\boldsymbol{\tau})$, so daß der Quark-Hamilton-Operator (Gl. (3.11)), bestehend aus einem kinetischen Term und den Potentialtermen, gegeben ist durch

$$h = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \Gamma_a \phi_a , \quad (4.36)$$

und es gilt

$$\frac{\delta h^2(\mathbf{r}')}{\delta \phi_a(\mathbf{r})} = \left\{ \frac{\delta h(\mathbf{r}')}{\delta \phi_a(\mathbf{r})}, h(\mathbf{r}') \right\} = \{ \Gamma_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), h(\mathbf{r}') \} . \quad (4.37)$$

Die Variation des regularisierten Dirac-See-Anteils aus Gl. (4.22) führt auf

$$\frac{\delta \Omega_{\Lambda}^{q, \text{see}}}{\delta \phi_a(\mathbf{r})} = -\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds e^{-sA(0)} \frac{\delta h^2}{\delta \phi_a(\mathbf{r})} , \quad (4.38)$$

wobei Eigenschaften des Exponentialoperators, wie sie im Anhang E zusammengestellt sind, ausgenutzt wurden. Die obige Formel folgt aus Gl. (E.25), wenn man dort $A_1 = \delta h^2$ setzt und nur den Term proportional zu A_1 mitnimmt. Aufgrund des möglichen zyklischen Vertauschens unter der Spur und da h mit $A(0)$ vertauscht, ergibt sich dann mit Gl. (4.37)

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega_\Lambda^{\text{q,see}}}{\delta\phi_a(\mathbf{r})} &= -\lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds e^{-sA(0)} h \Gamma_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= -N_c \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sum_{\alpha} \langle \alpha | \Gamma_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') | \alpha \rangle \varepsilon_{\alpha} e^{-s(\omega^2 + \varepsilon_{\alpha}^2)}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Mit $\langle \alpha | \Gamma_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') | \alpha \rangle \equiv \int d^3\mathbf{r}' \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}') \Gamma_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}') = \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma_a \Phi_{\alpha}(\mathbf{r})$ läßt sich dies nach Durchführung der ω -Integration schreiben als

$$\frac{\delta\Omega_\Lambda^{\text{q,see}}}{\delta\phi_a(\mathbf{r})} = -\frac{N_c}{2} \sum_{\alpha} R_{\phi}(\varepsilon_{\alpha}; \Lambda) \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma_a \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \quad (4.40)$$

mit der Regularisierungsfunktion

$$R_{\phi}(\varepsilon; \Lambda) = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\pi}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds s^{-1/2} e^{-s\varepsilon^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2, (\varepsilon/\Lambda)^2). \quad (4.41)$$

Die Variation des Mediumbeitrages aus Gl. (4.29) führt auf

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega^{\text{q,med}}}{\delta\phi_a(\mathbf{r})} &= -\frac{1}{2} T \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} \frac{\delta(h - \mu)^2}{\delta\phi_a(\mathbf{r})} \right] + \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[A(0)^{-1} \frac{\delta h^2}{\delta\phi_a(\mathbf{r})} \right] \\ &= N_c \sum_{\alpha} \left[-T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{\alpha} - \mu}{\omega_n^2 + (\varepsilon_{\alpha} - \mu)^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\omega^2 + \varepsilon_{\alpha}^2} \right] \langle \alpha | \Gamma_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') | \alpha \rangle \\ &= N_c \sum_{\alpha} \left[\frac{1}{e^{(\varepsilon_{\alpha} - \mu)/T} + 1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \right] \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma_a \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \\ &= N_c \sum_{\alpha} \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma_a \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

und hängt von den mittleren fermionischen Besetzungszahlen (Gl. (4.30)) ab.

Die Variation des mesonischen Beitrages (Gl. (4.33)) nach den mesonischen Feldern ist trivial. Aus den abgeleiteten Ausdrücken ergeben sich die mesonischen Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \phi_a(\mathbf{r})(T, \mu) &= m \delta_{0a} + G \frac{N_c}{2} \sum_{\alpha} R_{\phi}(\varepsilon_{\alpha}; \Lambda) \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma_a \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \\ &\quad - G N_c \sum_{\alpha} \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma_a \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Aufgrund der weiteren Einschränkungen an diese Felder, die im Kapitel 4.1 angegeben sind, sind die vier Komponenten $a = 0, 1, 2, 3$ der Gleichung (4.43) nicht unabhängig

voneinander, und es bleibt nur eine Bewegungsgleichung für den chiralen Winkel $\theta(r)$. Die sphärische Symmetrie sorgt dafür, daß das skalare Feld σ nur vom Abstand zum Ursprung $r = |\mathbf{r}|$ abhängt, und man kann über den Raumwinkel mitteln. Man erhält dies, wenn man in Gl. (4.43) die entsprechende Gleichung mit $a=0$ über den Raumwinkel $d\Omega$ integriert und anschließend durch den gesamten Raumwinkel von 4π teilt

$$\sigma(r) = m + GN_c \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \left\{ \left[\frac{1}{2} R_{\phi}(\varepsilon_{\alpha}; \Lambda) - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) \right] \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \cdot \int d\Omega \bar{\Phi}_{\alpha}(r, \Omega) \Phi_{\alpha}(r, \Omega) \right\}. \quad (4.44)$$

Aufgrund des Hedgehog-Ansatzes (Gl. (4.1)) erhält man das analoge $\pi(r)$ -Feld, wenn man $\pi(\mathbf{r})$ mit dem Einheitsvektor im Ortsraum $\hat{\mathbf{r}}$ multipliziert und anschließend wieder die Integration über den Raumwinkel durchführt, was mit Gleichung (4.43) für $a=1, 2, 3$ auf

$$\pi(r) = GN_c \frac{1}{4\pi} \sum_{\alpha} \left\{ \left[\frac{1}{2} R_{\phi}(\varepsilon_{\alpha}; \Lambda) - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) \right] \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \cdot \int d\Omega \bar{\Phi}_{\alpha}(r, \Omega) i\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{r}} \gamma_5 \Phi_{\alpha}(r, \Omega) \right\} \quad (4.45)$$

führt. Der chirale Zirkel (Gl. (4.6)) sorgt dafür, daß auch die zwei Felder $\sigma(r)$ und $\pi(r)$ nicht unabhängig voneinander sind, und es verbleibt als einzige freie Funktion der chirale Winkel

$$\frac{\delta\Omega_{\Lambda}[\theta](T, \mu)}{\delta\theta(r)} = 0 \implies \theta(r) = \arctan \frac{\pi(r)}{\sigma(r)}. \quad (4.46)$$

4.2.3 Innere und freie Energie, Entropie, Teilchenzahl

Im folgenden wahren wir die thermodynamischen Relationen (Gln. (3.4)-(3.7)) und bestimmen die innere Energie E durch eine Legendre-Transformation, bei der die Variablen T und μ durch die Ableitungen von $\Omega_{\Lambda}(T, \mu)$ nach diesen Parametern, d. h. die Entropie $S = -\partial\Omega_{\Lambda}(T, \mu)/\partial T$ und mittlere Teilchenzahl $N = -\partial\Omega_{\Lambda}(T, \mu)/\partial\mu$, ersetzt werden. Aufgrund der Bewegungsgleichung (4.35) reduzieren sich diese Ableitungen auf die expliziten Ableitungen nach den entsprechenden Parametern. Implizite Abhängigkeiten über die mittleren Felder, die ja selber von T und μ abhängen, liefern keine Beiträge

$$N = -\frac{\partial}{\partial\mu} \Omega_{\Lambda}(T, \mu) = -\frac{\partial}{\partial\mu} \Omega^{\text{q,med}}(T, \mu) \quad (4.47)$$

sowie

$$S = -\frac{\partial}{\partial T} \Omega_{\Lambda}(T, \mu) = -\frac{\partial}{\partial T} \Omega^{\text{q,med}}(T, \mu). \quad (4.48)$$

Die Ableitungen nach den thermodynamischen Variablen auf der rechten Seite der Gleichungen (4.47) und (4.48) sind also bei festgehaltenen mittleren Feldern und damit bei festgehaltenem Einteilchen-Energiespektrum $\{\varepsilon_{\alpha}\}$ der Quarks zu nehmen. Mit der von uns

gewählten Regularisierung des explizit von T und μ unabhängigen Anteils am großkanonischen Potential erhalten wir unregularisierte Ausdrücke für die Entropie und mittlere Teilchenzahl. Aus Gl. (4.29) erhält man für mittlere Teilchenzahl und Entropie, bezogen auf das homogene Medium

$$\begin{aligned} N &= N_c \sum_{\alpha} \left[\tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) \operatorname{sign}(\varepsilon_{\alpha}) - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu) \operatorname{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) \right] + N_c B^{\text{see}} \\ &= N_c B, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} S &= -N_c \sum_{\alpha} \left[\ln \frac{1 - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu)}{1 - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu)} - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) (|\varepsilon_{\alpha}| - \mu \operatorname{sign}(\varepsilon_{\alpha})) / T \right. \\ &\quad \left. + \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu) (|\varepsilon_{\alpha}^0| - \mu \operatorname{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0)) / T \right] \end{aligned} \quad (4.50)$$

mit der Baryonenzahl B des Solitons.

Analog zum großkanonischen Potential bestehen die innere und die freie Energie des Solitons aus Quark- und mesonischen Anteilen

$$E_{\Lambda} = E^{\text{m}} + E_{\Lambda}^{\text{q,sea}} + E^{\text{q,med}}, \quad (4.51)$$

$$F_{\Lambda} = F^{\text{m}} + F_{\Lambda}^{\text{q,sea}} + F^{\text{q,med}} \quad (4.52)$$

mit

$$E^{\text{m}} = F^{\text{m}} = \Omega^{\text{m}} = \frac{m}{G} \int d^3 r (\sigma_0 - \sigma), \quad (4.53)$$

$$E_{\Lambda}^{\text{q,sea}} = F_{\Lambda}^{\text{q,sea}} = \Omega_{\Lambda}^{\text{q,sea}}. \quad (4.54)$$

Dabei wurde in Gl. (4.53) der chirale Zirkel (Gl. (4.6)) benutzt. Der Mediumanteil an der freien Energie ist mit Gl. (4.29) gegeben durch

$$\begin{aligned} F^{\text{q,med}} &= \left[1 - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \Omega^{\text{q,med}}(T, \mu) \\ &= N_c \sum_{\alpha} \left[T \ln \frac{1 - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu)}{1 - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu)} + \mu \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) \operatorname{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \right. \\ &\quad \left. - \mu \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu) \operatorname{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) \right], \end{aligned} \quad (4.55)$$

und der Mediumanteil an der inneren Energie ergibt sich zu

$$\begin{aligned} E^{\text{q,med}} &= \left[1 - T \frac{\partial}{\partial T} - \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \Omega^{\text{q,med}}(T, \mu) \\ &= -T \operatorname{Sp} \left[A(\mu)^{-1} (\partial_{\tau}^2 + \mu(h - \mu)) - A_0(\mu)^{-1} (\partial_{\tau}^2 + \mu(h_0 - \mu)) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \operatorname{Sp} \left[\ln A(0) - \ln A_0(0) \right] \\ &= N_c \sum_{\alpha} \left[\tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) |\varepsilon_{\alpha}| - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu) |\varepsilon_{\alpha}^0| \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Der explizite Ausdruck mit den Energieeigenwerten folgt direkt aus der letzten Zeile in Gleichung (4.29). Die Darstellung mit den Einteilchen-Operatoren in der zweiten Zeile benötigen wir später im Kapitel 8.1.1 bei der Berechnung der trägen Masse des Solitons. Sie folgt aus den Relationen

$$T \frac{\partial}{\partial T} \ln \det A(\mu) = T \frac{\partial}{\partial T} \text{Sp} \ln A(\mu) = -2 \text{Sp} [A(\mu)^{-1} \partial_r^2] , \quad (4.57)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \det A(\mu) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \text{Sp} \ln A(\mu) = -2 \text{Sp} [A(\mu)^{-1} \mu(h - \mu)] \quad (4.58)$$

für die Spur (Gl. (3.26)) der Operatoren (Gl. (4.13)), (Gl. (4.14)) und aus der ersten Zeile in Gleichung (4.29). Während die Beziehung (4.58) aus Gl. (E.14) und Gl. (4.13) folgt, erhält man die Relation (4.57), wenn man die Spur mit Hilfe der Eigenwerte (Gl. (3.27)) erst explizit ausführt, da die dabei auftretenden ungeraden Matsubara-Frequenzen die Temperatur enthalten, und danach die Ableitung nach der Temperatur durchführt. Aus $T \frac{\partial}{\partial T} \sum_n \ln(\omega_n^2 + a^2) = 2 \sum_n \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + a^2}$ folgt dann Gl. (4.57).

Formal entsprechen die obigen Formeln den Ausdrücken für ein freies Fermigas mit den Einteilchenenergien ε_α , einschließlich der regularisierten Nullpunktsenergien. Man muß aber beachten, daß die ε_α neben den kinetischen Energien bereits die Wechselwirkung mit den ortsabhängigen Hedgehog-Feldern $\phi_a(\mathbf{r})$ enthalten. Wegen der Bewegungsgleichung (Gl. (4.43)) hängt jede Einteilchenenergie der Quarks selber von allen Einteilchenenergien und mittleren Besetzungszahlen ab.

Es sei darauf hingewiesen, daß aufgrund des Theorems der kleinen Zusätze [61], eine kleine Variation des großkanonischen Potentials am stationären Punkt bei festgehaltener Temperatur und chemischen Potential äquivalent einer kleinen Variation der freien Energie bei festgehaltener Temperatur und mittlerer Teilchenzahl bzw. einer Variation der inneren Energie bei festgehaltener Teilchenzahl und Entropie ist. Die Feldgleichungen (Gl. (4.35)) können damit auch als Minimierung der freien Energie bzw. inneren Energie, bei Festhalten der entsprechenden natürlichen thermodynamischen Variablen, formuliert werden. Da uns aber nur das großkanonische Potential in Abhängigkeit von dessen natürlichen Variablen T und μ explizit bekannt ist, ist Gl. (4.35) der einfachste Zugang.

4.3 Thermische Erwartungswerte von solitonischen Observablen

Im folgenden leiten wir Formeln für die thermischen Erwartungswerte von Observablen für das Soliton ab, da wir dies später für die Berechnungen, z. B. des mittleren quadratischen Radius der solitonischen Feldkonfiguration oder bei den Schwerpunktskorrekturen für den Erwartungswert des Einteilchenbeitrages zum Impulsquadrat, benötigen.

Der thermische Erwartungswert eines Operators $\hat{O} = \int d^3\mathbf{r} \hat{q}^\dagger(\mathbf{r}) o \hat{q}(\mathbf{r})$ in zweiter Quantisierung (Schrödinger-Darstellung) mit dem Einteilchen-Operator o , der im Dirac- und Isospin-Raum oder auf die Ortsvariable \mathbf{r} wirkt, kann mit Hilfe eines erweiterten

großkanonischen Potentials $\Omega_{(\Lambda)}(T, \mu; \kappa)$ berechnet werden

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{(\Lambda)}(T, \mu) = - \left. \frac{d\Omega_{(\Lambda)}(T, \mu; \kappa)}{d\kappa} \right|_{\kappa=0}, \quad (4.59)$$

wobei man $\Omega_{(\Lambda)}(T, \mu; \kappa)$ aus $\Omega_{(\Lambda)}(T, \mu)$ erhält, indem man $D(\mu)$ in Gl. (4.11) und Gl. (4.12) durch die Operatoren

$$\begin{aligned} D(\mu; \kappa) &\equiv D(\mu) - \kappa o = \partial_\tau + h - \mu - \kappa o, \\ D_0(\mu; \kappa) &\equiv D_0(\mu) - \kappa o = \partial_\tau + h_0 - \mu - \kappa o \end{aligned} \quad (4.60)$$

ersetzt. Das ist der übliche Trick: Einführung eines Lagrange-Parameters κ , Ableiten nach diesem Parameter und anschließendes Nullsetzen des Parameters. Wird der Erwartungswert regularisiert, so geht man vom regularisierten Potential Ω_Λ aus, andernfalls vom unregularisierten Ω . Diese zwei Möglichkeiten sind durch das tiefer gestellte (Λ) in Gl. (4.59) angedeutet. Aufgrund der Näherung des mittleren Feldes, in der nicht über die mesonischen Felder integriert wird (im Sinne des Pfadintegral-Formalismus), liefert nur der Quarkanteil am großkanonischen Potential einen Beitrag zu Erwartungswerten, die wieder in See- und Mediumanteil aufgespalten werden können

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{(\Lambda)}(T, \mu) = \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_{(\Lambda)}^{\text{q,see}} + \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle^{\text{q,med}}(T, \mu). \quad (4.61)$$

Wir beginnen mit dem regularisierten Seeanteil am Erwartungswert und erhalten wegen Gl. (4.22)

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_\Lambda^{\text{q,see}} &\equiv - \left. \frac{d\Omega_\Lambda^{\text{q,see}}(\kappa)}{d\kappa} \right|_{\kappa=0} \\ &= - \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds s^{-1} \left. \frac{d}{d\kappa} [e^{-sA(0;\kappa)} - e^{-sA_0(0;\kappa)}] \right|_{\kappa=0}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Benutzt man die Beziehung (E.11) aus dem Anhang und beachtet das mögliche zyklische Vertauschen innerhalb der Spur, so ergibt sich

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_\Lambda^{\text{q,see}} = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds \left[e^{-sA(0)} \left. \frac{dA(0;\kappa)}{d\kappa} \right|_{\kappa=0} - e^{-sA_0(0)} \left. \frac{dA_0(0;\kappa)}{d\kappa} \right|_{\kappa=0} \right]. \quad (4.63)$$

Wir nehmen an, daß κo hermitesch sowie o zeitunabhängig ist ($[\partial_\tau, o] = 0$), und erhalten

$$\left. \frac{dA(0;\kappa)}{d\kappa} \right|_{\kappa=0} = \left. \frac{d}{d\kappa} [D(0;\kappa)^\dagger D(0;\kappa)] \right|_{\kappa=0} = -oD(0) - D(0)^\dagger o = -\{o, h\}. \quad (4.64)$$

Aufgrund des möglichen zyklischen Vertauschens unter der Spur, und da h mit $A(0)$ vertauscht, ergibt sich damit

$$\langle \hat{\mathcal{O}} \rangle_\Lambda^{\text{q,see}} = - \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds [e^{-sA(0)} h o - e^{-sA_0(0)} h_0 o]. \quad (4.65)$$

Bilden wir nun die Spur entsprechend Gl. (4.15) mit Gln. (4.16) und (4.17) und betrachten Einteilchen-Operatoren mit der Eigenschaft $\langle \alpha', \omega' | o | \alpha, \omega \rangle = \langle \alpha' | o | \alpha \rangle \delta(\omega' - \omega)$, so erhält man aus Gl. (4.65)

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle_{\Lambda}^{\text{q,see}} &= -N_c \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds \left[e^{-s(\omega^2 + \varepsilon_{\alpha}^2)} \varepsilon_{\alpha} \langle \alpha | o | \alpha \rangle - e^{-s(\omega^2 + (\varepsilon_{\alpha}^0)^2)} \varepsilon_{\alpha}^0 \langle \alpha^0 | o | \alpha^0 \rangle \right] \\ &= -\frac{N_c}{2} \sum_{\alpha} \left[R_{\phi}(\varepsilon_{\alpha}; \Lambda) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) o_{\alpha} - R_{\phi}(\varepsilon_{\alpha}^0; \Lambda) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) o_{\alpha}^0 \right] \end{aligned} \quad (4.66)$$

mit der Regularisierungsfunktion R_{ϕ} aus Gl. (4.41) und den Matrixelementen

$$o_{\alpha}^{(0)} = \langle \alpha^{(0)} | o | \alpha^{(0)} \rangle = \int d^3 \mathbf{r} \Phi_{\alpha}^{(0)\dagger}(\mathbf{r}) o \Phi_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{r}), \quad (4.67)$$

mit den, auf das Volumen normierten, Energieeigenfunktionen $\Phi_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{r})$ der Quark-Hamilton-Operatoren $h_{(0)}$. Wir werden später auch den unregularisierten Ausdruck $\langle \hat{O} \rangle^{\text{q,see}}$ verwenden, der sich aus $R_{\phi}(\varepsilon_{\alpha}; \Lambda) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 1$ ergibt

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle^{\text{q,see}} &= -\lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[A(0)^{-1} h o - A_0(0)^{-1} h_0 o \right] \\ &= -\frac{N_c}{2} \sum_{\alpha} \left[\text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) o_{\alpha} - \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) o_{\alpha}^0 \right]. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Für den Mediumanteil ergibt sich aus Gl. (4.29)

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle^{\text{q,med}}(T, \mu) &\equiv -\frac{d\Omega^{\text{q,med}}(T, \mu; \kappa)}{d\kappa} \Big|_{\kappa=0} \\ &= \frac{1}{2} T \frac{d}{d\kappa} \left[\ln \frac{\det A(\mu; \kappa)}{\det A_0(\mu; \kappa)} \right] \Big|_{\kappa=0} - \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \frac{d}{d\kappa} \left[\ln \frac{\det A(0; \kappa)}{\det A_0(0; \kappa)} \right] \Big|_{\kappa=0} \end{aligned} \quad (4.69)$$

und mit der Formel (E.14) aus dem Anhang erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle^{\text{q,med}}(T, \mu) &= \frac{1}{2} T \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} \frac{dA(\mu; \kappa)}{d\kappa} \Big|_{\kappa=0} - A_0(\mu)^{-1} \frac{dA_0(\mu; \kappa)}{d\kappa} \Big|_{\kappa=0} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[A(0)^{-1} \frac{dA(0; \kappa)}{d\kappa} \Big|_{\kappa=0} - A_0(0)^{-1} \frac{dA_0(0; \kappa)}{d\kappa} \Big|_{\kappa=0} \right] \end{aligned} \quad (4.70)$$

mit

$$\frac{dA(\mu; \kappa)}{d\kappa} \Big|_{\kappa=0} = \frac{d}{d\kappa} \left[D(\mu; \kappa)^{\dagger} D(\mu; \kappa) \right] \Big|_{\kappa=0} = -oD(\mu) - D(\mu)^{\dagger} o = -\{o, (h - \mu)\}. \quad (4.71)$$

Wegen der Invarianz der Spur bei zyklischem Vertauschen der Operatoren, und da $(h - \mu)$ mit $A(\mu)$ vertauscht, ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \hat{O} \rangle^{\text{q,med}}(T, \mu) &= -T \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} (h - \mu) o - A_0(\mu)^{-1} (h_0 - \mu) o \right] + \\ &\quad + \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[A(0)^{-1} h o - A_0(0)^{-1} h_0 o \right]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Bilden wir nun für den ersten Term die Spur mit Hilfe der Gln. (3.26), (3.27) und (3.30), und betrachten Einteilchen-Operatoren mit der Eigenschaft $\langle \alpha', n' | o | \alpha, n \rangle = \langle \alpha' | o | \alpha \rangle \cdot \delta_{n'n}$, so erhält man

$$\langle \hat{O} \rangle^{\text{q,med}}(T, \mu) = N_c \sum_{\alpha} \left[-T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon_{\alpha} - \mu}{\omega_n^2 + (\varepsilon_{\alpha} - \mu)^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\omega^2 + \varepsilon_{\alpha}^2} \right] o_{\alpha} \\ - \text{Substitution } (\varepsilon_{\alpha}, o_{\alpha} \rightarrow \varepsilon_{\alpha}^0, o_{\alpha}^0), \quad (4.73)$$

wobei der Ausdruck in den eckigen Klammern identisch mit dem bei der Berechnung der Feldgleichungen (Gl. (4.42)) gefundenen Ausdruck ist. Nach Ausführung der Summation/Integration über die Matsubara-Frequenzen und Abzug des Anteils vom homogenen Medium erhält man das Resultat mit den mittleren fermionischen Besetzungszahlen

$$\langle \hat{O} \rangle^{\text{q,med}}(T, \mu) = N_c \sum_{\alpha} \left[\tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) o_{\alpha} - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) o_{\alpha}^0 \right]. \quad (4.74)$$

Den Ausdruck für den thermischen Erwartungswert $\langle \hat{q}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \hat{q}(\mathbf{r}) \rangle$ von zeitunabhängigen Quarkdichten, wobei Γ eine Kombination aus Dirac- und Isospin-Matrizen symbolisiert, wie man sie z. B. bei den Feldgleichungen für die mesonischen Felder benötigt, erhält man aus den obigen Überlegungen, wenn man anstelle des Parameters κ eine Funktion $\kappa(\mathbf{r})$ einführt und dann die Funktionalableitung des großkanonischen Potentials bezüglich $\kappa(\mathbf{r})$ bildet. Für einen unregularisierten Erwartungswert von Quarkdichten erhält man auf diese Weise mit Gl. (3.25)

$$\langle \hat{q}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \hat{q}(\mathbf{r}) \rangle(T, \mu) = -N_c T \int_0^{1/T} d\tau \text{tr}_{\gamma\tau} \langle \mathbf{r}, \tau | [A(\mu)^{-1}(h - \mu)\Gamma \\ - A_0(\mu)^{-1}(h_0 - \mu)\Gamma] | \mathbf{r}, \tau \rangle, \quad (4.75)$$

der sich aus der Summe aus Gl. (4.68) und Gl. (4.72) ergibt, wenn man dort o durch $\Gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ersetzt.

Benötigt man einen regularisierten Ausdruck für die Quarkdichten, so erhält man die expliziten Ausdrücke für den regularisierten Seeanteil aus Gl. (4.66), indem man $o_{\alpha}^{(0)}$ durch $o_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{r}) = \Phi_{\alpha}^{(0)\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \Phi_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{r})$ ersetzt

$$\langle \hat{q}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \hat{q}(\mathbf{r}) \rangle_{\Lambda}^{\text{q,see}} = -\frac{N_c}{2} \sum_{\alpha} \left[R_{\phi}(\varepsilon_{\alpha}; \Lambda) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) \right. \\ \left. - R_{\phi}(\varepsilon_{\alpha}^0; \Lambda) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) \Phi_{\alpha}^{0\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \Phi_{\alpha}^0(\mathbf{r}) \right]. \quad (4.76)$$

Der unregularisierte Ausdruck $\langle \hat{q}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \hat{q}(\mathbf{r}) \rangle^{\text{q,see}}$ ist wieder mit $R_{\phi} = 1$ gegeben

$$\langle \hat{q}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \hat{q}(\mathbf{r}) \rangle^{\text{q,see}} = -\frac{N_c}{2} \sum_{\alpha} \left[\text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) \Phi_{\alpha}^{0\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \Phi_{\alpha}^0(\mathbf{r}) \right]. \quad (4.77)$$

Für den Mediumanteil erhält man aus Gl. (4.74)

$$\langle \hat{q}^\dagger(\mathbf{r}) \Gamma \hat{q}(\mathbf{r}) \rangle^{\text{q,med}}(T, \mu) = N_c \sum_{\alpha} \left[\tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \Phi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \Phi_{\alpha}(\mathbf{r}) - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) \Phi_{\alpha}^{0\dagger}(\mathbf{r}) \Gamma \Phi_{\alpha}^0(\mathbf{r}) \right]. \quad (4.78)$$

Die Summe aus Gl. (4.77) und Gl. (4.78) ergibt den expliziten Ausdruck für Gl. (4.75).

Wir weisen noch auf eine Besonderheit hin, die mit der Regularisierung im Zusammenhang steht. Wir benutzen die obigen Formeln nicht zur Berechnung des Erwartungswertes der inneren Energie ($o=h$) oder zur Bestimmung der mittleren Teilchenzahl ($o=I$). Diese haben wir aus thermodynamischen Konsistenzgründen aus den Relationen (Gln. (3.4-3.7)) bestimmt. Würde man $o=h$ in Gl. (4.66) einsetzen, um den regularisierten Anteil an der inneren Energie zu bestimmen, so ergibt sich wegen der unterschiedlichen Regularisierungsfunktionen R_{ϕ} und R_{ε} keinesfalls der Ausdruck in Gl. (4.22), wie man auch unmittelbar an Gleichung (4.26) sieht. Die Übereinstimmung tritt erst für $\Lambda \rightarrow \infty$, also im unregularisierten Fall, wieder auf, da dann $R_{\phi} = 1$ wird und Beziehung (4.28) gilt. Für die Teilchenzahl gibt es ähnliche Probleme. Hier würde wegen Gl. (4.66) ein regularisierter Anteil hinzukommen, der auch in [62] (Soliton im QCD-Vakuum) untersucht worden ist. Erst im Grenzfall $\Lambda \rightarrow \infty$ mit $R_{\phi} = 1$ verschwindet dieser Beitrag wieder, da die Anzahl der positiven und negativen Energieeigenwerte identisch ist⁵. Um konsistent mit der Beziehung (4.49), die sich aus der Ableitung des großkanonischen Potentials nach dem chemischen Potential ergab, zu bleiben, benutzen wir zur Berechnung des Seeanteils an der Teilchendichte den unregularisierten Ausdruck (Gl. (4.77)) mit $\Gamma=I$. Die Integration über das gesamte Volumen liefert dann zusammen mit dem Mediumanteil (Gl. (4.78)) die Teilchenzahl aus Gl. (4.49).

4.4 Sonderbehandlung der Valenzquarks

Bei der Behandlung eines Solitons im Vakuum hat sich gezeigt, daß die Existenz der 3 Valenzquarks im niedrigsten Niveau positiver Energie im Spektrum des Quark-Hamilton-Operators von entscheidender Bedeutung für die Stabilität des Solitons ist. Um stets einen gebundenen Zustand aus drei Quarks zu realisieren, wird das niedrigste positive Einteilchen-Energieniveau der Quarks aus dem thermischen Gleichgewicht ausgeschlossen und seine Besetzungswahrscheinlichkeit bei Vorhandensein der ortsabhängigen Hedgehog-Felder gleich Eins gesetzt

$$\tilde{n}(\varepsilon_{\text{val}}; T, \mu) \equiv 1, \quad (4.79)$$

unabhängig von der Temperatur und Teilchendichte (oder dem chemischen Potential) der Umgebung. Numerische Rechnungen zeigen, daß dies notwendig ist, damit bis $T \approx 180$ MeV noch solitonische Lösungen existieren. Andernfalls bricht die solitonische Lösung

⁵Wir untersuchen in dieser Arbeit nicht den Fall, bei dem die Bindung der Valenzquarks so stark wird, daß dieses Niveau in den negativen Energiebereich abtaucht – in diesem Fall wäre dann die Anzahl der negativen Niveaus um zwei größer als die Anzahl der positiven Niveaus und der See würde einen Anteil an der Baryonenzahl tragen.

bei einer von Null verschiedenen Teilchendichte der Umgebung schon oberhalb $T \approx 80$ MeV zusammen. Bei endlicher Temperatur und verschwindender Teilchendichte wäre überhaupt keine solitonische Lösung möglich. Man kann jedoch voraussetzen, daß in der Natur das Confinement dafür sorgt, daß die Valenzquarks zusammenbleiben, was durch Gl. (4.79) simuliert wird.

Um im kalten Medium ($T = 0$) ein Soliton mit Baryonenzahl Eins zu realisieren, wurde in [18] das ungebundene Valenzniveau des homogenen Mediums nicht besetzt ($\tilde{n}(\varepsilon_{\text{val}}^0; T, \mu) \equiv 0$). Dies wurde dann auch in der späteren Arbeit [16] übernommen. Ein unbesetztes Niveau im homogenen Medium verletzt jedoch dessen Symmetrie und hat ernste Auswirkungen auf die Größe des mittleren quadratischen Radius und des Trägheitsmomentes, siehe die Abschnitte 7.3 und 8.2.2. Deshalb wird in dieser Arbeit das ungebundene Valenzniveau des homogenen Mediums mit der entsprechenden temperaturabhängigen Besetzungswahrscheinlichkeit besetzt.

5 Parameter des Modells

Neben den thermodynamischen Parametern (T, μ) treten in der Lagrange-Dichte in Gleichung (2.16) noch die Quarkstrommasse m und die 4-Fermionen-Kopplungskonstante G auf. Durch das Regularisierungsverfahren kommt noch zusätzlich ein UV-Abschneideparameter Λ ins Spiel. Weiterhin liefert die spontane chirale Symmetriebrechung einen von Null verschiedenen Vakuumerwartungswert für das isoskalare-skalare σ -Feld, der den Quarks im Vakuum eine effektive Masse $M_{\text{vak}} = M(T=0, \mu=0)$ gibt. Diese Konstituenten-Quarkmasse kann man nicht einem einzigen Quark zuordnen - vielmehr handelt es sich um die Energie eines Quasiteilchens: Quark plus Wolke aus virtuellen Quark-Antiquark-Fluktuationen. Im folgenden werden die Parameter m, G, Λ und M_{vak} mit Beobachtungsgrößen in Zusammenhang gebracht und auf einen freien Parameter reduziert.

Die PCAC-Hypothese verknüpft die Divergenz des isovektoriellen Axialstromes mit der Pion-Masse m_π und der Pion-Zerfallskonstante f_π

$$\partial^\mu A_\mu = m_\pi^2 f_\pi \frac{\pi}{M_{\text{vak}}/f_\pi}. \quad (5.1)$$

Setzen wir dies mit der entsprechenden Beziehung in Gl. (2.18) für den NJL-Lagrangian

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{m}{G} \pi \quad (5.2)$$

gleich, dann ergibt sich aus einer endlichen Pion-Masse auch eine von Null verschiedene

Quarkstrommasse

$$m = \frac{G f_\pi^2 m_\pi^2}{M_{\text{vak}}} . \quad (5.3)$$

Die Pion-Masse ist somit ein Maß für die explizite Brechung der chiralen Symmetrie. Mit den von uns benutzten experimentellen Vakuum-Werten $f_\pi = 93 \text{ MeV}$, $m_\pi = 139 \text{ MeV}$ liefert Gl. (5.3) eine Beziehung zwischen der Quarkstrommasse m , der 4-Quark-Kopplungskonstanten G und der Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse M_{vak} .

Der schwache leptonische Zerfall des elektrisch geladenen Pions $\pi \rightarrow l + \bar{\nu}_l$ ($l = e, \mu$) wird durch das Matrixelement des axialen Stromes zwischen einem Ein-Pionen-Zustand $\pi^b(k)$ mit dem Viererimpuls k und dem Vakuum-Zustand beschrieben

$$\langle 0 | A_\mu^a(x) | \pi^b(k) \rangle = i F_\pi(k) k_\mu \delta^{ab} e^{-ikx} . \quad (5.4)$$

Der komplizierte Vertex $F_\pi(k)$ des Pions kann mit einer mikroskopischen Quarktheorie berechnet werden. Nach Anwendung von Feynman-Regeln auf den Zerfallsprozeß, wobei man die Quark-Pion-Wechselwirkung vom NJL-Modell (in MFA) benutzt, erhält man im Rahmen der proper-time Regularisierung in 1-Schleifen-Näherung mit Quarks der Masse M_{vak} mit $f_\pi = F_\pi(0)$ [63]

$$f_\pi^2 = \frac{N_c}{4\pi^2} M_{\text{vak}}^2 \Gamma(0, (M_{\text{vak}}/\Lambda)^2) . \quad (5.5)$$

Diese Beziehung liefert einen Zusammenhang zwischen der Konstituenten-Quarkmasse M_{vak} und dem Regularisierungsparameter Λ .

Als letztes nutzen wir die Gap-Gleichung für den Vakuumzustand, die sich aus der Minimierung des effektiven Potentials ergibt, um die Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse mit dem Vakuum-Quarkkondensat $\langle 0 | \hat{q}\hat{q} | 0 \rangle$ zu verknüpfen. Zur Herleitung verweisen wir auf den Abschnitt 6. Die dortige Formel (6.7) liefert für den Vakuumzustand ($T=0, \mu=0$), d. h. in dem Fall, in dem nur virtuelle Quark-Antiquark-Fluktuationen aber keine reellen Quarks vorhanden sind und der Term mit den thermischen Besetzungszahlen in Gl. (6.7) verschwindet, mit $M_{\text{vak}} = \sigma_{\text{vak}}$ den folgenden Ausdruck

$$M_{\text{vak}} = m - G \langle 0 | \hat{q}\hat{q} | 0 \rangle = m + G \frac{4N_f N_c}{16\pi^2} M_{\text{vak}}^3 \Gamma(-1, (M_{\text{vak}}/\Lambda)^2) . \quad (5.6)$$

Die Kombination der Gln. (5.3) und (5.6) führt auf die Gell-Mann-Oakes-Renner-Relation im Vakuum: $f_\pi^2 m_\pi^2 \approx -m \langle 0 | \hat{q}\hat{q} | 0 \rangle$ [64].

Mit den Gln. (5.3) und (5.5) sowie der Gap-Gleichung (Gl. (5.6)) verfügen wir somit über 3 Gleichungen für die 4 Parameter $m, G, \Lambda, M_{\text{vak}}$. Zwecks der Anschauung wählen wir als einzigen freien Parameter die Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse M_{vak} , die innerhalb gewisser Grenzen variieren kann. Die Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse bestimmt die Tiefe des skalaren Potentials, in dem sich die Quarks bewegen. Je tiefer das Potential desto stärker wird das Valenzniveau gebunden. Aus den Untersuchungen für ein im Vakuum eingebettetes Soliton ist bekannt, daß für $M_{\text{vak}} < 350 \text{ MeV}$ keine solitonischen Lösungen

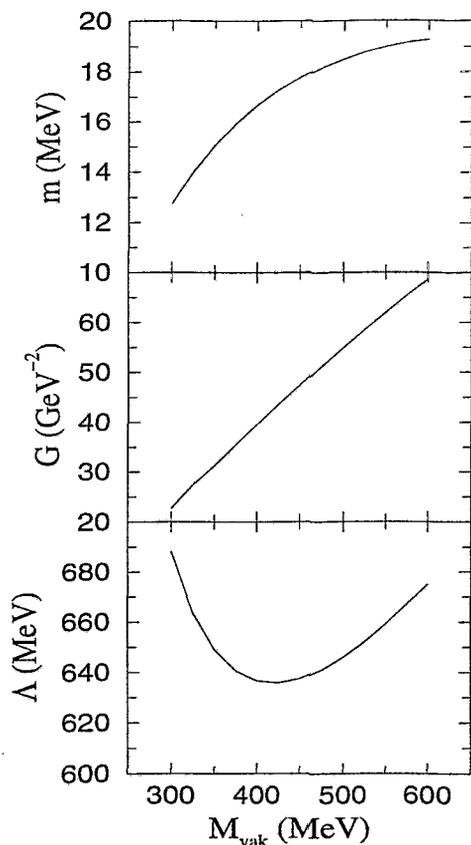


Bild 5-1:

Quarkstrommasse m , Kopplungskonstante G und Regularisierungsparameter Λ in Abhängigkeit von der Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse M_{vak} , wie sie sich aus den Gleichungen (5.3), (5.5) und (5.6) ergeben. Der "phänomenologische" Wert für die Quarkstrommasse liegt bei $m \approx 10$ MeV.

existieren [60]. Im Bereich von $M_{\text{vak}} \cong 400$ MeV liefert das abgesenkte positive Valenzniveau im Energie-Einteilchenspektrum der Quarks den Hauptbeitrag zu den meisten Observablen des Solitons (*Valenz-Bild*), wo hingegen für $M_{\text{vak}} \geq 700$ MeV das Valenzniveau in das negative Spektrum eintaucht und sich das Soliton als ein stark polarisierter Dirac-See beschreiben läßt (*Skyrmion-Bild*).

Die Abbildung 5-1 zeigt die Abhängigkeiten der Quarkstrommasse $m(M_{\text{vak}})$, des Regularisierungsparameters $\Lambda(M_{\text{vak}})$ und der 4-Quark-Kopplungskonstanten $G(M_{\text{vak}})$ in dem Bereich von $M_{\text{vak}} = 300 - 600$ MeV, wie sie sich aus den Gleichungen (5.3), (5.5) und (5.6) ergeben. Eine Zunahme der Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse hat eine annähernd lineare Zunahme der Kopplungskonstanten G zur Folge. In den weiteren Rechnungen verwenden wir $M_{\text{vak}} = 420$ MeV, welcher die experimentelle Δ -Nukleon-Massenaufspaltung im Vakuum in diesem solitonischen Modell reproduziert.

Die Kopplungskonstante G und der Abschneideparameter Λ sind über Relationen im Vakuum fixiert und werden im weiteren als unabhängig von Temperatur und Dichte der Umgebung angenommen, so wie das im Zusammenhang mit dem NJL-Modell auch in [65, 66] erfolgte. Die Erweiterung der Instanton-Modelle auf den Fall endlicher Temperaturen führt jedoch (nach Integration über die kollektiven Variablen der Instantonen)

auf eine NJL-ähnliche 4-Fermion-Wechselwirkung von Quarks mit temperaturabhängigen Kopplungskonstanten [67]. Desweiteren wird auch die mittlere Instantonausdehnung, die im Fall $T = 0$ mit dem Inversen des Regularisierungsparameters Λ^{-1} in Zusammenhang gebracht wurde [59], temperaturabhängig sein. Gitterrechnungen geben Hinweise auf eine geringe Änderung der mittleren Instantonausdehnung bis Temperaturen in der Nähe des chiralen Phasenübergangs [68].

6 Lösungen der Feldgleichungen für ein homogenes Medium aus Konstituentenquarks

Bevor wir zu den numerischen Ergebnissen der solitonischen Konfigurationen kommen, behandeln wir das homogene Medium von Konstituentenquarks ($\theta \equiv 0$, d. h. $\sigma_0 = \text{konst}$, $\pi_0 = 0$). Dieses homogene Medium bildet das Wärmebad und ist der Referenzzustand bei Berechnung der Observablen des Solitons. Für diesen homogenen Fall existieren umfangreiche Übersichtsartikel [66, 69, 70, 14, 37], so daß wir uns hier nur auf die Aussagen konzentrieren, die für das verwendete Soliton-Modell wichtig sind. Das betrifft hauptsächlich das Verhalten der Konstituenten-Quarkmasse, die in diesem Modell proportional zum Quarkkondensat ist, in Abhängigkeit von der Temperatur und der Dichte des Mediums. Die Konstituenten-Quarkmasse $M = \sigma_0$ bestimmt das skalare mesonische Feld für große Abstände vom Ursprung des Solitons (Randbedingung) und damit die Amplitude (Potentialtiefe) der mittleren mesonischen Felder, in denen sich die Quarks bewegen. Die Konstituenten-Quarkmasse folgt aus der Minimierung des effektiven Potentials, der Gap-Gleichung als der Feldgleichung für das homogene Medium. Es wird sich zeigen, daß die Konstituenten-Quarkmasse mit zunehmender Dichte und/oder Temperatur kontinuierlich abnimmt. Die Anwesenheit reeller Quarks und Antiquarks führt zu einer Zerstörung des Vakuum-Quarkkondensats, verbunden mit einer Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei hohen Temperaturen und Dichten. Die Größenordnung der kritischen Temperatur und Dichte für den Phasenübergang, bei der die Konstituenten-Quarkmasse stark abnimmt, wird abgeschätzt und die numerischen Ergebnisse werden mit anderen Modellen verglichen.

6.1 Effektives Potential, Gap-Gleichung

Ein homogenes Medium mit kontinuierlichem Energiespektrum berechnet man am einfachsten in der Impulsbasis. Man kann dann die Summation über die Einteilchen-Energie-

eigenwerte durch eine Integration über die räumlichen Impulskomponenten ersetzen

$$\sum_{\alpha} = \sum_{\varepsilon_{\alpha} < 0} + \sum_{\varepsilon_{\alpha} > 0} \rightarrow 2N_f V \left[\int_{\varepsilon < 0} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} + \int_{\varepsilon > 0} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \right]. \quad (6.1)$$

V ist dabei das betrachtete Volumen, der Faktor $2N_f$ berücksichtigt die Entartung in den Spin- und Flavour-Freiheitsgraden (isospin-symmetrische Materie) und die beiden Integrale berücksichtigen Quarks und Antiquarks. Die Einteilchenenergien sind gegeben durch $\varepsilon = \pm \varepsilon_M$, $\varepsilon_M = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}$. Für ein homogenes Medium kann man das Volumen als konstanten Faktor abspalten und man rechnet am besten mit den thermodynamischen Größen pro Volumen (Dichten) - den intensiven Größen. Die großkanonische Potentialdichte ist dann identisch mit dem effektiven Potential $\mathcal{V}_{\Lambda}(T, \mu)$ und dem negativen Druck $-p_{\Lambda}(T, \mu)$

$$\mathcal{V}_{\Lambda}(T, \mu) = \frac{\Omega_{\Lambda}^q(T, \mu)}{V} = -p_{\Lambda}(T, \mu). \quad (6.2)$$

Aus den Gleichungen (4.22) und (4.29) kann man nun direkt den regularisierten Seeanteil und den Mediumanteil der Quarks am effektiven Potential ablesen. Mit Gl. (6.1) und Gl. (6.2) erhält man

$$\mathcal{V}_{\Lambda}^{\text{q,see}}(M) = -4N_f N_c \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} R_{\varepsilon}(\varepsilon_M; \Lambda) \varepsilon_M, \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\text{q,med}}(M)(T, \mu) &= -2N_f N_c T \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + e^{-(\varepsilon_M - \mu)/T} \right) \\ &\quad - 2N_f N_c T \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + e^{-(\varepsilon_M + \mu)/T} \right), \end{aligned} \quad (6.4)$$

was in der Näherung des mittleren Feldes das (regularisierte) effektive Potential in 1-Schleifen-Näherung für Fermionen der Masse M darstellt. In diesem Sinne ist das kom-

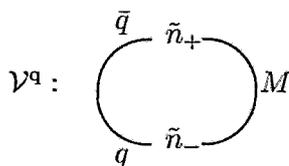


Bild 6-1:

Effektives Potential der Quarks in 1-Schleifen-Näherung für Teilchen mit der Masse M .

plizierte homogene Medium von wechselwirkenden leichten Quarks mit der Strommasse m ersetzt durch ein homogenes Medium von schweren quasifreien Konstituentenquarks der Masse M . Neben den Quantenfluktuationen virtueller Quarks und Antiquarks, die ebenfalls zur Energiedichte des homogenen Zustandes beitragen (regularisierte Nullpunktenergien der Konstituentenquarks in Gl. (6.3)), sind bei endlicher Temperatur und Teilchendichte jetzt auch reelle Quarks und Antiquarks vorhanden, deren statistische Fluktuationen durch die Wechselwirkung mit dem Wärme- und Teilchenbad einbezogen sind, was durch die Besetzungszahlen in der Abbildung 6-1 des Schleifen-Diagramms zum Ausdruck gebracht werden soll. Gleichung (6.4) ist bis auf das Vorzeichen der übliche Aus-

druck für den Druck eines idealen Fermi-Gases von Teilchen und Antiteilchen der Masse M , ohne Nullpunktsenergien. Für masselose Teilchen $M = 0$ kann Gl. (6.4) analytisch ausintegriert werden mit dem bekannten Ergebnis für den Mediumanteil am Druck $p^{q,med} = -\mathcal{V}^{q,med} = 2N_f N_c T^4 \left[\frac{7\pi^2}{360} + \frac{1}{12} \left(\frac{\mu}{T} \right)^2 + \frac{1}{24\pi^2} \left(\frac{\mu}{T} \right)^4 \right]$.

Für das gesamte effektive Potential ergibt sich bei Berücksichtigung des rein mesonischen Anteils, der homogene Anteil aus Gleichung (4.33) mit $\sigma_0 = M$,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\Lambda(M)(T, \mu) &= \frac{1}{2G}(M - m)^2 + \frac{4N_f N_c}{32\pi^2} M^4 \Gamma(-2, (M/\Lambda)^2) - \\ &\quad - 2N_f N_c T \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + e^{-(\varepsilon_M - \mu)/T} \right) \\ &\quad - 2N_f N_c T \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(1 + e^{-(\varepsilon_M + \mu)/T} \right), \end{aligned} \quad (6.5)$$

wobei der zweite Term auf der rechten Seite den über die Impulse integrierten Seeanteil (Nullpunktsenergie) der Quarks aus Gl. (6.3) beschreibt.

Die Gleichgewichtslage des Systems wird bestimmt durch die Extremstellen des effektiven Potentials. Dies führt auf die Gap-Gleichung (die analoge Gleichung zu Gl. (4.35) für den homogenen Fall), aus der der Gleichgewichtswert für die Konstituenten-Quarkmasse M bestimmt werden muß

$$\frac{d\mathcal{V}_\Lambda(M)(T, \mu)}{dM} = 0. \quad (6.6)$$

Wegen $\frac{d\mathcal{V}_\Lambda^q(M)(T, \mu)}{dM} = \langle \hat{q}\hat{q} \rangle$ und Gl. (6.5) ergibt sich die zu Gl. (4.43) analoge Gleichung für den homogenen Fall

$$\begin{aligned} M &= m - G \langle \hat{q}\hat{q} \rangle \\ &= m + G \frac{4N_f N_c}{16\pi^2} M^3 \Gamma(-1, (M/\Lambda)^2) \\ &\quad - 2N_f N_c G M \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\varepsilon_M} [\tilde{n}_-(\varepsilon_M; T, \mu) + \tilde{n}_+(\varepsilon_M; T, \mu)] \end{aligned} \quad (6.7)$$

mit

$$\tilde{n}_\pm(\varepsilon_M; T, \mu) = \frac{1}{e^{(\varepsilon_M \pm \mu)/T} + 1}. \quad (6.8)$$

In der obigen Gleichung gehen bei der Berechnung des thermischen Erwartungswertes $\langle \hat{q}\hat{q} \rangle$ der regularisierte Vakuumanteil und der Mediumanteil mit unterschiedlichen Vorzeichen ein, so daß die Möglichkeit des Zerstörens des Quarkkondensates durch Anwesenheit reeller Quarks und Antiquarks besteht. Für größere Werte der Temperatur und des chemischen Potentials sollte die Konstituenten-Quarkmasse M gegen die Strommasse m gehen.

Das exakte Verschwinden des Quarkkondensates $\langle \hat{q}\hat{q} \rangle = 0$, also $M = m =$ Quarkstrommasse, ist jedoch keine Lösung der obigen Gleichung. Eine solche Lösung wird erst möglich, wenn auch der Mediumanteil zusammen mit dem Vakuumanteil regularisiert wird [37]. Das kann man sich wie folgt klarmachen. Betrachtet man das effektive Potential der Quarks

(Gln. (6.3) und (6.4)) für den Fall wo der Beitrag der Nullpunktsenergien in Gl. (6.3) nicht regularisiert wird, bildet dann, zur Berechnung des Quarkkondensates, die Ableitung des effektiven Potentials nach M , so ergibt sich anstelle von $\langle \hat{q}\hat{q} \rangle$ in Gl. (6.7) der unregularisierte (divergente) Ausdruck

$$\langle \hat{q}\hat{q} \rangle = -2N_f N_c M \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\varepsilon_M} [1 - \tilde{n}_-(\varepsilon_M; T, \mu) - \tilde{n}_+(\varepsilon_M; T, \mu)] . \quad (6.9)$$

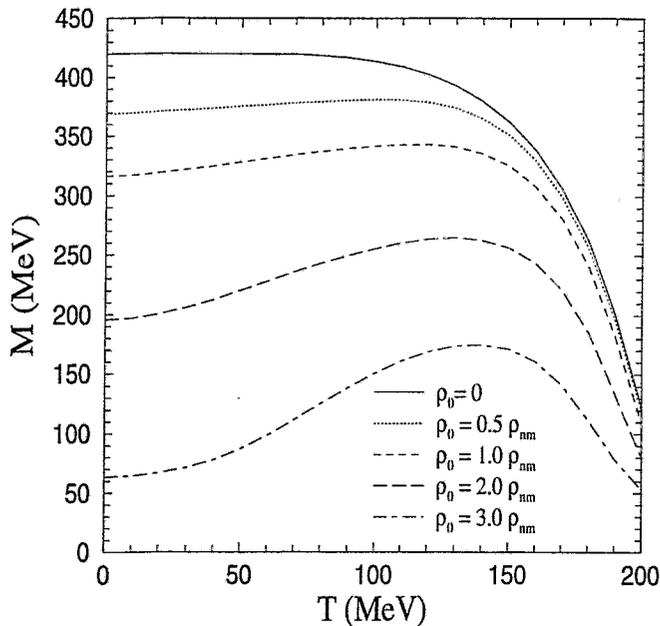
Bildet man nun formal den Limes $T \rightarrow \infty$ für $\mu = 0$ oder $\mu \rightarrow \infty$ für $T = 0$ (oder $T \rightarrow \infty$ und $\mu \rightarrow \infty$), so kann man mit der Definition der mittleren Besetzungszahlen in Gl. (6.8) leicht zeigen, daß der Ausdruck in den eckigen Klammern in Gl. (6.9) verschwindet und man somit $\langle \hat{q}\hat{q} \rangle \rightarrow 0$ erhält. In dem Limes hoher Temperaturen und/oder hoher chemischer Potentiale kompensieren sich der Mediumbeitrag und der Vakuumanteil gerade. Will man diese Struktur erhalten, und der Theorie durch Beseitigung der Divergenzen einen Sinn geben, muß man den Vakuum- und den Mediumanteil in gleicher Art und Weise regularisieren. Oftmals wird also die Forderung $\langle \hat{q}\hat{q} \rangle \xrightarrow{T, \mu \rightarrow \infty} 0$ gestellt. Da das NJL-Modell als Niederenergie-theorie der QCD aber ohnehin nur für nicht zu hohe Energiedichten (und damit für nicht zu hohe Temperaturen und Teilchendichten) konzipiert ist, ist hier der Grenzfall $T, \mu \rightarrow \infty$ physikalisch nicht sinnvoll. Den Grenzwert $T, \mu \rightarrow \infty$ sollte man hier als $T, \mu \gg \Lambda$ verstehen. Das hier verwendete chemische Potential liegt in der Größenordnung der Konstituenten-Quarkmasse und die verwendeten Temperaturen, bis zu denen solitonische Lösungen existieren (siehe Kapitel 7.1), gehen bis maximal 185 MeV. Die mittleren Besetzungszahlen $\tilde{n}_\pm(\varepsilon_M; T, \mu)$ der Einteilchenniveaus, die als natürliche Abschneidefunktion des Mediumanteils wirken, sind wesentlich von Null verschieden für $\varepsilon_M < \mu + T$. In dem in dieser Arbeit betrachteten Temperatur- und Dichtebereich gilt $\mu + T < \Lambda$, so daß das Abscheiden des Energiespektrums durch die Besetzungszahlen früher wirkt als der mögliche Einfluß von Λ bei einer Regularisierung. Aus diesem Grund würde die Regularisierung des Mediumanteils in dem von uns betrachteten Temperatur- und Dichtebereich zu keinen wesentlichen Änderungen führen.

Die numerischen Ergebnisse für die Abhängigkeit der Konstituenten-Quarkmasse von Temperatur und Teilchendichte sind in Abbildung 6-2 dargestellt. Dabei ist anstelle der Abhängigkeit der Konstituenten-Quarkmasse von Temperatur und chemischen Potential die Abhängigkeit von Temperatur und baryonischer Teilchendichte ρ_0 (in diesem vereinfachten Modell: mittlere Anzahl der Quarks geteilt durch N_c) dargestellt. Letztere hängt mit T, μ und der Konstituenten-Quarkmasse über

$$\rho_0 = 2N_f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\tilde{n}_-(\varepsilon_M; T, \mu) - \tilde{n}_+(\varepsilon_M; T, \mu)] \quad (6.10)$$

zusammen. Dies ist der homogene Anteil aus Gl. (4.78) mit $\Gamma = 1/N_c$, wobei die Summation über die Energiezustände, die auf das Volumen normiert sind, entsprechend Gl. (6.1) durch die Integration über die Impulseigenzustände ersetzt wurde. Der Seeanteil der Teilchendichte des homogenen Mediums in Gl. (4.77) gibt keinen Beitrag zur Teilchendichte.

Für $T = 0$ zeigt sich für nicht allzu hohe Dichten eine näherungsweise lineare Abnahme der Konstituenten-Quarkmasse, und damit des Quarkkondensates, bei Erhöhung der

**Bild 6-2:**

Die Konstituenten-Quarkmasse M (Quasiteilchenmasse) in Abhängigkeit von baryonischer Teilchendichte ρ_0 (in Einheiten der Dichte normaler Kernmaterie $\rho_{nm} = 0.16 \text{ fm}^{-3}$) und Temperatur T des Mediums, wie sie sich aus der Gap-Gleichung (Gl. (6.7)) und der Gleichung für die Teilchendichte (Gl. (6.10)) ergibt.

Baryonendichte in Übereinstimmung mit dem "Low density Theorem" [71–73]. Für die Dichte normaler Kernmaterie $\rho_{nm} = 0,16 \text{ fm}^{-3}$ erhalten wir eine Reduktion des Quarkkondensats von etwa 25 Prozent. Vergleiche mit Gitterrechnungen sind noch nicht möglich, wegen der dort auftretenden Schwierigkeiten bei $\mu \neq 0$ [74].

Für $\rho_0 = 0$ finden wir für kleine Temperaturen erst ein flaches Plateau in der Konstituenten-Quarkmasse, bevor sie dann stark abfällt. Ein ähnliches Verhalten in der Nähe des Phasenübergangs ergibt sich in Gitterrechnungen [7, 8]. Das Verhalten für kleine Temperaturen ist verschieden von den Resultaten der chiralen Störungstheorie [75–77], die ein Abnehmen des Kondensates mit dem Quadrat der Temperatur voraussagen. In [78] ist gezeigt, daß bei Mitnahme der 1-Meson-Schleife (dieses geht über die Näherung des mittleren Feldes hinaus) die Resultate der chiralen Störungstheorie reproduziert werden können.

Im folgenden geben wir noch eine vereinfachte Abschätzung der kritischen Temperatur und der kritischen Teilchendichte, bei der die Konstituenten-Quarkmasse stark abfällt, d. h. die chirale Symmetrie wiederhergestellt wird.

6.2 Abschätzung der kritischen Temperatur

Um die Werte von Temperatur und chemischem Potential abschätzen zu können, bei denen die Konstituenten-Masse stark abfällt, betrachten wir den Fall $m = 0$. Ein endlicher Wert der Strommasse m verschiebt zwar den Punkt an dem $M = m$ exakt erfüllt ist nach $T \rightarrow \infty$ oder $\mu \rightarrow \infty$ (falls Medium - und Seeanteil einheitlich regularisiert werden),

aber die eigentlich interessanten Werte von T und μ , bei dem M stark abfällt, sind nahezu unabhängig vom Wert der Strommasse, wenn diese nur klein gegenüber der Konstituenten-Quarkmasse bei $T = \mu = 0$ ist.

Wir betrachten den Fall $\mu = 0$, d. h. die Anzahl von Quarks und Antiquarks ist gleich und die Teilchendichte verschwindet. Für den Anteil der reellen Quarks und Antiquarks zum effektiven Potential (Gl. (6.4)) erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\text{q,med}} &= -4N_f N_c T \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \ln(1 + e^{-\varepsilon_M/T}) \\ &= -4N_f N_c T^4 \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln[1 + e^{-(x^2+a^2)^{1/2}}] \end{aligned} \quad (6.11)$$

mit $a = M/T$. Im zweiten Ausdruck auf der rechten Seite wurde die Ersetzung $x = p/T$ vorgenommen. Hier setzt sich p nur aus den räumlichen Impulskomponenten zusammen: $p = \sqrt{\mathbf{p}^2}$. Wir nehmen nun an, daß wir in dem Gebiet sind, in dem die Konstituenten-Quarkmasse schon stark abgefallen ist und entwickeln den Ausdruck nach $a^2 \ll 1$ (Hochtemperatur-Entwicklung). Die ersten zwei Terme bereiten keine Schwierigkeiten, wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\text{q,med}} \Big|_{a^2=0} &= -4N_f N_c T^4 \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln(1 + e^{-x}) = -4N_f N_c \frac{7\pi^2}{720} T^4, \\ \frac{\partial \mathcal{V}^{\text{q,med}}}{\partial a^2} \Big|_{a^2=0} &= 4N_f N_c T^4 \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dx x \frac{1}{1 + e^x} = 4N_f N_c \frac{T^4}{48}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Der nächste Term in der Entwicklung des effektiven Potentials nach a^2 ist schon komplizierter. Um diesen Term zu erhalten folgen wir Referenz [47] und betrachten die zweite Ableitung des Potentials (Gl. (6.11)) nach a^2

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{(\partial a^2)^2} \mathcal{V}^{\text{q,med}} &= 4N_f N_c T^4 \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \frac{1}{1 + e^{(x^2+a^2)^{1/2}}} \right] \\ &= -4N_f N_c T^4 \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dx \frac{1}{(x^2 + a^2)^{1/2}} \frac{1}{1 + e^{(x^2+a^2)^{1/2}}} \\ &\equiv -4N_f N_c T^4 \frac{1}{8\pi^2} I(a), \end{aligned} \quad (6.13)$$

wobei wir zwischendurch eine partielle Integration mit Hilfe der Beziehung $x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{1}{2} x \frac{\partial}{\partial x}$ durchgeführt haben. Für das Integral $I(a)$ ist nun eine Entwicklung nach a zu finden. Dazu wird $I(a)$ mit $x^{-\epsilon}$ ($1 > \epsilon > 0$) multipliziert und die Entwicklung $\frac{1}{1 + e^{(x^2+a^2)^{1/2}}} = \frac{1}{2} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2+a^2)^{1/2}}{(2n+1)^2 \pi^2 + x^2 + a^2}$ (Gl. (B.3)) genutzt. Nachdem man Term für Term integriert wird am Ende $\epsilon \rightarrow 0$ gesetzt. Einzelheiten dieser Rechnungen sind im Anhang von Referenz [47] zu finden. Wir geben hier gleich das Ergebnis für das Integral an

$$I(a) = -\frac{1}{2} \ln \frac{a}{\pi} - \frac{1}{2} c + O(a^2), \quad (6.14)$$

wobei $c=0.5772\dots$ die Euler-Konstante ist. Zweimalige Integration der Beziehung (6.13) über a^2 ergibt dann mit Gl. (6.14) die folgende Näherung für das Potential (Gl. (6.11))

$$\mathcal{V}^{\text{q,med}} = -4N_f N_c T^4 \frac{1}{8\pi^2} \left\{ C_0 + C_1 a^2 - \frac{1}{4} a^4 \left[\ln \left(\frac{a}{\pi} \right) + c - \frac{3}{4} \right] \right\} + \dots \quad (6.15)$$

Die Terme mit den Integrationskonstanten C_0 und C_1 sind uns aufgrund der Beziehungen in Gl. (6.12) schon bekannt. Man erhält zusammenfassend

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{\text{q,med}}(M)(T) = & -4N_f N_c \frac{7\pi^2}{720} T^4 + 4N_f N_c \frac{M^2 T^2}{48} \\ & + 4N_f N_c \frac{M^4}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{M}{\pi T} \right) + c - \frac{3}{4} \right] + \dots \quad (6.16) \end{aligned}$$

Zur Abschätzung der kritischen Temperatur berücksichtigen wir nur die ersten zwei Terme in Gl. (6.16) und setzen dies in die Berechnung des effektiven Potentials (Gl. (6.5)) ein

$$\mathcal{V}_\Lambda(M)(T) = \frac{1}{2G} M^2 + \frac{4N_f N_c}{32\pi^2} M^4 \Gamma(-2, (M/\Lambda)^2) - 4N_f N_c \frac{7\pi^2}{720} T^4 + 4N_f N_c \frac{M^2 T^2}{48} \quad (6.17)$$

Daraus ergibt sich für die Gap-Gleichung (Gl. (6.6)) mit $\frac{d}{dM}[M^4 \Gamma(-2, (M/\Lambda)^2)] = -2M^3 \Gamma(-1, (M/\Lambda)^2)$, was man mit Hilfe von Gl. (4.24) erhalten kann

$$M \left[\frac{1}{G} - \frac{4N_f N_c}{16\pi^2} M^2 \Gamma(-1, (M/\Lambda)^2) + 4N_f N_c \frac{T^2}{24} \right] = 0 \quad (6.18)$$

Diese Gleichung hat offensichtlich die beiden Lösungen

$$\begin{aligned} 1. \quad & M_1 = 0 \\ 2. \quad & \frac{1}{G} - \frac{4N_f N_c}{16\pi^2} \Lambda^2 \left(\frac{M_2}{\Lambda} \right)^2 \Gamma(-1, (M_2/\Lambda)^2) + 4N_f N_c \frac{T^2}{24} = 0 \quad (6.19) \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\left(\frac{M_2}{\Lambda} \right)^2 \Gamma(-1, (M_2/\Lambda)^2)$ kann nicht größer als Eins werden, wegen der Beziehung $a \Gamma(-1, a) \equiv a \int_a^\infty ds s^{-2} e^{-s} < a \int_a^\infty ds s^{-2} = 1$ mit $a > 0$, so daß die 2. Lösung in Gl. (6.19) mit $M_2 \neq 0$ überhaupt nur so lange existieren kann wie

$$\frac{1}{G} + 4N_f N_c \frac{T^2}{24} < \frac{4N_f N_c}{16\pi^2} \Lambda^2 \quad (6.20)$$

bzw.

$$T < T_c = \sqrt{\frac{3\Lambda^2}{2\pi^2} - \frac{24}{4N_f N_c G}} \quad (6.21)$$

gilt. Oberhalb der Temperatur T_c verbleibt nur noch die Lösung $M_1=0$. In dieser Schärfe gilt dies natürlich nur für $m=0$. Für unseren verwendeten Parametersatz, Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse $M_{\text{vak}}=420 \text{ MeV} \implies \Lambda=636 \text{ MeV}$, $G=42, 8 \text{ GeV}^{-2}$ ergibt sich

$T_c = 195 \text{ MeV}$. Wir betrachten jetzt die Eigenschaften der zwei Lösungen in Gl. (6.19) genauer.

Für $T < T_c$ entspricht die Lösung $M_1 = 0$ dem lokalen Maximum des effektiven Potentials (Gl. (6.17)) und damit einer instabilen Gleichgewichtslage. Dies ergibt sich aus der Betrachtung der zweiten Ableitung von Gl. (6.17). Mit Hilfe der Beziehung $\frac{d}{dM}[M^2 \Gamma(-1, (M/\Lambda)^2)] = -2M \Gamma(0, (M/\Lambda)^2)$ erhält man

$$\frac{d^2 \mathcal{V}_\Lambda(M)(T)}{dM^2} = \frac{1}{G} - \frac{4N_f N_c}{16\pi^2} M^2 \Gamma(-1, (M/\Lambda)^2) + 4N_f N_c \frac{T^2}{24} + \frac{4N_f N_c}{8\pi^2} M^2 \Gamma(0, (M/\Lambda)^2). \quad (6.22)$$

Benutzt man $\lim_{a \rightarrow 0} a \Gamma(0, a) = 0$ und $\lim_{a \rightarrow 0} a \Gamma(-1, a) = 1$, so ergibt sich

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{V}_\Lambda(M)(T)}{dM^2} \right|_{M=M_1=0} = \frac{1}{G} - \frac{4N_f N_c}{16\pi^2} \Lambda^2 + 4N_f N_c \frac{T^2}{24} = \begin{cases} < 0 & : T < T_c \\ > 0 & : T > T_c \end{cases}. \quad (6.23)$$

Wenn die Temperatur unterhalb der kritischen Temperatur liegt, ist die stabile Gleichgewichtslage durch die 2. Lösung in Gl. (6.19) mit $M_2 \neq 0$ gegeben, die dem lokalen Minimum des effektiven Potentials entspricht. Aus Gl. (6.19) und Gl. (6.22) folgt nämlich

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{V}_\Lambda(M)(T)}{dM^2} \right|_{M=M_2} = \frac{4N_f N_c}{8\pi^2} M_2^2 \Gamma(0, (M_2/\Lambda)^2) > 0 \quad (6.24)$$

für $M_2 \neq 0$. Da außer $M_1 = 0$ kein weiteres lokales Maximum des effektiven Potentials (Gl. (6.17)) existiert, muß es sich bei dem lokalen Minimum auch um das absolute Minimum des effektiven Potentials handeln. Das System wird daher den Zustand mit $M_2 \neq 0$ einnehmen. Dies ist auch der Mechanismus einer spontanen Symmetriebrechung.

Für $T = T_c$ gilt $M_2 = 0$ und für $T > T_c$ verbleibt als einzige Lösung $M_1 = 0$, die dann ebenfalls dem absoluten Minimum des Potentials entspricht und masselose Fermionen beschreibt, bei denen die chirale Symmetrie des Zustandes wiederhergestellt ist.

6.3 Abschätzung des kritischen chemischen Potentials

Im folgenden betrachten wir kalte ($T=0$) und dichte Quarkmaterie mit einer verschwindenden Quarkstrommasse $m=0$. Analog zu einer kritischen Temperatur im vorangegangenen Abschnitt läßt sich auch ein kritischer Wert für das chemische Potential (oder äquivalent eine kritische Teilchendichte) abschätzen, ab der die effektive Masse der Fermionen verschwindet (nur noch die triviale Lösung $M_1=0$ übrigbleibt).

Für den Mediumanteil am effektiven Potential (Gl. (6.4)) erhält man nach partieller Integration und der Betrachtung $T \rightarrow 0$

$$\mathcal{V}^{\text{q.med}}(M)(\mu) = -2N_f N_c \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^4}{\varepsilon_M} \Theta(\mu - \varepsilon_M) = -2N_f N_c \frac{1}{6\pi^2} \int_0^{\sqrt{\mu^2 - M^2}} dp \frac{p^4}{\sqrt{p^2 + M^2}}$$

$$= -2N_f N_c \frac{\mu^4}{24\pi^2} \left[\sqrt{1 - (M/\mu)^2} \right]^3 + 2N_f N_c \frac{M^2 \mu^2}{16\pi^2} \sqrt{1 - (M/\mu)^2} - 2N_f N_c \frac{M^4}{16\pi^2} \ln \left\{ \left(\frac{\mu}{M} \right) \left[1 + \sqrt{1 - (M/\mu)^2} \right] \right\}, \quad (6.25)$$

wobei wir $\int dx \frac{x^4}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} \left(\frac{x^3}{4} - \frac{3a^2 x}{8} \right) + \frac{3}{8} a^4 \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$ verwendet haben. Berücksichtigen wir nur die ersten zwei Terme und nehmen dort eine Entwicklung nach $(M/\mu) \ll 1$ vor, so ergibt sich mit $[1 - (M/\mu)^2]^{3/2} = 1 - \frac{3}{2}(M/\mu)^2 + O((M/\mu)^4)$ bis zur Ordnung $\mu^4 (M/\mu)^2$

$$\mathcal{V}^{\text{q,med}}(M)(\mu) = -2N_f N_c \frac{\mu^4}{24\pi^2} + 2N_f N_c \frac{M^2 \mu^2}{8\pi^2}. \quad (6.26)$$

Für das gesamte effektive Potential (Gl. (6.5)) erhalten wir mit dieser Näherung

$$\mathcal{V}_\Lambda(M)(\mu) = \frac{1}{2G} M^2 + \frac{4N_f N_c}{32\pi^2} M^4 \Gamma(-2, (M/\Lambda)^2) - 2N_f N_c \frac{\mu^4}{24\pi^2} + 2N_f N_c \frac{M^2 \mu^2}{8\pi^2}. \quad (6.27)$$

Dies ist die analoge Beziehung zu Gl. (6.17). Für die Gap-Gleichung erhält man anstelle von Gl. (6.18) den Ausdruck

$$M \left[\frac{1}{G} - \frac{4N_f N_c}{16\pi^2} M^2 \Gamma(-1, (M/\Lambda)^2) + 2N_f N_c \frac{\mu^2}{4\pi^2} \right] = 0 \quad (6.28)$$

mit den zwei möglichen Lösungen

1. $M_1 = 0$
2. $\frac{1}{G} - \frac{4N_f N_c}{16\pi^2} \Lambda^2 \left(\frac{M_2}{\Lambda} \right)^2 \Gamma(-1, (M_2/\Lambda)^2) + \frac{2N_f N_c}{4\pi^2} \mu^2 = 0.$ (6.29)

Da der Ausdruck $\left(\frac{M_2}{\Lambda} \right)^2 \Gamma(-1, (M_2/\Lambda)^2)$ nicht größer als Eins werden kann, existiert die 2. Lösung nur solange wie

$$\frac{1}{G} + \frac{2N_f N_c}{4\pi^2} \mu^2 < \frac{4N_f N_c}{16\pi^2} \Lambda^2 \quad (6.30)$$

bzw.

$$\mu < \mu_c = \sqrt{\frac{\Lambda^2}{2} - \frac{8\pi^2}{4N_f N_c G}} \quad (6.31)$$

gilt. Für $\mu = \mu_c$ gilt $M_2 = 0$ und für μ oberhalb μ_c bleibt dann nur die Lösung $M_1 = 0$. Für $\mu < \mu_c$ entspricht die Lösung $M_2 \neq 0$ dem Minimum des effektiven Potentials (Gl. (6.27)), und $M_1 = 0$ entspricht einem lokalen Maximum. Das System wird daher den Zustand mit $M_2 \neq 0$ bevorzugen. Die Argumentation ist völlig analog zum vorangegangenen Abschnitt, wenn man dort μ_c anstatt T_c verwendet.

Für $\mu > \mu_c$ verbleibt als einzige Lösung $M_1 = 0$, die dann ebenfalls dem absoluten Minimum des Potentials entspricht und masselose Quarks beschreibt. Neben der Erhöhung der Temperatur kann somit auch ein Erhöhung des chemischen Potentials (bzw. der Teilchendichte) zur Wiederherstellung der chiralen Symmetrie des Zustandes führen.

Zusammen mit Gl. (6.21) ergibt sich eine Beziehung zwischen der kritischen Temperatur und dem kritischen chemischen Potential

$$\frac{\mu_c}{T_c} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}, \quad (6.32)$$

die unabhängig vom speziellen Wert des Regularisierungsparameters Λ ist. Mit unserem Parametersatz führt dies auf $\mu_c = 354 \text{ MeV}$. Für $T = 0$ und $M_2 = 0$ ergibt sich dann die kritische baryonische Teilchendichte zu $\rho_c = 2N_f \mu_c^3 / 6\pi^2 = 0,39 \text{ fm}^{-3}$. Dies entspricht etwa dem zweieinhalbfachen der Dichte normaler Kernmaterie.

Mit einem analogen Vorgehen kann man für den Vakuumzustand ($T = \mu = 0$) eine kritische Kopplungsstärke G_c angeben. Erst für $G > G_c$ ist eine nichttriviale Lösung für M möglich, was zur spontanen chiralen Symmetriebrechung des Vakuumzustandes führt. Die Wechselwirkung zwischen den Quarks und Antiquarks muß also stark genug sein, um die Bildung eines Vakuum-Quarkkondensates $\langle 0 | \hat{q}\hat{q} | 0 \rangle$ zu ermöglichen. Diese kritische Kopplungskonstante kann man auch aus den Gleichungen (6.21) und (6.31) erhalten. Damit der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, muß gelten: $G > G_c = \frac{16\pi^2}{4N_f N_c \Lambda^2}$.

7 Numerische Ergebnisse für solitonische Feldkonfigurationen

Die mittleren Felder $\phi_a(\mathbf{r}) = (\sigma(r), \pi(r)\hat{r})$ sind selbstkonsistent aus den Quarkfeldern zu bestimmen. Man startet eine iterative Rechnung mit einem Startprofil $\theta_1(r)$ (siehe Kapitel 4.2.2), das die Startfelder $\phi_{a,1}(\mathbf{r})$ festlegt und den Einteilchen-Quark-Hamilton-Operator h in Gl. (4.7) bestimmt, der in einer Basis (siehe Anhang D) diagonalisiert wird. Mit diesem Verfahren erhält man die Energieeigenwerte $\varepsilon_{\alpha,1}$ und Energieeigenfunktionen $\Phi_{\alpha,1}(\mathbf{r})$ der Quarks. Aufgrund der Bewegungsgleichungen (Gln. (4.44-4.46)) ist man dann in der Lage, einen neuen chiralen Winkel $\theta_2(r)$ auszurechnen, und der ganze Prozeß wird bis zur Konvergenz wiederholt. Die Möglichkeit, daß solche stabilen Feldkonfigurationen existieren, wurde für den Fall $T = 0, \mu = 0$ (Soliton im QCD-Vakuum, d. h. in Gl. (4.44) und Gl. (4.45) bleiben von dem Mediumbeitrag mit den mittleren Besetzungszahlen \bar{n} entsprechend Gl. (4.79) nur die Ausdrücke für die Valenzquarks übrig), erstmals in den Arbeiten [79-81] gezeigt. Diese *ortsabhängigen selbstkonsistenten* Lösungen werden *solitonische* Feldkonfigurationen des SU(2)-NJL-Modells genannt.

Abschnitt 7.1 gibt den Temperatur- und Dichtebereich für die Existenz solcher Feldkonfigurationen an. Die selbstkonsistenten mittleren Felder werden in Kapitel 7.2 gezeigt. Der Abschnitt 7.3 beschäftigt sich mit der räumlichen Verteilung der Teilchendichte des

Solitons und enthält eine Diskussion zur Einführung verschiedener chemischer Potentiale zur Fixierung der Baryonenzahl des Solitons. In Kapitel 7.4 sind schließlich die Energien des Solitons angegeben.

7.1 Temperatur- und Dichtebereich für solitonische Lösungen

Als erstes wird diskutiert in welchem Temperatur- und Dichtebereich überhaupt solitonische Feldkonfigurationen, d. h. selbstkonsistente ortsabhängige Lösungen der Bewegungsgleichungen (Gl. (4.43)), existieren. Einen Überblick gibt die Abbildung 7-1.

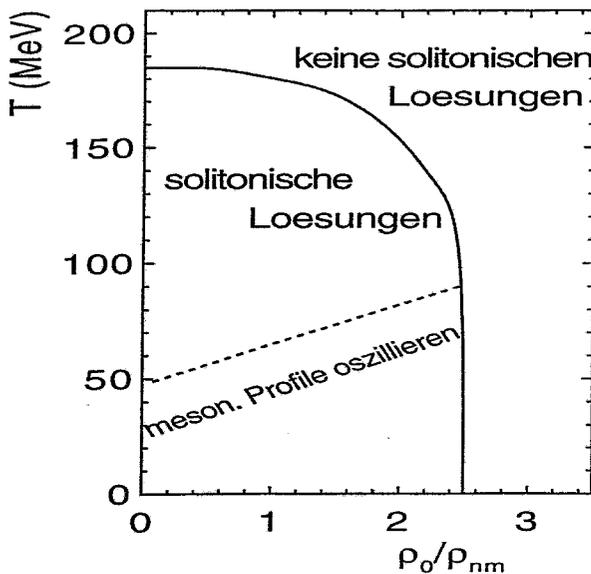


Bild 7-1:

Temperatur- und Dichtebereich, in dem solitonische Feldkonfigurationen, d. h. selbstkonsistente ortsabhängige Lösungen der Feldgleichungen (Gl. (4.44-4.46)), existieren.

Für eine Baryondichte der Umgebung größer als ungefähr das Zweifache normaler Kerndichte $\rho_{nm} = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ wurden numerisch keine ortsabhängigen Meanfield-Lösungen gefunden. Es verbleibt dann nur noch die homogene Lösung mit verschwindendem chiralen Winkel ($\theta \equiv 0$). Für kleine Teilchendichten findet man solitonische Lösungen bis etwa $T \approx 180$ MeV. Mit zunehmender Teilchendichte nimmt die Temperatur, bis zu der man Lösungen erhält, langsam ab, und sie beträgt bei $2\rho_{nm}$ etwa $T \approx 150$ MeV. Diese Beobachtungen stimmen mit den erhaltenen Ergebnissen in der Arbeit [16] überein. Für kleine Temperaturen in der Größenordnung $T \lesssim 50$ MeV aber endlicher Teilchendichte $\rho_0 \neq 0$ beobachtet man ein Aufschaukeln von Oszillationen in den mesonischen Feldern bei fortschreitender Iteration der Bewegungsgleichung (Gl. (4.43)), so daß man in diesem Bereich keine stabilen Feldkonfigurationen findet. Möglicherweise steht dies im Zusammenhang mit dem Auftreten von sogenannten Friedel-Oszillationen, wie sie im homogenen NJL-Modell gefunden wurden [37], was auf Instabilitäten hindeutet. Anstelle des exponentiellen Abklingens von mesonischen Korrelationsfunktionen fand man in [37] bei

$T = 0$ Oszillationen, deren Existenz allerdings von Details des Modells, wie der gewählten Regularisierung, abhängt. Aus diesem Grund wird in [37] die Meinung vertreten, daß diese Instabilitäten nicht physikalischen Ursprungs sind. Bei den hier auftretenden Instabilitäten bei kleinen Temperaturen muß man sicherlich noch die für die Numerik verwendete diskrete Basis in Rechnung stellen, die die Behandlung von Problemen mit relativ "scharfer" Fermi-Fläche erschwert. Man kann vermuten, daß die beobachteten Instabilitäten mit den obengenannten Problemen zusammenhängen und nichts mit Physik zu tun haben.

Die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei höheren Temperaturen und Dichten, die in Abschnitt 6 behandelt wurde, und das Verschwinden der solitonischen Lösungen ("Deconfinement") sind zwei unterschiedliche Vorgänge, die nicht notwendigerweise bei den selben Werten von Temperatur und Dichte vor sich gehen müssen. Es ist durchaus denkbar, daß es in der Natur erst zum Deconfinement der Quarks kommt und danach noch massive Quasiteilchen (Konstituentenquarks) übrig bleiben, die erst bei noch höheren Temperaturen das Quarkkondensat "abschütteln" und damit die chirale Symmetrie (näherungsweise) wiederherstellen. In diesem Sinne hat man die Vorstellung, daß die einzelnen Strukturen nacheinander aufgebrochen werden. Vielleicht treten aber auch viel exotischere Vorgänge in Erscheinung [34].

In unseren Rechnungen verschwinden die solitonischen Lösungen bei solchen Temperaturen und Dichten, bei denen die Konstituenten-Quarkmasse etwa auf die Hälfte des Vakuumwertes gefallen ist. Dies ist auch der Bereich, in dem die Konstituenten-Quarkmasse anfängt stark abzufallen (siehe auch Abbildung 6-2). Qualitativ kann man das folgendermaßen verstehen. Die Konstituenten-Quarkmasse bestimmt die Amplitude der mittleren mesonischen Felder, in denen sich die Quarks bewegen, d. h. die Tiefe des skalaren Potentials σ , welches hauptsächlich für die Bindung der Valenzquarks verantwortlich ist, da es im gesamten Raumgebiet anziehend wirkt. Wird der Potentialtopf flacher, so wandert der gebundene Zustand in diesem Potentialtopf nach oben - in Richtung Kontinuum - zu den ungebundenen Einteilchenzuständen. Ab einem bestimmten Wert der Teilchendichte und Temperatur ist dann durch die Abnahme der Konstituenten-Quarkmasse einfach nicht mehr genug "Volumen" im Potentialtopf, um einen gebundenen Zustand zu ermöglichen. Diese Eigenschaft basiert auf der Heisenbergschen Unschärferelation. Die Tiefe des Potentials bestimmt die Unschärfe des Impulses der Valenzquarks und die örtliche Ausdehnung des Potentials ist verknüpft mit deren Unbestimmtheit im Raum. Das Produkt aus der Breite und Tiefe des Potentials kann nun nicht beliebig klein gemacht werden.

7.2 Selbstkonsistenter chiraler Winkel und Mesonenfelder

Die Abbildung 7-2 zeigt den selbstkonsistenten chiralen Winkel $\theta(r)$ aus Gl. (4.46) in Abhängigkeit von Baryonendichte und Temperatur der Umgebung. Bei verschwindender Teilchendichte ($\rho_0 = 0$) erkennt man die Zunahme der räumlichen Ausdehnung des chiralen Winkels bei Erhöhung der Temperatur. Deutliche Effekte treten hier allerdings erst bei Temperaturen in Nähe des Verschwindens der solitonischen Lösungen auf. Dies kann man qualitativ verstehen, wenn man die gleichzeitige Abnahme der Konstituenten-Quarkmasse

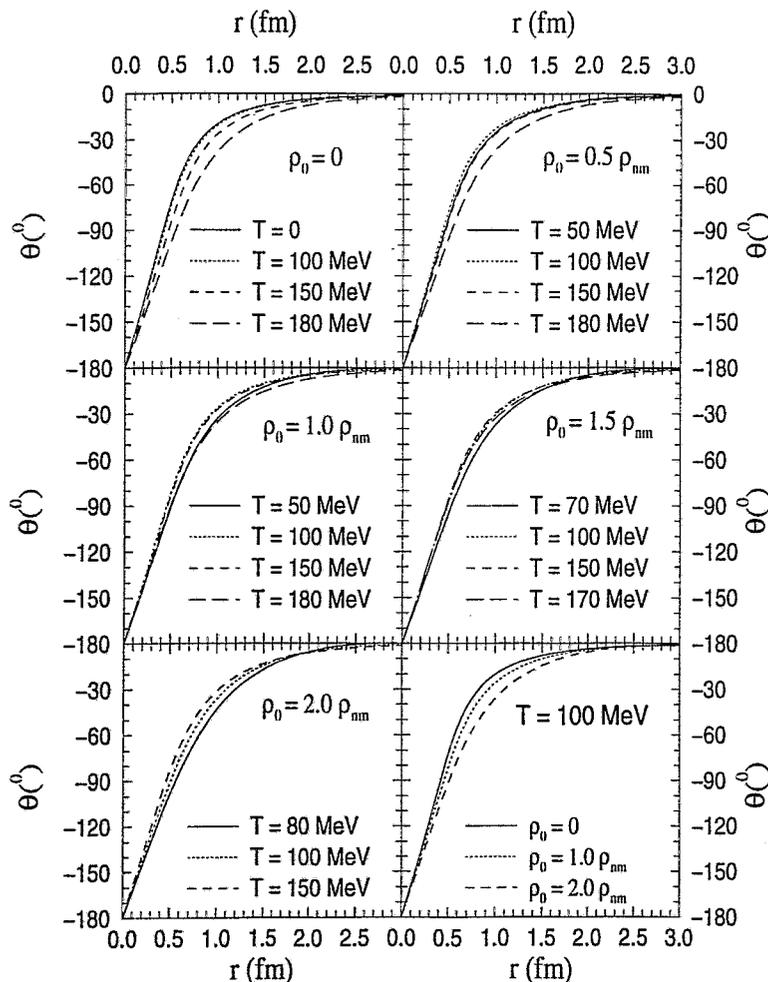


Bild 7-2:

Abhängigkeiten des chiralen Winkels θ (Gl. (4.46)) vom radialen Abstand zum Ursprung des Solitons r , wie sie sich aus den selbstkonsistenten Lösungen bei verschiedenen Umgebungsdichten ρ_0 und variierenden Temperaturen T ergeben. In der rechten unteren Abbildung sind die Profile bei einer konstanten Temperatur für verschiedene Dichten dargestellt.

in Abbildung 6-2 betrachtet. Eine Abnahme der Konstituenten-Quarkmasse bedeutet eine Abnahme der Tiefe des skalaren Potentials, in dem das Valenzniveau gebunden ist. Wird das Potential flacher, so wird ein gebundener Zustand realisiert, indem die räumliche Ausdehnung des Potentials erhöht wird, damit genug "Volumen" im Potentialtopf ist.

Bei endlicher Teilchendichte ist es möglich, daß bei Erhöhung der Temperatur die räumliche Ausdehnung des chiralen Winkel abnimmt. Dies muß man auch im Zusammenhang mit dem Verlauf der Konstituenten-Quarkmasse in Abbildung 6-2 sehen. Bei endlicher Teilchendichte ist $M(T, \rho_0)$ keine mit der Temperatur monoton fallende Funktion, so daß die Potentialtiefe mit Erhöhung der Temperatur durchaus zunehmen kann. Dies kommt auch deutlich bei dem Radialteil der mesonischen Felder in Abbildung 7-3 zum Ausdruck.

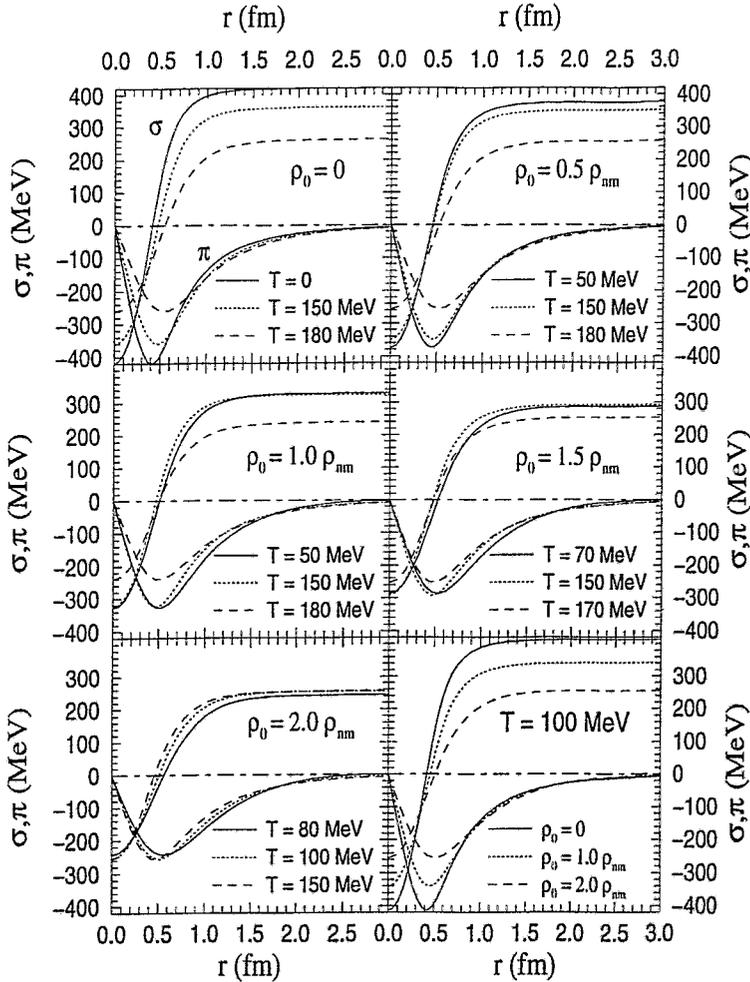


Bild 7-3:

Radialteil der selbstkonsistenten mittleren mesonischen Felder σ (Gl. (4.44)) und π (Gl. (4.45)) in Abhängigkeit vom Abstand zum Ursprung des Solitons r bei unterschiedlichen Teilchendichten ρ_0 und Temperaturen T .

7.3 Baryondichte, Baryonenzahl und mittlerer quadratischer Radius

Die Baryondichte $\rho(r)$ des Solitons besteht aus einem (unregularisierten) See- und einem Mediumanteil

$$\rho(r) = \rho(r)^{\text{q,see}} + \rho(r)^{\text{q,med}}, \quad (7.1)$$

in denen die einzelnen Komponenten aus Gl. (4.77) und Gl. (4.78) mit $\Gamma = 1/N_c$ folgen

$$\rho(r)^{\text{q,see}} = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left[\text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \Phi_{\alpha}^{\dagger}(r) \Phi_{\alpha}(r) - \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) \Phi_{\alpha}^{0\dagger}(r) \Phi_{\alpha}^0(r) \right] \quad (7.2)$$

$$\rho(r)^{\text{q,med}} = \sum_{\alpha} \left[\tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}) \Phi_{\alpha}^{\dagger}(r) \Phi_{\alpha}(r) - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) \Phi_{\alpha}^{0\dagger}(r) \Phi_{\alpha}^0(r) \right]. \quad (7.3)$$

Der mittlere quadratische Radius \bar{R}^2 des Solitons ist gegeben durch

$$\bar{R}^2 = \frac{\int d^3\mathbf{r} r^2 \rho(\mathbf{r})}{\int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r})} = \frac{1}{B} \int d^3\mathbf{r} r^2 \rho(\mathbf{r}). \quad (7.4)$$

Die Abbildung 7-4 zeigt die Baryonendichte, normiert auf die Baryonenzahl des Solitons, für drei verschiedene selbstkonsistente Lösungen. An der Stelle wo die Dichte des

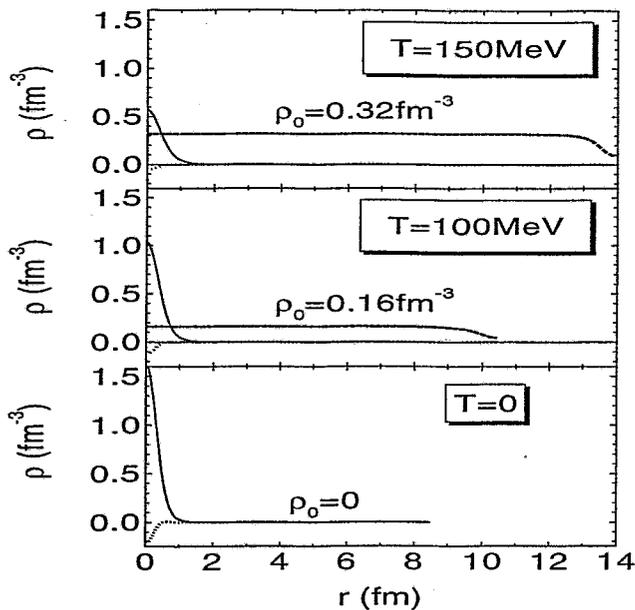


Bild 7-4:

Baryonendichte ρ des Solitons (Gl. (7.1)), normiert auf die Baryonenzahl B , in Abhängigkeit vom radialen Abstand zum Ursprung r für 3 verschiedene Umgebungsbedingungen (ρ_0) und Temperaturen (T). Der gepunkteten Linie entspricht der Seebeitrag aus Gl. (7.2). Die gestrichelte Linie gibt die Dichte des homogenen Mediums ρ_0 (Gl. (6.10)), ebenfalls in der diskreten Basis (Anhang D) berechnet, an. Der Radius der sphärischen Box beträgt $D=18/M$ und ist damit in den gezeigten Fällen unterschiedlich.

homogenen Mediums (ρ_0) abnimmt und abrupt endet, ist das Boxende erreicht. Die Baryonendichte des homogenen Mediums wurde ebenfalls in der diskreten Basis mit einer endlichen Anzahl von Zuständen berechnet. Die Anzahl der Zustände muß groß genug sein, um den Kontinuumslikes in Gl. (6.10) hinreichend genau zu reproduzieren. Bis auf die Region unmittelbar am Kastenende (Relikt der Randbedingung für die Quarkfelder) ist dies in Abbildung 7-4 der Fall. Der Hauptbeitrag zur Lokalisierung der Feldkonfiguration am Ursprung stammt von den gebundenen Valenzquarks. Diese gebundenen Valenzquarks polarisieren die Umgebung. Die gepunktete Linie in Abbildung 7-4 beschreibt den Seebeitrag (Gl. (7.2)) und gibt die Polarisierung der virtuellen Quark-Antiquark-Fluktuationen an. Diese ist am stärksten im Zentrum des Solitons, wo dieser Anteil negativ wird, d. h. die Anzahl der Antiquarks überwiegt (dadurch Abschirmung der Valenzquarks). Um diese Quark-Antiquark-Fluktuationen zu spüren, muß man somit tief in das Soliton eindringen, so wie das bei tief inelastischen Lepton-Nukleon Streuungen der Fall ist. Die Tiefe des Loches beträgt größenordnungsmäßig etwa $1/10$ der Baryonendichte des Solitons am Ursprung. Am Rand des Loches gibt es einen kleinen positiven Beitrag der Seequarks zur

Dichte, was zu einem insgesamt positiven Beitrag zum mittleren quadratischen Radius führt. Die Seequarks liefern keinen Beitrag zur Baryonenzahl, da das Volumenintegral über Gl. (7.2) verschwindet. Abbildung 7-4 verdeutlicht auch die abnehmende Lokalisierung der solitonischen Feldkonfiguration mit zunehmender Baryondichte der Umgebung (swelling).

Neben den Seequarks werden beim Soliton im Medium auch die reellen Quarks und Antiquarks des umgebenden Mediums polarisiert. Diese Polarisation ist ungefähr eine Größenordnung kleiner als die Polarisation der Seequarks und ist deshalb in Abbildung 7-4 nicht sichtbar. Ein vergrößerter Ausschnitt (Bild 7-5) macht dies aber deutlich. Die

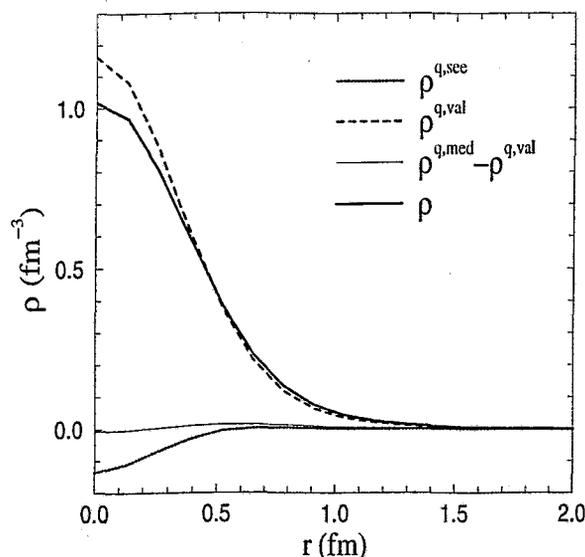


Bild 7-5:

Baryondichte ρ (Gl. (7.1)) und ihre Komponenten (Gl. (7.2), (Gl. (7.3)) in Abhängigkeit vom radialen Abstand zum Ursprung des Solitons r für die selbstkonsistente Lösung bei der Umgebungsdichte $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ und einer Temperatur $T = 100 \text{ MeV}$. Die Baryondichte der Valenzquarks $\rho(r)^{q,\text{val}} = \Phi_{\text{val}}^\dagger(r)\Phi_{\text{val}}(r)$ ist ein Bestandteil der Mediumdichte $\rho(r)^{q,\text{med}}$.

Polarisation der Mediumquarks (ohne die Valenzquarks) ist im größeren Abstand zum Ursprung lokalisiert, so daß dadurch der mittlere quadratische Radius wesentlich beeinflusst wird. Diese zusätzliche Polarisation liefert einen temperatur- und dichteabhängigen Beitrag zur Baryonenzahl, die dadurch im allgemeinen verschieden von Eins ist. Die numerischen Ergebnisse für die Baryonenzahl sind zusammen mit den Energien des Solitons in der späteren Abbildung 7-8 dargestellt.

Um das Problem, einer von Eins verschiedenen Baryonenzahl des Solitons, zu lösen, wurde in [16] für das inhomogene System mit den ortsabhängigen mesonischen Feldern ein neues chemisches Potential $\mu_s = \mu + \delta\mu$ eingeführt, das verschieden vom chemischen Potential des homogenen Systems μ ist. Um die daraus resultierenden Konsequenzen zu studieren, betrachten wir den Ausdruck für die Baryondichte des Solitons mit den chemischen Potentialen μ_s und μ für die solitonische und homogene Feldkonfiguration

$$\rho(r) = -T \int_0^{1/T} d\tau \text{tr}_{\gamma\tau} \langle r, \tau | [A(\mu_s)^{-1}(h - \mu_s) - A_0(\mu)^{-1}(h_0 - \mu)] | r, \tau \rangle, \quad (7.5)$$

der sich mit Hilfe von Gl. (4.75) und $\Gamma = 1/N_c$ ergibt.

In der asymptotischen Region weit außerhalb des Ursprungs des Solitons ($r \gg R$) können wir $A(\mu_s)^{-1}$ durch $A_0(\mu_s)^{-1}$ und $(h - \mu_s)$ durch $(h_0 - \mu_s)$ ersetzen. Dies erkennt man, wenn man $A(\mu_s)^{-1}$ nach $A_0(\mu_s)^{-1}$ entwickelt (Gradientenentwicklung [82]). Beide Operatoren unterscheiden sich dann durch Terme, die proportional den Abweichungen von σ und π von ihren asymptotischen Werten sind, und durch Terme, die proportional zu den Ableitungen der mesonischen Felder sind. Weit genug vom Zentrum des Solitons entfernt verschwinden beide, und es gilt mit Hilfe von Gl. (4.77) und Gl. (4.78)

$$\begin{aligned} \rho(r \gg R) &= -T \int_0^{1/T} d\tau \operatorname{tr}_{\gamma\tau} \langle \mathbf{r}, \tau | [A_0(\mu_s)^{-1}(h_0 - \mu_s) - A_0(\mu)^{-1}(h_0 - \mu)] | \mathbf{r}, \tau \rangle \\ &= \sum_{\alpha} [\tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu_s) \operatorname{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0) - \tilde{n}(\varepsilon_{\alpha}^0; T, \mu) \operatorname{sign}(\varepsilon_{\alpha}^0)] \Phi_{\alpha}^{0\dagger}(\mathbf{r}) \Phi_{\alpha}^0(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (7.6)$$

und die Dichte verschwindet nur, wenn die chemischen Potentiale μ und μ_s gleich sind. Die Einführung von verschiedenen chemischen Potentialen hat zur Folge, daß man die Besetzungswahrscheinlichkeiten für die Quarks in den *ungebundenen* Zuständen ändert. Diese Quarks tragen zu Dichten in großem Abstand zum Ursprung bei, und ein Teil der Baryonenzahl ist über dem gesamten Raum verschmiert. Man erhält keine wirklich lokalisierte Feldkonfiguration, und der mittlere quadratische Radius divergiert. Da man in der numerischen Rechnung nur innerhalb eines Kastens bestimmter Länge integriert gibt es zwar keine Divergenzen im mittleren quadratischen Radius, aber er wird vom Betrag her sehr groß und ist durch die Kastengröße bestimmt. Solche Probleme traten beim Soliton im Vakuum nicht auf, da man hier nur 3 Quarks im *gebundenen* Valenzniveau hatte, die keinen Beitrag zur Teilchendichte in großen Abständen vom Ursprung liefern. Um eine lokalisierte Abweichung vom homogenen Medium zu erhalten, verwenden wir aus den oben genannten Gründen nur ein chemisches Potential und lassen eine von Eins verschiedene Baryonenzahl zu.

Eine weitere Möglichkeit, die Baryonenzahl des Solitons auf Eins zu fixieren ohne ein neues chemisches Potential einzuführen, wurde in [62] vorgestellt. Hier wurde die regularisierte Baryonenzahl des Solitons im Vakuum betrachtet, die ebenfalls von Eins abweicht (siehe auch Anmerkungen am Ende von Kapitel 4.3). Um die Baryonenzahl auf Eins zu fixieren, verzichtete man auf den chiralen Zirkel (Gl. (4.6)) und führte somit ein weiteres freies Feld ein. Zusätzlich forderte man die Erhaltung der Baryonenzahl, was das Soliton vor dem in den Arbeiten [52, 53] prognostizierten Kollaps bewahrt. Da diese Behandlung über den chiralen Zirkel hinausgeht, wird diese Methode in dieser Arbeit nicht betrachtet.

In Abbildung 7-6 sind die solitonischen Baryondichten bei verschiedenen Dichten und Temperaturen der Umgebung zusammengestellt. Man erkennt die Abnahme der Lokalisierung der solitonischen Feldkonfiguration bei Erhöhung der Teilchendichte der Umgebung. Bei konstanter Umgebungsdichte, aber verschiedenen Temperaturen, ist dieser Zusammenhang nicht immer monoton. Hier kann es vorkommen, daß eine Erhöhung der Temperatur auch zu einer Zunahme der Lokalisierung führt. Dieses Verhalten erkennt

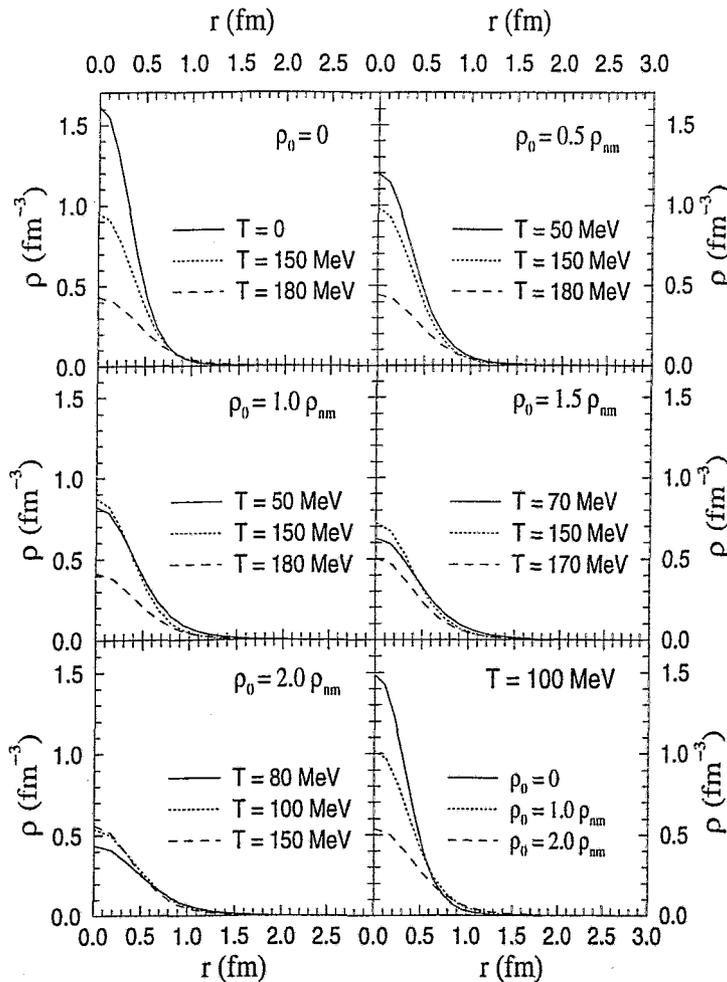


Bild 7-6:

Baryondichte ρ des Solitons (Gl. (7.1)) in Abhängigkeit vom radialen Abstand zum Ursprung r bei unterschiedlichen Baryondichten ρ_0 und Temperaturen T der Umgebung.

man auch bei den mittleren Feldern in Abbildung 7-3 und beim mittleren quadratischen Radius in Abbildung 7-7.

Bei kleinen Temperaturen wächst der mittlere quadratische Radius (r. m. s. Radius) näherungsweise linear mit der Umgebungsdichte (ρ_0). Der r. m. s. Radius des Solitons, eingebettet in ein Medium mit normaler Kerndichte, ist um etwa 20 % größer als im Vakuum. Bei verschwindender Umgebungsdichte nimmt der r. m. s. Radius monoton mit der Temperatur zu. Bei endlichen Umgebungsdichten ist dies nicht mehr der Fall. Hier kommt es bis ca. $T \approx 125$ MeV erst zu einer leichten Abnahme des r. m. s. Radius. Ab Temperaturen größer als $T \approx 125$ MeV gibt es dann einen starken Anstieg, bis es schließlich oberhalb $T \approx 180$ MeV keine solitonischen Lösungen mehr gibt, was den Deconfinementübergang simuliert.

Der r. m. s. Radius wird im wesentlichen durch zwei Effekte bestimmt. Zum einen

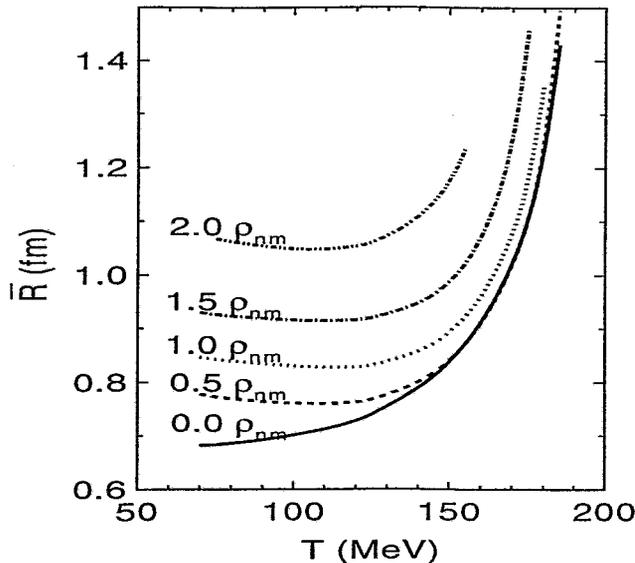


Bild 7-7:

Der mittlere Radius \bar{R} aus Gl. (7.4) des Solitons in Abhängigkeit von der Temperatur bei verschiedenen Umgebungsdichten ρ_0 , die in Einheiten der Dichte normaler Kernmaterie $\rho_{nm} = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ angegeben sind.

skaliert die Ausdehnung der selbstkonsistenten mittleren Felder ungefähr mit dem Inversen der Konstituenten-Quarkmasse $1/M$, was sich entsprechend auf die Baryonendichte auswirkt. Der zweite Effekt kommt von der Polarisation der Umgebung, die in größerem Abstand zum Zentrum des Solitons eine positive Teilchendichte in Bezug zum homogenen Medium hervorruft. Der r. m. s. Radius ist empfindlich für die Teilchendichte in großen Abständen zum Ursprung, da bei der Berechnung die Dichten (Gl. (7.4)) mit r^4 gewichtet werden.

Ein Vergleich unserer Werte für den r. m. s. Radius mit [16] ist nicht problemlos, wegen der dortigen Verwendung von zwei unterschiedlichen chemischen Potentialen, was zu einer von Null verschiedenen Baryonendichte des Solitons bei beliebig großen Entfernungen vom Zentrum des Soliton führt. Im Gegensatz zu [16] finden wir bei Erhöhung der Umgebungsdichte immer eine Erhöhung des r. m. s. Radius für jede Temperatur.

7.4 Energien des Solitons

Die numerisch bestimmte innere Energie des Solitons E (Gl. (4.51)) in Abhängigkeit von den thermodynamischen Parametern der Umgebung ist in Abbildung 7-8 gegeben. Weiterhin ist die dichte- und temperaturabhängige Baryonenzahl B (Gl. (4.49)) im rechten unteren Teilbild dargestellt. Im Temperaturbereich $80 \text{ MeV} \lesssim T \lesssim 180 \text{ MeV}$ liegt sie zwischen 0.8 und 1.2. Für kleinere Temperaturen gibt es bei endlicher Baryonendichte der Umgebung einen starken Anstieg von B . Hier deuten sich bei der Iteration der Bewegungsgleichung schon Oszillationen des chiralen Winkels an, so daß die Ergebnisse in diesem Bereich mit Vorsicht zu betrachten sind. Durch die Bindung der Valenzquarks wird Energie gegenüber dem Zustand des homogenen Mediums gewonnen. Gleichzeitig

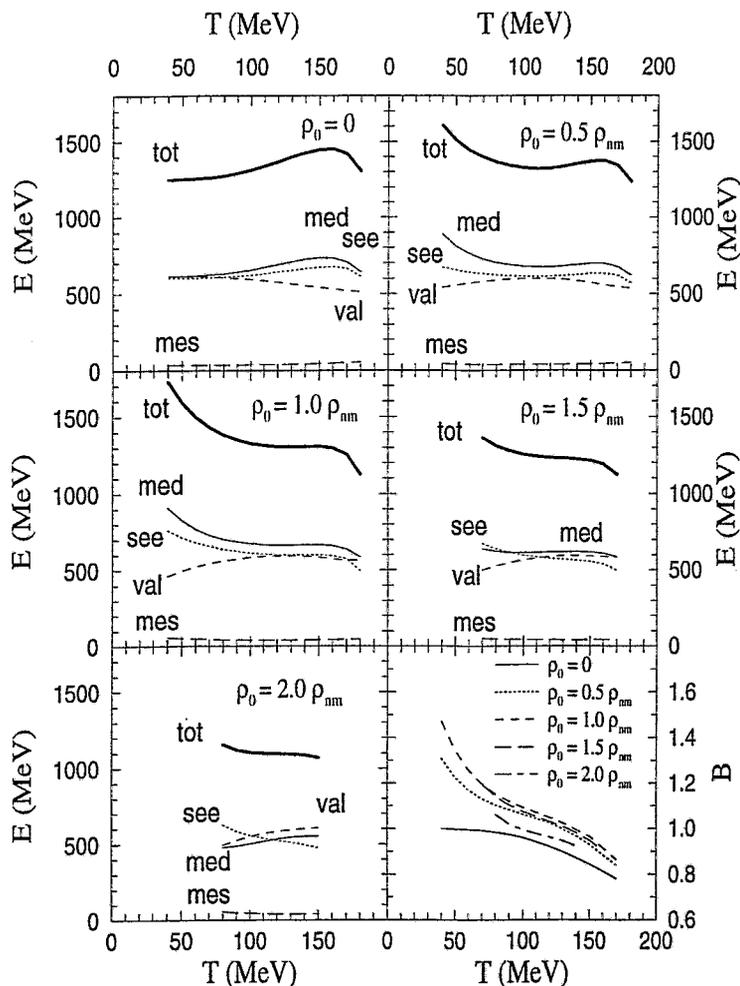


Bild 7-8:

Seebeitrag (see) aus Gl. (4.54), Mediumanteil (med) aus Gl. (4.56) und mesonischer Beitrag (mes) (Gl. (4.53)) zur gesamten (tot) inneren Energie (Gl. (4.51)) des Solitons in Abhängigkeit von der Temperatur bei verschiedenen Baryondichten ρ_0 der Umgebung. Der Beitrag der Valenzquarks $3\varepsilon_{\text{val}}$ (val) zur inneren Energie ist ebenfalls angegeben. Die zu der Feldkonfiguration gehörende temperatur- und dichteabhängige Baryonenzahl (B) (Gl. (4.49)) ist im Teilbild rechts unten zu sehen.

muß aber für die Polarisation der Umgebung ein beträchtlicher Anteil an Energie aufgebracht werden. Der Seeanteil (Gl. (4.54)) macht nahezu 50% der gesamten inneren Energie aus. Der Hauptbeitrag zu der Energie der reellen Quarks kommt von den Valenzquarks $E^{\text{val}} = 3\varepsilon_{\text{val}}$, die relativ unabhängig von der Baryondichte der Umgebung, und damit unabhängig von der Konstituenten-Quarkmasse, bei etwa 500 MeV verharren. Die Energien skalieren keineswegs mit der Konstituenten-Quarkmasse. Kommt das Valenzniveau $\varepsilon_{\text{val}} \approx 500/3$ MeV in die Nähe der oberen Kante des skalaren Potentials, so verschwindet die solitonische Lösung. Der rein mesonische Beitrag (Gl. (4.53)) liefert nur einen kleinen Beitrag zur Gesamtenergie von ca. 50 MeV.

Der Anstieg der Gesamtenergie bei endlichen Umgebungsdichten und kleinen Temperaturen muß im Zusammenhang mit der starken Zunahme der Baryonenzahl gesehen werden.

Ein Teil der inneren Energie wird dem Soliton von dem die Umgebung repräsentie-

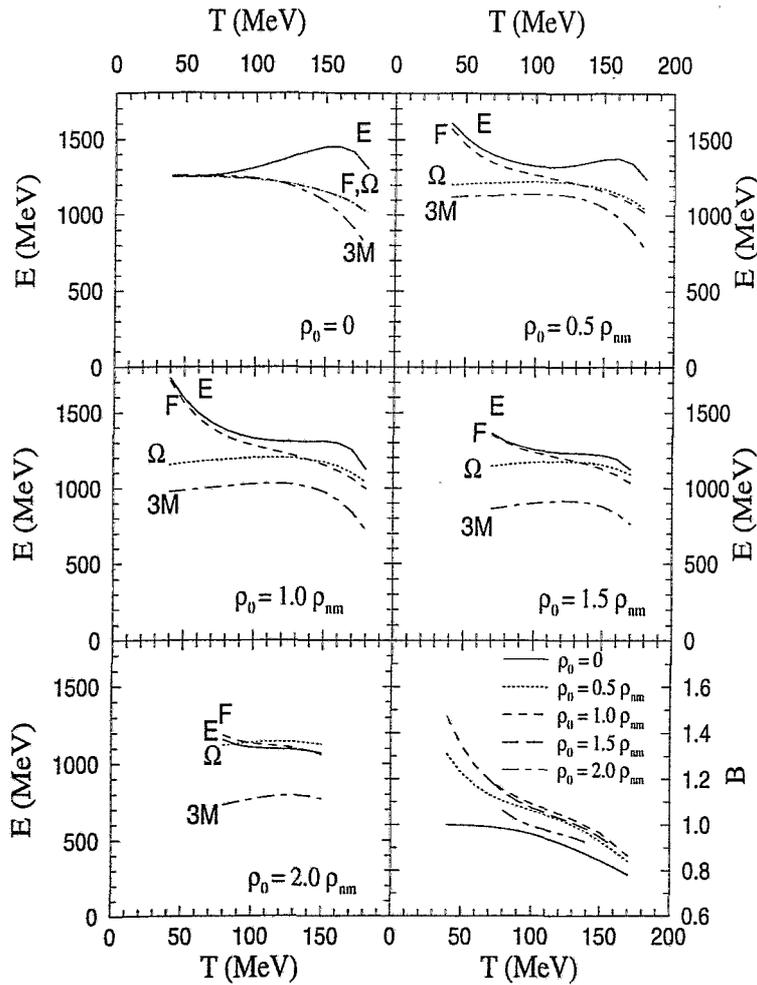


Bild 7-9:

Innere Energie (E) aus Gl. (4.51), freie (F) Feldenergie (Gl. (4.52)) sowie das großkanonische Potential (Ω) (Gl. (4.34)) der solitonischen Feldkonfigurationen in Abhängigkeit von der Temperatur bei verschiedenen Baryondichten der Umgebung (ρ_0). Weiterhin ist das Dreifache der Konstituenten-Quarkmasse ($3M$) angegeben. Die zu der Feldkonfiguration gehörende temperatur- und dichteabhängige Baryonenzahl (B) ist im Teilbild rechts unten zu sehen.

rendem Wärme- und Teilchenbad zur Verfügung gestellt. Aus diesem Grund haben wir zusätzlich die freie Energie F (Gl. (4.52)) und das großkanonische Potential Ω (Gl. (4.34)) in Abbildung 7-9 dargestellt.

Während die innere Energie die gesamte am System zur Erzeugung des Solitons aufzubringende Arbeit darstellt, enthält die freie Energie nicht den Anteil an Wärmemenge, der vom Wärmebad geliefert wird und proportional der Entropieänderung, zwischen inhomogenen und homogenen System, ist. Das großkanonische Potential enthält weiterhin nicht den Anteil an chemischer Arbeit, den das Teilchenbad zur Änderung der Baryonenzahl (Abweichung von Eins) liefert. Dabei ist berücksichtigt, daß das gebundene Valenzniveau des inhomogenen Systems, wegen der Fixierung seiner Besetzungszahl auf Eins, keinen Beitrag zur Entropie liefert und nicht mit dem chemischen Potential μ verknüpft wird. Dadurch wird der Zusammenhang zwischen großkanonischen Potential und freier Energie modifiziert zu $\Omega = F - \mu N_c (B - 1)$. Bei $B=1$ oder $\mu=0$ sind Ω und F gleich.

Mit zunehmender Baryondichte der Umgebung werden die Unterschiede zwischen E , F und Ω immer geringer. Der Unterschied zwischen der inneren Energie und der freien Energie nimmt im allgemeinen mit der Temperatur zu, d. h. es wird verstärkt eine Wärmemenge aus dem Wärmebad aufgenommen. Die Temperaturabhängigkeit des großkanonischen Potentials zeigt ein ähnliches Verhalten wie die Konstituenten-Quarkmasse. Die Dichteabhängigkeit ist jedoch wesentlich geringer. Wir beobachten kein Skalenverhalten, im Gegensatz zu [2, 83], wobei man in diesem Modell aber noch die quasi-klassischen Energiekorrekturen in Kapitel 8 berücksichtigen muß, die erst einen Vergleich mit der Masse des Nukleons ermöglichen.

Ein Vergleich der Ergebnisse mit [16] ist wieder nicht problemlos. Unterschiede im Bereich von einigen hundert MeV resultieren aus Besonderheiten bei der Besetzung des Valenzniveaus (des homogenen Systems) und der bereits erwähnten Einführung unterschiedlicher chemischer Potentiale.

8 Quasi-klassische Energiekorrekturen

Das in den vorangehenden Kapiteln behandelte Soliton beschreibt keine physikalischen Teilchen wie Nukleonen oder Δ -Isobaren. Das liegt daran, daß aufgrund der eingeführten Näherungen die solitonische Lösung kein Eigenzustand von Impuls, Spin und Isospin ist. Als Folge davon existieren, neben den thermischen Fluktuationen aufgrund der Anwesenheit des Mediums, Impuls-, Spin- und Isospinfluktuationen des Solitons, deren kinetische Energien in den Meanfield-Lösungen enthalten sind.

$$\begin{array}{ccc} & \text{quasi-klass.} & \\ \text{Soliton} & \implies & \text{Nukleon, } \Delta \\ & \text{Korrekturen} & \end{array}$$

Zur näherungsweise Bestimmung dieser Energien mit Hilfe des *Pushing*- und *Cranking*-Verfahrens [19], das schon beim Soliton im Vakuum zur Anwendung kam [20, 84, 21], ist die Kenntnis der mit diesen Bewegungen verknüpften Trägheitsmomente notwendig. Die Berechnung von Trägheitsparametern im Medium und die Bestimmung der Energiekorrekturen wird in den folgenden Abschnitten behandelt.

8.1 Impulsfluktuationen und Schwerpunktskorrekturen

Die Näherung des ortsabhängigen mittleren Feldes zerstört die räumliche Translations-symmetrie, was in Abschnitt 3.3 auch dadurch zum Ausdruck kam, daß die Green-Funktion nicht nur von der Differenz $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$, sondern von den Orten \mathbf{r}' und \mathbf{r} einzeln abhängt.

Der Impulsoperator \hat{P} des Solitons vertauscht nicht mit dem Hamilton-Operator, so daß der Impuls keine Erhaltungsgröße des Systems ist.

Das wollen wir im folgenden kurz zeigen. Dazu benutzen wir Operatoren (in 2. Quantisierung) in Heisenberg-Darstellung für imaginäre Zeiten

$$\hat{O}(\tau) = \int d^3\mathbf{r} \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau) o \hat{q}(\mathbf{r}, \tau) \quad (8.1)$$

mit den Matsubara-Operatoren \tilde{q} und \hat{q} aus Gl. (3.31). Den Einteilchen-Operator o nehmen wir als zeitunabhängig an, da später nur solche Operatoren, wie z. B. der Impuls $o = \mathbf{p}$, betrachtet werden. Bildet man die Zeitableitung und benutzt die Bewegungsgleichung (Gl. (3.37)) für \tilde{q} und \hat{q} , so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \hat{O}(\tau) = [\hat{H} - \mu \hat{N}, \hat{O}(\tau)] . \quad (8.2)$$

Wenn also \hat{O} mit dem Hamilton-Operator $\hat{H} = \int d^3\mathbf{r} \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau) h \hat{q}(\mathbf{r}, \tau)$ und dem Teilchenzahloperator $\hat{N} = \int d^3\mathbf{r} \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau) \hat{q}(\mathbf{r}, \tau)$ vertauscht, handelt es sich um eine Erhaltungsgröße.

Für die Vertauschung des Impulsoperators des Solitons ($\hat{P}(\tau) = \int d^3\mathbf{r} \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{p} \hat{q}(\mathbf{r}, \tau)$) mit dem Hamilton-Operator ergibt sich die Beziehung

$$[\hat{H}, \hat{P}] = \int d^3\mathbf{r} [\hat{H}, \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau) \mathbf{p} \hat{q}(\mathbf{r}, \tau)] , \quad (8.3)$$

was sich unter Ausnutzung der Beziehung $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$ mit $A = \hat{H}$, $B = \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau)$ und $C = \mathbf{p} \hat{q}(\mathbf{r}, \tau)$ schreiben läßt als

$$[\hat{H}, \hat{P}] = \int d^3\mathbf{r} \left\{ [\hat{H}, \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau)] \mathbf{p} \hat{q}(\mathbf{r}, \tau) + \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau) [\hat{H}, \mathbf{p} \hat{q}(\mathbf{r}, \tau)] \right\} . \quad (8.4)$$

Bei dem zweiten Kommutator auf der rechten Seite der obigen Gleichung kann der Differentialoperator \mathbf{p} vor den Kommutator gezogen werden, da \hat{H} nicht von \mathbf{r} abhängt (in \hat{H} wurde über das Volumen integriert). Um den Ausdruck weiter auswerten zu können, muß man die Vertauschungen des Hamilton-Operators mit den Quark-Feldoperatoren kennen. Dafür benutzt man die Beziehung (3.38) und die Antivertauschungsrelationen der Quark-Feldoperatoren zu gleichen Zeiten (Gl. (3.32)) und erhält

$$[\hat{H}, \hat{q}(\mathbf{r}, \tau)] = -h \hat{q}(\mathbf{r}, \tau) \quad \text{und} \quad [\hat{H}, \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau)] = \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau) (-\boldsymbol{\alpha} \cdot \overleftarrow{\mathbf{p}} + \Gamma_a \phi_a) . \quad (8.5)$$

Setzt man dies in Gl. (8.4) ein und führt im ersten Term auf der rechten Seite eine partielle Integration durch (Überwerfen von \mathbf{p}), so ergibt sich

$$[\hat{H}, \hat{P}] = \int d^3\mathbf{r} \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau) [h, \mathbf{p}] \hat{q}(\mathbf{r}, \tau) , \quad (8.6)$$

und die Vertauschung des Hamilton-Operators mit dem Impuls ist auf die Vertauschung der entsprechenden Einteilchen-Operatoren zurückgeführt. Durch analoges Vorgehen kann man zeigen, daß der Impulsoperator mit dem Teilchenzahloperator vertauscht ($[\hat{N}, \hat{P}] =$

0). Da h die ortsabhängigen mittleren Felder $\phi_a(\mathbf{r})$ enthält, ist $[h, \mathbf{p}]$ proportional zu den räumlichen Ableitungen dieser Felder und Gl. (8.6) verschwindet im allgemeinen nicht, so daß $\partial \hat{\mathbf{P}}(\tau)/\partial \tau \neq 0$ gilt.

Zur späteren Berechnung der Impulsfluktuationen des Solitons betrachten wir das Quadrat eines zweitquantisierten Operators

$$\hat{O} = \int d^3 \mathbf{r} \hat{q}_i^\dagger(\mathbf{r}) o_{ij} \hat{q}_j(\mathbf{r}) \quad (8.7)$$

was

$$\hat{O}^2 = \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \hat{q}_i^\dagger(\mathbf{r}) o_{ij} \hat{q}_j(\mathbf{r}) \hat{q}_k^\dagger(\mathbf{r}') o_{kl} \hat{q}_l(\mathbf{r}') \quad (8.8)$$

ergibt, wobei im Unterschied zu Gl. (8.1) die $\hat{q}(\mathbf{r})$ Feldoperatoren im Schrödinger-Bild (Matsubara-Operatoren zum Zeitpunkt $\tau=0$) sind. Dabei nehmen wir an, daß die Matrix o_{ij} diagonal im Farb-Raum ist und i, j seien Dirac-Flavourindizes. Mit Hilfe der Anti-Vertauschungsrelationen aus Gl. (3.32) läßt sich das Quadrat des Operators in einen Ein- und Zweiteilchenbeitrag (im Sinne der 2. Quantisierung) aufspalten

$$\hat{O}^2 = [\hat{O}^2]_{(1)} + [\hat{O}^2]_{(2)} \quad (8.9)$$

mit

$$\begin{aligned} [\hat{O}^2]_{(1)} &= \int d^3 \mathbf{r} \hat{q}_i^\dagger(\mathbf{r}) o_{ij} o_{jl} \hat{q}_l(\mathbf{r}), \\ [\hat{O}^2]_{(2)} &= - \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{r}' \hat{q}_i^\dagger(\mathbf{r}) \hat{q}_k^\dagger(\mathbf{r}') o_{ij} o_{kl} \hat{q}_j(\mathbf{r}) \hat{q}_l(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Der thermische Erwartungswert des Zweiteilchenbeitrag $[\hat{O}^2]_{(2)}$ ergibt sich als zweite Ableitung der Zustandsfunktion

$$\langle [\hat{O}^2]_{(2)} \rangle = T^2 \frac{1}{\mathcal{Z}(T, \mu; \kappa)} \left. \frac{\partial^2 \mathcal{Z}(T, \mu; \kappa)}{\partial \kappa^2} \right|_{\kappa=0} \quad (8.11)$$

mit $\mathcal{Z}(T, \mu; \kappa) = \exp[-\Omega(T, \mu; \kappa)/T]$ und einem großkanonischen Potential, bei dem wie im Abschnitt 4.3 der Einteilchen-Hamiltonian h durch $h - \kappa o$ ersetzt wurde. Aufgrund der Näherung des mittleren Feldes liefert nur der Quarkanteil des großkanonischen Potentials einen Beitrag (die rein mesonischen Anteile kürzen sich weg) zum thermischen Erwartungswert, so daß $\Omega(T, \mu; \kappa)$ durch $\Omega_{(\Lambda)}^q(T, \mu; \kappa)$ ersetzt werden kann. Divergiert der Erwartungswert, so ist das regularisierte großkanonische Potential der Quarks $\Omega_{\Lambda}^q(T, \mu; \kappa)$ zu benutzen. Für die Gleichung (8.11) erhalten wir somit

$$\langle [\hat{O}^2]_{(2)} \rangle = \left(\left. \frac{\partial \Omega_{(\Lambda)}^q(T, \mu; \kappa)}{\partial \kappa} \right|_{\kappa=0} \right)^2 - T \left. \frac{\partial^2 \Omega_{(\Lambda)}^q(T, \mu; \kappa)}{\partial \kappa^2} \right|_{\kappa=0}. \quad (8.12)$$

Der erste Term entspricht dem Quadrat des Erwartungswertes von \hat{O} , so daß sich insgesamt

$$\langle \hat{O}^2 \rangle = \langle [\hat{O}^2]_{(1)} \rangle + \langle \hat{O} \rangle^2 - T \left. \frac{\partial^2 \Omega_{(\Lambda)}^q(T, \mu; \kappa)}{\partial \kappa^2} \right|_{\kappa=0} \quad (8.13)$$

ergibt. Für die Fluktuationen $\Delta\hat{O}\equiv\hat{O}-\langle\hat{O}\rangle$ des Operators \hat{O} erhält man

$$\langle(\Delta\hat{O})^2\rangle = \langle[\hat{O}^2]_{(1)}\rangle + T \left. \frac{\partial}{\partial\kappa} \langle\hat{O}\rangle(\kappa) \right|_{\kappa=0} \quad (8.14)$$

mit $\langle\hat{O}\rangle(\kappa) = -\partial\Omega(T, \mu; \kappa)/\partial\kappa$, dem thermischen Erwartungswert des Operators \hat{O} bei Anwesenheit des Quellterms $-\kappa o$.

Die Gleichungen (8.13) und (8.14) verwenden wir zur Bestimmung der Impulsfluktuationen des Solitons. Dazu ersetzen wir den Einteilchen-Hamiltonian h durch

$$h(\mathbf{v}) = h - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}, \quad (8.15)$$

wobei man die (euklidische) Geschwindigkeit \mathbf{v} als Lagrange-Parameter zur Fixierung des mittleren (euklidischen) Impulses des Solitons $\langle\hat{\mathbf{P}}\rangle(\mathbf{v})$ betrachten kann. Aus der Gleichung (8.14) erhält man dann mit $\kappa=\mathbf{v}$ und $o=\mathbf{p}$ für die Impulsfluktuationen

$$\langle(\Delta\hat{\mathbf{P}})^2\rangle = \langle[\hat{\mathbf{P}}^2]_{(1)}\rangle + T \left. \frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} \langle\hat{\mathbf{P}}\rangle(\mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}}. \quad (8.16)$$

Der erste Term auf der rechten Seite der obigen Gleichung gibt die unphysikalischen Impulsfluktuationen des Solitons aufgrund der Näherung des ortsabhängigen mittleren Feldes an. Der zweite Term (der im Falle $T=0$ verschwindet) beschreibt die thermischen Fluktuationen des Solitons als Ganzes im Medium. Der Proportionalitätsfaktor zwischen dem mittleren Impuls $\langle\hat{\mathbf{P}}\rangle(\mathbf{v})$ und der Geschwindigkeit des Solitons ist dessen träge Masse \mathcal{M} . Der Trägheitsparameter

$$\mathcal{M}_{ik} \equiv \left. \frac{\partial}{\partial v^i} \langle P^k \rangle(\mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = \mathcal{M} \delta_{ik} \quad (8.17)$$

ist diagonal, da für rotationssymmetrische Feldkonfigurationen keine Richtung im Raum bevorzugt ist.

Desweiteren verschwindet für die solitonische Lösung der Erwartungswert des Impulses bei $\mathbf{v}=\mathbf{0}$, d. h. $\langle\hat{\mathbf{P}}\rangle = \langle\hat{\mathbf{P}}\rangle(\mathbf{v}=\mathbf{0}) = 0$ – das Soliton "zappelt" in alle Richtungen gleichwahrscheinlich. Dies erkennt man unmittelbar durch die mögliche Kommutatordarstellung (Gl. (F.14)) des Einteilchen-Impulsoperators

$$\mathbf{p} = \frac{i}{2} [\mathbf{h}^2, \mathbf{r}], \quad (8.18)$$

wenn man bei der Berechnung des thermischen Erwartungswertes $\langle\hat{\mathbf{P}}\rangle$, entsprechend den Ausdrücken (4.65) und (4.72), die Möglichkeit des zyklischen Vertauschens unter der Spur und die Vertauschbarkeit von h^2 mit $A(\mu)$ beachtet (wegen $[A, B^{-1}] = -B^{-1}[A, B]B^{-1}$ vertauscht dann h^2 mit $A(\mu)^{-1}$). Die Darstellung Gl. (8.18) gilt für allgemeine Felder $\phi_a(\mathbf{r})$, unabhängig von zusätzlichen Symmetrien (z. B. sphärische Symmetrie). Das Verschwinden des thermischen Erwartungswertes des Impulses des Solitons ist somit allein eine Folge

der Zeitunabhängigkeit der mittleren Felder (damit ist h zeitunabhängig und vertauscht mit $A(\mu)$).

Diese Aussage hat ein Analogon in einer lokalen klassischen Feldtheorie, in der der Gesamtimpuls P^μ mit Hilfe des Energie-Impuls-Tensors $T^{\mu\nu}$ berechnet wird. Die Zeitunabhängigkeit dieses Tensors hat für eine isolierte Feldkonfiguration dann einen verschwindenden (Dreier-) Impuls zur Folge. Dies ergibt sich aus $\int d^3\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r^i} (r^j T^{0i}) = \int d^3\mathbf{r} T^{0j} + \int d^3\mathbf{r} r^j \frac{\partial}{\partial r^i} T^{0i}$. Die linke Seite kann nach Anwendung des Satzes von Gauß in ein Oberflächenintegral verwandelt werden. Dieser Term verschwindet unter der Annahme des genügend schnellen Abklingens der Felder in großen Entfernungen. Der lokale Energie-Impuls-Erhaltungssatz $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$ liefert für einen zeitunabhängigen Energie-Impuls-Tensor die Aussage $\frac{\partial}{\partial r^i} T^{0i} = 0$. Daraus folgt dann letztlich $P^j = \int d^3\mathbf{r} T^{0j} = 0$.

Die letzten Überlegungen ergeben mit den Gln. (8.13), (8.16) und (8.17)

$$\langle \hat{\mathbf{P}}^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{\mathbf{P}})^2 \rangle = \langle [\hat{\mathbf{P}}^2]_{(1)} \rangle + 3\mathcal{M}T. \quad (8.19)$$

Die mit diesen Impulsfluktuationen verbundenen kinetischen Energien erhält man in nichtrelativistischer Näherung bei Division der obigen Gleichung durch das Zweifache der trägen Masse

$$E_{\text{trans}}^{\text{fl}} = \frac{\langle [\hat{\mathbf{P}}^2]_{(1)} \rangle}{2\mathcal{M}} + \frac{3}{2}T. \quad (8.20)$$

Während der 2. Term die Energie der thermischen Fluktuationen des Solitons im Medium liefert (auf jeden Freiheitsgrad der Translation entfallen $T/2$), beschreibt der 1. Term die Energie der unphysikalischen Schwerpunktsbewegung

$$E_{\text{cmm}} = \frac{\langle [\hat{\mathbf{P}}^2]_{(1)} \rangle}{2\mathcal{M}}. \quad (8.21)$$

Um diese näherungsweise aus dem System zu entfernen, subtrahieren wir sie von den Meanfield-Energien (Gl. (4.51)), (Gl. (4.52)) und erhalten die schwerpunktskorrigierten Energien

$$\begin{aligned} E_{\text{korr}}^{\text{cm}} &= E - E_{\text{cmm}}, \\ F_{\text{korr}}^{\text{cm}} &= F - E_{\text{cmm}}, \\ \Omega_{\text{korr}}^{\text{cm}} &= \Omega - E_{\text{cmm}}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Der Erwartungswert des Einteilchenbeitrages von $\hat{\mathbf{P}}^2$ in Gleichung (8.21) wird regularisiert und berechnet mit den Formeln (4.66) und (4.74) mit $o=p^2$.

Nach unserer Argumentation sollte $\langle [\hat{\mathbf{P}}^2]_{(1)} \rangle \neq 0$ mit $[h, \mathbf{p}] \neq 0$ verknüpft sein. Dieser Zusammenhang läßt sich herstellen, wenn man Gl. (8.18) mit \mathbf{p} multipliziert und das Ergebnis als

$$\mathbf{p}^2 = \frac{i}{2} [h^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}] + \frac{i}{2} \mathbf{r} \cdot [\mathbf{p}, h^2] \quad (8.23)$$

schreibt. Bei der Berechnung des thermischen Erwartungswertes $\langle [\hat{P}^2]_{(1)} \rangle$ liefert dann der erste Kommutator auf der rechten Seite von Gl. (8.23) keinen Beitrag (analoge Überlegungen mit denen zuvor $\langle \hat{P} \rangle = 0$ gezeigt wurde). Der 2. Term verschwindet ebenfalls, wenn der Einteilchenimpuls \mathbf{p} mit dem Hamilton-Operator h vertauscht, und wir erhalten $\langle [\hat{P}^2]_{(1)} \rangle = 0$.

Nach diesen Überlegungen ist klar, daß das homogene Medium von Konstituentenquarks wegen $[\mathbf{p}, h_0] = 0$ keinen Beitrag zu $\langle [\hat{P}^2]_{(1)} \rangle$ liefert, was numerisch bei Verwendung der diskreten Basis (Anhang D) auch bestätigt wird. Das Auftreten der Energie (Gl. (8.21)) hängt mit der Beschreibung einer lokalisierten Feldkonfiguration zusammen. Diese Lokalisierung ist nach der Heisenbergschen Unschärferelation mit Impulsfluktuationen verknüpft, die kinetische Energien enthält.

Schlüsselgröße zur Bestimmung der Energiekorrektur in Gl. (8.21) ist die träge Masse des Solitons M . Die Bestimmung dieser Größe und anschließende Berechnung der korrigierten Meanfield-Energien ist im folgenden Abschnitt gegeben.

8.1.1 Trägheitsparameter für Translation – träge Masse des Solitons

Bevor wir zur Ermittlung der trägen Masse als den Proportionalitätsfaktor zwischen Impuls und Geschwindigkeit des Solitons bei einer langsamen Bewegung im umgebenden Medium kommen, besprechen wir den Fall der Bewegung des Solitons im Vakuum. Es geht dabei um ein Verständnis der Begriffe *Feldmasse* und *träge Masse*. Dabei wird klar werden, daß die Gleichheit von Feldmasse und träger Masse ("masseneinheitliche" Theorie) bei einem ausgedehnten Teilchen nicht selbstverständlich in jedem Modell realisiert sein muß – für eine konsistente Theorie aber realisiert sein sollte. Für eine ausführliche Diskussion siehe auch [85, 86].

Für ein Punktteilchen bilden Energie und (Dreier-) Impuls einen Vierervektor $P^\mu = (E, \mathbf{P})$, und die Lorentz-Invarianz liefert für die freie Bewegung des Teilchens mit der (Dreier-) Geschwindigkeit \mathbf{v} im Vakuum den Zusammenhang $\mathbf{P} = E\mathbf{v}$ mit $E = \sqrt{\mathbf{P}^2 + M^2}$. Die Rolle der Trägheit übernimmt in der speziellen Relativitätstheorie die Energie. Für kleine Geschwindigkeiten gegenüber der Lichtgeschwindigkeit, bei denen man den Impuls nur bis zur ersten Ordnung in \mathbf{v} berücksichtigt, ergibt sich das nichtrelativistische Resultat $\mathbf{P} = M\mathbf{v}$. M ist dabei die Ruheenergie (Masse) des Teilchens. Ruheenergie und träge Masse sind in dieser Näherung folgerichtig identisch (M hat bei diesen Überlegungen nichts mit der Konstituenten-Quarkmasse zu tun).

Will man den Viererimpuls $P^\mu = (E, \mathbf{P})$ eines ausgedehnten Teilchens mit Hilfe einer klassischen Feldtheorie aus der Energie und dem Impuls des Feldes berechnen, so ergibt sich der Viererimpuls des Teilchens aus dem Energie-Impuls-Tensorfeld $T^{\nu\mu}$

$$P^\mu = \int d^3\mathbf{r} T^{0\mu}. \quad (8.24)$$

Bezieht man sich auf das Ruhesystem des Teilchens ($P^\mu = (M, \mathbf{0})$), so ergibt sich die

Feldmasse M aus der Berechnung der Feldenergie

$$M = \int d^3\mathbf{r} T^{00}. \quad (8.25)$$

Führt man eine Lorentz-Transformation von Gl. (8.24) in x -Richtung durch, so erhält man bei Berücksichtigung der Zeitunabhängigkeit des Energie-Impuls-Tensors im Ruhesystem des Teilchens für den Impuls P'^1 bis zur ersten Ordnung in der Geschwindigkeit v [86]

$$P'^1 = \left(M + \int d^3\mathbf{r} T^{11} \right) v. \quad (8.26)$$

Die *träge Masse* \mathcal{M} , als der Proportionalitätsfaktor zwischen Impuls und Geschwindigkeit, enthält in dieser Näherung neben der Feldmasse M noch den Zusatzterm $\int d^3\mathbf{r} T^{11}$. Für das elektromagnetische Feld entspricht beispielsweise T^{11} dem Druck des elektromagnetischen Feldes. Erst wenn das Integral $\int d^3\mathbf{r} T^{11}$ verschwindet, ergibt sich die Äquivalenz von Feldmasse und träger Masse. Man kann zeigen, daß in einer konsistenten Theorie, in der der lokale Energie-Impuls-Erhaltungssatz $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ gilt, der Energie-Impuls-Tensor im Ruhesystem zeitunabhängig ist und die Komponenten T^{ji} genügend rasch für große räumliche Abstände verschwinden, die Relation

$$\int d^3\mathbf{r} T^{jj} = 0 \quad j = 1, 2, 3 \quad (8.27)$$

gilt, wobei über j hier nicht zu summieren ist. Dies folgt aus $\int d^3\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial r^i} (r^j T^{ji}) = \int d^3\mathbf{r} T^{jj} + \int d^3\mathbf{r} r^j \frac{\partial}{\partial r^i} T^{ji}$ (keine Summation über j !). Die linke Seite verschwindet nach Umwandlung in ein Oberflächenintegral und der lokale Energie-Impuls-Erhaltungssatz liefert für einen zeitunabhängigen Energie-Impuls-Tensor $\frac{\partial}{\partial r^i} T^{ji} = 0$. Daraus ergibt sich dann die Behauptung in Gl. (8.27). Dazu noch einige Bemerkungen.

Es ist klar, daß allein aus einem elektromagnetischen Feld kein stabiles Teilchen bestehen kann, da der Strahlungsdruck zur Explosion führt. Man braucht zusätzliche Kohäsionskräfte, so daß der gesamte Tensor, als Summe von Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes und des Kohäsionstensors, dem Energie-Impuls-Erhaltungssatz genügt. In Bag-Modellen des Nukleons erzeugen die Quarks im Inneren einen Druck, der ebenfalls zur Explosion führen würde. Das Gleichgewicht wird hier durch Einführung einer Bag-Konstanten aufrechterhalten, die von außen einen Gegendruck erzeugt. Die Einführung der Bag-Konstante sichert letztlich den Energie-Impuls-Erhaltungssatz, der sonst an der Bag-Oberfläche nicht erfüllt wäre [87].

Der zuvor diskutierte Fall eines durch einen Energie-Impuls-Tensor charakterisierten Feldes weist gewisse Analogien zu dem hier verwendeten Modell auf. Die Feldmasse des Solitons wird aus der Feldenergie der Quarkfelder bestimmt und durch die Näherung des mittleren Feldes kann man das Modell als quasi-klassische Feldtheorie bezüglich der Felder ϕ_a ansehen. Der wesentliche Unterschied besteht nun darin, daß die nichtlokale Quark-Determinante eine explizite Konstruktion des lokalen Energie-Impuls-Tensors, als Funktion der mesonischen Felder ϕ_a und deren Ableitungen, nicht zuläßt. Unter Ausnutzung algebraischer Operatorrelationen, die später eingeführt werden, und der Feldgleichungen

für die mittleren Felder konnte jedoch in [20] die Äquivalenz von Feldmasse und träger Masse, einschließlich des Problems der Regularisierung der Quark-Determinante, gezeigt werden. Die Verwendung der Feldgleichungen ($\delta\Omega = 0$) ist im gewissen Sinne analog der oben verwendeten Divergenzfreiheit des Energie-Impuls-Tensors in einer lokalen Theorie. Beide Beziehungen scheinen dafür zu sorgen, daß Terme, die die Äquivalenz von Feldmasse und träger Masse zerstören könnten (wie der Term $\int d^3r T^{11}$ in Gl. (8.26)), nicht auftreten. In diesem Sinne ist die Theorie "masseneinheitlich".

Kommen wir nun zum Verhalten eines Solitons in einem Medium. Die Anwesenheit eines Mediums zerstört die Lorentz-Invarianz, da das Medium ein bevorzugtes Bezugssystem darstellt. Man kann sich nun bei der langsamen Bewegung des Solitons im umgebenden Medium von vornherein nicht auf die obigen Aussagen beziehen. Die träge Masse sollte man aber weiterhin als den Proportionalitätsfaktor zwischen mittleren Impuls und Geschwindigkeit des Solitons ansehen. Welche Größe sollte man bei Anwesenheit eines Mediums als Feldmasse des Solitons betrachten?

Wir betrachten ein genügend großes Volumen homogener Quarkmaterie bei der Temperatur T und dem chemischen Potential μ . Dessen extensive Größen der mittleren inneren Energie, Entropie und mittleren Teilchenzahl seien (E_0, S_0, N_0) . Durch das Hinzufügen von 3 Valenzquarks entsteht in diesem Volumen eine inhomogene (solitäre) Feldkonfiguration, die durch die Größen (E_1, S_1, N_1) charakterisiert wird und die sich in der Umgebung der 3 Valenzquarks von der homogenen Konfiguration unterscheidet. Damit sich dabei die Eigenschaften des Mediums in genügend großer Entfernung vom Soliton nicht ändern, müssen Temperatur und chemisches Potential die gleichen sein wie im Falle des homogenen Mediums. Neben der (äußeren) Arbeit, die man für die Verschiebung der Einteilchen-Energieniveaus der Quarks gegenüber dem homogenen Fall aufbringen muß, wird von dem umgebenden Wärme- und Teilchenbad eine bestimmte Wärmemenge (proportional der Entropieänderung) geliefert und chemische Arbeit (proportional zur Teilchenzahländerung) geleistet. Die gesamte am System geleistete Arbeit ist die Summe dieser drei Anteile gegeben durch die Differenz der inneren Energien $E_1 - E_0$. Aufgrund der Energie-Masse Relation sollte jede Form von Energie (also auch die durchs Wärme- und Teilchenbad gelieferte Wärmemenge und die chemische Arbeit, die dann im System enthalten sind) einer bestimmten Masse entsprechen. In diesem Sinne sollte man als Feldmasse des Solitons die Differenz der inneren Energien bezeichnen. Durch eine Erweiterung der Ideen aus der Referenz [20] kann man nun auch für die Bewegung im Medium analytisch die Äquivalenz von Feldmasse und träger Masse zeigen, was im folgenden ausgeführt wird [88, 22].

Zur Berechnung der trägen Masse des Solitons betrachten wir dessen adiabatische Bewegung mit der Geschwindigkeit v in dem umgebenden Medium von Konstituentenquarks. Diese Bewegung soll so langsam sein, daß zu jeder Zeit thermodynamisches Gleichgewicht herrscht. In der Näherung des mittleren Feldes wird auch keine Streuung an den Konstituentenquarks betrachtet. Das großkanonische Potential $\Omega(v)$ des sich bewegenden Solitons ist dann für kleine Geschwindigkeiten durch die selben Ausdrücke wie in Gl. (4.32) und Gl. (4.34) mit den Anteilen (Gl. (4.22)), (Gl. (4.29)) und (Gl. (4.33)) für das Soliton bei $v = 0$, gegeben, wobei der Einteilchen-Hamilton-Operator in den Operatoren (Gl. (4.11)), (Gl. (4.12)) nun durch den Operator in Gl. (8.15) zu ersetzen ist. Die

euklidische Geschwindigkeit \mathbf{v} kann man hier als Lagrange-Parameter zur Fixierung des mittleren Impulses des Solitons $\langle \hat{\mathbf{P}} \rangle(\mathbf{v})$ betrachten. Der Term $-\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}$ wirkt für die Quarks in dem mitbewegten System wie ein zusätzliches Feld. Da das Soliton mit der Umgebung verbunden (eingebettet) ist, muß man erst einen Teil des Mediums, der das Soliton enthält, bewegen und anschließend dasselbe mit dem homogenen Medium tun. Die träge Masse des Solitons ist dann die Differenz der zwei dabei auftretenden trägen Massen, so wie das bei der Rechnung im Anhang F deutlich wird. Da wir im Euklidischen Raum arbeiten, ist \mathbf{v} hier als euklidische Geschwindigkeit antihermitesch $\mathbf{v}^\dagger = -\mathbf{v}$ anzusetzen. Man kann sich das durch $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{d\tau} = -i \frac{d\mathbf{R}}{dt} = -i \mathbf{v}_{\text{phys}}$ klarmachen, wobei \mathbf{v}_{phys} die physikalische Geschwindigkeit im Minkowski-Raum sein soll. Damit gilt auch $\frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^k} = -\frac{\partial^2}{\partial v_{\text{phys}}^i \partial v_{\text{phys}}^k}$. Für den Trägheitsparameter ergibt sich (Gl. (8.17))

$$\mathcal{M}_{ik} \equiv \left. \frac{\partial}{\partial v^i} \langle P^k \rangle(\mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = - \left. \frac{\partial^2 \Omega_\Lambda(T, \mu; \mathbf{v})}{\partial v^i \partial v^k} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}}, \quad (8.28)$$

wobei $\langle P^k \rangle(\mathbf{v})$ hier der mittlere euklidische Impuls ist.

Bei der Entwicklung des großkanonischen Potentials nach der Geschwindigkeit des Solitons ist der erste nichtverschwindende Term von der Ordnung \mathbf{v}^2 , der gerade die zusätzliche kinetische Energie durch die Translationsbewegung des Solitons widerspiegelt

$$\begin{aligned} \Omega_\Lambda(T, \mu; \mathbf{v}) &= \Omega_\Lambda(T, \mu; \mathbf{v} = \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \Omega_\Lambda(T, \mu; \mathbf{v})}{\partial v^i} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} \cdot v^i + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Omega_\Lambda(T, \mu; \mathbf{v})}{\partial v^i \partial v^k} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} \cdot v^i v^k + \dots \\ &= \Omega_\Lambda(T, \mu) - \langle \hat{\mathbf{P}} \rangle \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2} \mathcal{M}_{ik} v^i v^k + \dots, \end{aligned} \quad (8.29)$$

wobei der Term proportional zur Geschwindigkeit des Solitons keinen Beitrag liefert, da für zeitunabhängige mittlere Felder der Mittelwert des Impulses bei $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ verschwindet, was im vorhergehenden Abschnitt erläutert wurde.

Aufgrund des Theorems der kleinen Zusätze [61] ist eine kleine Änderung des großkanonischen Potentials (durch den Zusatzterm $-\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}$ im Einteilchen-Hamiltonian der Quarks) bei festgehaltener Temperatur und chemischen Potential äquivalent zu einer kleinen Änderung der freien Energie bei festgehaltener Temperatur und Teilchenzahl und der Änderung der inneren Energie bei festgehaltener Entropie und Teilchenzahl. Es gilt somit auch

$$\mathcal{M}_{ik} = - \left. \frac{\partial^2 F(T, N; \mathbf{v})}{\partial v^i \partial v^k} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} = - \left. \frac{\partial^2 E(S, N; \mathbf{v})}{\partial v^i \partial v^k} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}}. \quad (8.30)$$

Für rotationssymmetrische Feldkonfigurationen ist keine Richtung bevorzugt, so daß gilt

$$\mathcal{M}_{ik} = \mathcal{M} \delta_{ik} \quad \text{mit} \quad \mathcal{M} = \frac{1}{3} \sum_i \mathcal{M}_{ii} = \mathcal{M}_\Lambda^{\text{q,see}} + \mathcal{M}^{\text{q,med}}(T, \mu). \quad (8.31)$$

Die zweiten Ableitungen des großkanonischen Potentials sind im Anhang F gegeben. Die Gleichungen (F.19) und (F.33) führen auf

$$\mathcal{M}_\Lambda^{\text{q,see}} \equiv - \left. \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \Omega_\Lambda^{\text{q,see}}(\mathbf{v})}{\partial \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v}} \right|_{\mathbf{v}=\mathbf{0}} \quad (8.32)$$

$$= - \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[e^{-sA(0)} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{3} + \partial_\tau^2 + \frac{i}{6} \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla (\sigma + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5) \right) - e^{-sA_0(0)} \partial_\tau^2 \right]$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\text{q,med}}(T, \mu) &\equiv - \frac{1}{3} \frac{\partial^2 \Omega^{\text{q,med}}(T, \mu; \mathbf{v})}{\partial \mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{v}} \Big|_{\mathbf{v}=0} \\ &= -T \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{3} + \partial_\tau^2 + \frac{i}{6} \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla (\sigma + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5) \right) - A_0(\mu)^{-1} \partial_\tau^2 \right] \\ &\quad + \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[A(0)^{-1} \left(\frac{\mathbf{p}^2}{3} + \partial_\tau^2 + \frac{i}{6} \boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla (\sigma + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5) \right) - A_0(0)^{-1} \partial_\tau^2 \right] \\ &\quad - \mu T \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} \left((h - \mu) + \frac{i}{3} \mathbf{r} \cdot [h, \mathbf{p}] \right) - A_0(\mu)^{-1} (h_0 - \mu) \right]. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Die Summe der Terme, die \mathbf{p}^2 und die Ableitungen der mittleren Felder enthalten, werden im folgenden, durch Ausnutzung der Feldgleichungen, durch den rein mesonischen Anteil am großkanonischen Potential (Ω^{m}) ersetzt.

Wir nutzen aus, daß sich das großkanonische Potential am stationären Punkt bei einer beliebigen kleinen Variation der mesonischen Felder, entsprechend den Feldgleichungen (Gl. (4.35)), nicht ändern darf. Eine Variation des großkanonischen Potentials, die die sphärische Hedgehog-Symmetrie, den chiralen Zirkel und die Randbedingungen $\delta\sigma = 0$, $\delta\boldsymbol{\pi} = 0$ im Ursprung und für große räumliche Entfernungen vom Ursprung respektiert, ist gegeben durch

$$\delta\sigma = \epsilon r^k \partial_k \sigma \quad \text{und} \quad \delta\boldsymbol{\pi} = \epsilon r^k \partial_k \boldsymbol{\pi} \quad (8.34)$$

mit einem infinitesimalen Variationsparameter ϵ . Diese Variation führt zu folgenden Variationen von See-, Medium- und mesonischen Beiträgen am großkanonischen Potential

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Omega^{\text{m}}}{\epsilon} &= -\frac{m}{G} \int d^3\mathbf{r} \frac{\delta\sigma(\mathbf{r})}{\epsilon} = -\frac{m}{G} \int d^3\mathbf{r} r^k \partial_k \sigma = -\frac{m}{G} \int d^3\mathbf{r} r^k \partial_k (\sigma - \sigma_0) \\ &= 3 \frac{m}{G} \int d^3\mathbf{r} (\sigma - \sigma_0) = -3\Omega^{\text{m}}, \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$\delta\Omega_\Lambda^{\text{q,sea}} = -\frac{1}{2} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[e^{-sA(0)} \delta h^2 \right], \quad (8.36)$$

$$\delta\Omega^{\text{q,med}} = -\frac{1}{2} T \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} \delta(h - \mu)^2 \right] + \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[A(0)^{-1} \delta h^2 \right] \quad (8.37)$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\delta h}{\epsilon} &= \beta \left(\frac{\delta\sigma}{\epsilon} + i \frac{\delta\boldsymbol{\pi}}{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5 \right) = \beta \mathbf{r} \cdot \nabla (\sigma + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5) \\ &= -i\mathbf{r} \cdot [h, \mathbf{p}] = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} - i[h, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}], \end{aligned} \quad (8.38)$$

$$\frac{\delta h^2}{\epsilon} = \left\{ h, \frac{\delta h}{\epsilon} \right\} = 2\mathbf{p}^2 + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla (\sigma + i\boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5) - i[h^2, \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}], \quad (8.39)$$

$$\delta(h - \mu)^2 = \delta h^2 - 2\mu \delta h. \quad (8.40)$$

Setzt man nun δh , δh^2 und $\delta(h-\mu)^2$ und dann $\delta\Omega_\Lambda^{\text{q,sea}}$ (Gl. (8.36)) und $\delta\Omega^{\text{q,med}}$ (Gl. (8.37)) in die Summe der Gleichungen (8.32) und (8.33) ein, nutzt die Beziehung $\text{Sp}[A[B, C]] = 0$ falls $[A, B] = 0$ oder $[A, C] = 0$, so ergibt sich unter Ausnutzung der Invarianz des großkanonischen Potentials $\delta\Omega^{\text{m}} + \delta\Omega_\Lambda^{\text{q,sea}} + \delta\Omega^{\text{q,med}} = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \Omega^{\text{m}} - \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[\left(e^{-sA(0)} - e^{-sA_0(0)} \right) \partial_\tau^2 \right] \\ & - T \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} \left(\partial_\tau^2 + \mu(h - \mu) \right) - A_0(\mu)^{-1} \left(\partial_\tau^2 + \mu(h_0 - \mu) \right) \right] \\ & + \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[\left(A(0)^{-1} - A_0(0)^{-1} \right) \partial_\tau^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Diesen Ausdruck vergleichen wir mit der inneren Energie (Gl. (4.51)) des Solitons bei $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Der erste Term auf der rechten Seite in Gl. (8.41) ist die mesonische Energie (Gl. (4.53)). Um die Identität des zweiten Terms mit der regularisierten Seenergie (Gl. (4.22)), (Gl. (4.54)) zu zeigen, drücken wir die Spur mit Hilfe der Gleichungen (4.15), (4.16) durch die Eigenwerte ω und ε_α (ε_α^0) der Einteilchen-Operatoren $i\partial_\tau$ und h (h_0) aus und benutzen die Relation $\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega^2 \exp(-s\omega^2) = \frac{1}{2s} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(-s\omega^2)$. Die Summe aus dritten und vierten Term ist identisch mit dem Mediumanteil in Gl. (4.56), da $\frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp}[\ln A(0) - \ln A_0(0)]$ und $\lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp}[(A(0)^{-1} - A_0(0)^{-1}) \partial_\tau^2]$ identisch sind, was mit Hilfe der Relation $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \ln \left(\frac{\omega^2 + \varepsilon^2}{\omega^2 + \varepsilon_0^2} \right) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega^2 [(\omega^2 + \varepsilon^2)^{-1} - (\omega^2 + \varepsilon_0^2)^{-1}]$ gezeigt werden kann. Zusammenfassend ergibt sich

$$\mathcal{M} = E^{\text{m}} + E_\Lambda^{\text{q,sea}} + E^{\text{q,med}} = E(\mathbf{v} = \mathbf{0}), \quad (8.42)$$

d. h. wir erhalten das nichttriviale Ergebnis, daß die träge Masse identisch mit der inneren Energie der solitonischen Feldkonfiguration ist.

8.1.2 Schwerpunktkorrigierte Energien des Solitons

Die mittlere innere Energie des Solitons haben wir bereits im Kapitel 7.4, in Abhängigkeit von Temperatur und Teilchendichte der Umgebung, berechnet. Mit dem Resultat des vorherigen Abschnittes sind wir nun in der Lage die kinetische Energie E_{cm} der Schwerpunktbewegung (Gl. (8.21)) zu berechnen. Die numerischen Ergebnisse sind in der Abbildung 8-1 gegeben.

Die Energiekorrekturen liegen in der Größenordnung von $\approx (10-30)\%$ der inneren Energie E , gegeben in Abbildung 7-9. Charakteristisch ist das starke Abfallen der Energiekorrektur mit zunehmender Temperatur oberhalb $T \approx 125$ MeV. Hier ist das zur Berechnung der Energiekorrektur benutzte störungstheoretische Verfahren am ehesten gerechtfertigt.

Den qualitativen Verlauf der Energiekorrekturen kann man in Zusammenhang mit der Zunahme der mittleren quadratischen Radien in Abbildung 7-7 und der Heisenbergschen Unschärferelation bringen. Ein Anstieg des mittleren quadratischen Radius, und damit verknüpft die Abnahme der Lokalisierung der solitonischen Feldkonfiguration, zieht eine Abnahme der Energiekorrekturen nach sich, was bei hohen Temperaturen deutlich zum Ausdruck kommt. Man findet ein Maximum der Energiekorrekturen bei endlichen Teilchendichten der Umgebung bei etwa $T \approx 125$ MeV, bei der der

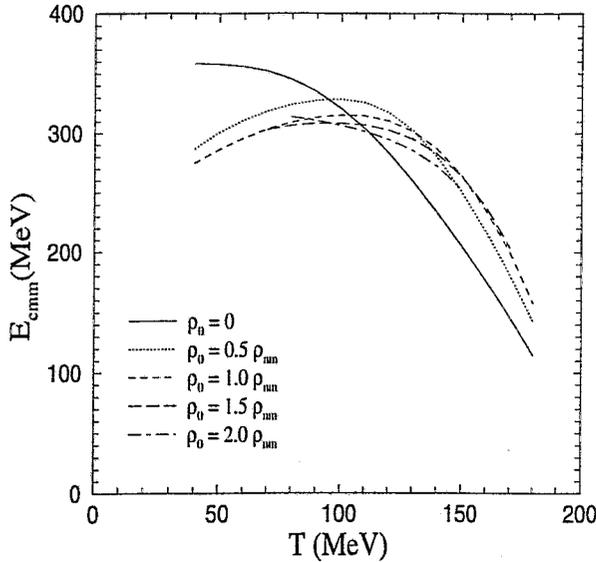


Bild 8-1:

Kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung E_{cmm} aus Gl. (8.21) in Abhängigkeit von der Temperatur bei unterschiedlichen Baryondichten der Umgebung (ρ_0), in Einheiten normaler Kern-dichte ($\rho_{\text{nm}} = 0.16 \text{ fm}^{-3}$).

r. m. s. Radius (Abbildung 7-7) ein Minimum aufweist. Schwerpunktskorrekturen (in relativistischer Form) werden auch in Bag-Modellen von Baryonen [5, 89, 90] berücksichtigt: $E_{\text{korrr}}^{\text{cm}} = \sqrt{E_{\text{Bag}}^2 - \langle [\hat{P}^2]_{(1)} \rangle}$ mit $\langle [\hat{P}^2]_{(1)} \rangle \sim R^{-2}$, wobei R der Bag-Radius ist. Ausdehnung der Feldkonfiguration und kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung $E_{\text{cmm}} = E_{\text{Bag}} - E_{\text{korrr}}^{\text{cm}} = E_{\text{Bag}} \left(1 - \sqrt{1 - \langle [\hat{P}^2]_{(1)} \rangle / E_{\text{Bag}}^2} \right)$ sind hier ähnlich korreliert.

Die Abbildung 8-2, die man direkt mit der Abbildung 7-9 vergleichen kann, zeigt die um die Schwerpunktsbewegung korrigierten Meanfield-Energien aus Gleichung (8.22). Zusätzlich ist wieder die Baryonenzahl des Solitons (B) in Abhängigkeit von Temperatur und Baryondichte der Umgebung (ρ_0) angegeben.

Nach Berücksichtigung der Schwerpunktskorrekturen ist das großkanonische Potential nahezu unabhängig von der Temperatur und der Teilchendichte der Umgebung und liegt in dem Bereich 800–900 MeV. Ein leichter Abfall der Energien mit der Temperatur in Abbildung 7-9, kann durch die Temperaturabhängigkeit der Schwerpunktskorrektur in Abbildung 8-1 in einen Anstieg übergehen. Dies hat man zu berücksichtigen, wenn man mit anderen Arbeiten vergleicht. In [91] wurden solitonische Lösungen im Gell-Mann Levy-Modell [51] betrachtet. Dieses kann man aus dem hier verwendeten NJL-Modell durch die Gradientenentwicklung der Quark-Determinante (Entwicklung nach Ableitungen der mesonischen Felder) erhalten, was unter anderem zu kinetischen Termen für die Mesonenfelder führt. Der Einfluß des Mediums wurde dabei nur durch Umskalierung der Parameter (wie Pion-Masse), die aus dem NJL-Modell berechnet wurden, berücksichtigt. Man erhielt dort z. B. für eine verschwindende Umgebungsdichte einen leichten Abfall der Nukleonen-Masse mit Erhöhung der Temperatur. Nimmt man für die Schwerpunktskorrektur, die in [91] nicht berücksichtigt wurde, einen ähnlichen Verlauf wie in Abbildung 8-1

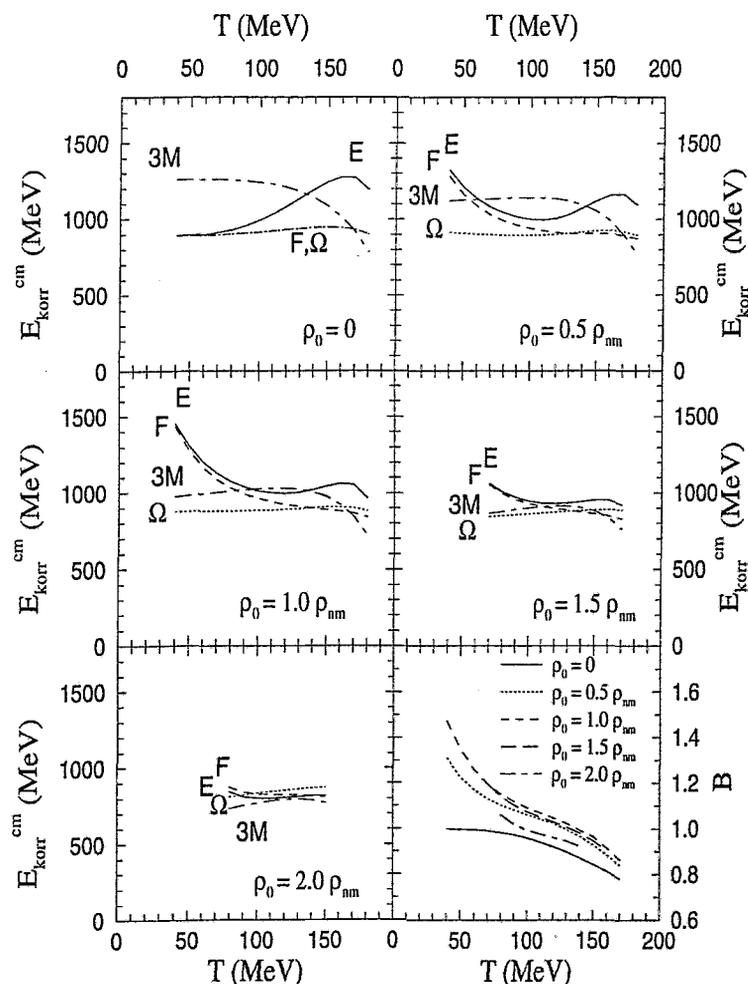


Bild 8-2:

Die um die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung korrigierte innere (E) und freie Energie (F) sowie das großkanonische Potential (Ω) des Solitons (Gl. (8.22)) in Abhängigkeit von der Temperatur bei verschiedenen Baryondichten der Umgebung (ρ_0). Zum Vergleich ist das Dreifache der temperatur- und dichteabhängigen Konstituenten-Quarkmasse ($3M$) aufgetragen.

an, dann erhält man auch in diesem Modell einen Anstieg der Masse mit der Temperatur.

Für kleine Teilchendichten der Umgebung gibt es die Möglichkeit, daß die korrigierten inneren und freien Energien des Solitons kleiner sind als das Dreifache der temperatur- und dichteabhängigen Konstituenten-Quarkmasse (M) - siehe auch Abbildung 6-2, was die solitonische Feldkonfiguration gegenüber freien Konstituentenquarks energetisch bevorzugt. Ohne die Schwerpunktskorrekturen liegen die Energien des Solitons erheblich über dem Dreifachen der Konstituenten-Quarkmasse (Abbildung 7-9).

8.2 Isospinfluktuationen und Rotationskorrekturen

So wie die ortsabhängige Meanfield-Näherung die Translationsinvarianz bricht, so zeichnet der Hedgehog-Ansatz an jedem Ort eine Richtung im Isospin-Raum aus, nämlich die Richtung parallel zum Ortsvektor. Dadurch treten Fluktuationen des Isospins auf, deren

Energie in analoger Weise zu den Impulsfluktuationen berechnet werden, indem man ein mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierendes Soliton betrachtet.

Die sphärische Hedgehog-Symmetrie der mittleren Felder hat zur Folge, daß der Einteilchen-Hamilton-Operator h (Gl. (3.11)) nicht mit dem Drehimpuls \mathbf{j} , der die Summe aus Bahndrehimpuls und Spin der Quarks ist, und nicht mit dem Isospin \mathbf{t} vertauscht. Der Gesamt-Isospin $\hat{\mathbf{T}}$ des Solitons ist keine Erhaltungsgröße, da analog zu den Überlegungen im Abschnitt 8.1, gilt

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{T}}] = \int d^3\mathbf{r} \tilde{q}(\mathbf{r}, \tau) [h, \mathbf{t}] \hat{q}(\mathbf{r}, \tau), \quad (8.43)$$

was auf $\partial\hat{\mathbf{T}}(\tau)/\partial\tau \neq 0$ führt. Der Einteilchen-Hamilton-Operator vertauscht aber mit dem Superspin $\mathbf{g} = \mathbf{j} + \mathbf{t}$ (Gl. (4.3)), und die erhaltene Größe, bei der Bewegung der Quarks in sphärischen Hedgehog-Feldern, ist der Superspin $\hat{\mathbf{G}}$ des Solitons $\partial\hat{\mathbf{G}}(\tau)/\partial\tau = \partial(\hat{\mathbf{T}}(\tau) + \hat{\mathbf{J}}(\tau))/\partial\tau = 0$. Die Rotationen im Spin- und Ortsraum sind somit nicht unabhängig voneinander, und es genügt die Betrachtung nur einer dieser Fluktuationen. Der Einfachheit wegen betrachten wir im folgenden die Fluktuationen des Isospins.

Um die Isospinfluktuationen zu berechnen, gehen wir analog zu Kapitel 8.1 vor und benutzen die Gleichungen (8.13) und (8.14) mit $\kappa = \omega$ und $o = \mathbf{t}$. Dazu ersetzen wir den Einteilchen-Hamilton-Operator in Analogie zu Gl. (8.15) durch den Operator

$$h(\omega) = h - \omega \cdot \mathbf{t}, \quad (8.44)$$

wobei man die Rotationsgeschwindigkeit ω als Lagrange-Parameter zur Fixierung des mittleren Isospins des Solitons $\langle\hat{\mathbf{T}}\rangle(\omega)$ betrachten kann. Die Gleichungen (8.13) und (8.14) ergeben dann

$$\langle\hat{\mathbf{T}}^2\rangle = \langle[\hat{\mathbf{T}}^2]_{(1)}\rangle + \langle\hat{\mathbf{T}}\rangle^2 + T \left. \frac{\partial}{\partial\omega} \langle\hat{\mathbf{T}}\rangle(\omega) \right|_{\omega=0}, \quad (8.45)$$

und für die Isospinfluktuationen erhält man

$$\langle(\Delta\hat{\mathbf{T}})^2\rangle = \langle[\hat{\mathbf{T}}^2]_{(1)}\rangle + T \left. \frac{\partial}{\partial\omega} \langle\hat{\mathbf{T}}\rangle(\omega) \right|_{\omega=0}. \quad (8.46)$$

Der erste Term auf der rechten Seite der obigen Gleichung gibt die unphysikalischen Isospinfluktuationen des Solitons aufgrund der Hedgehog-Symmetrie der mittleren Felder, in denen sich die Quarks bewegen, an. Der zweite Term (der im Falle $T=0$ verschwindet) führt zu den thermischen Fluktuationen im Medium. Der Proportionalitätsfaktor zwischen dem mittleren Isospin $\langle\hat{\mathbf{T}}\rangle(\omega)$ und der Rotationsgeschwindigkeit des Solitons ist der Trägheitsparameter für die Rotation im Isospin-Raum

$$\mathcal{J}_{ik} \equiv \left. \frac{\partial}{\partial\omega^i} \langle T^k \rangle(\omega) \right|_{\omega=0} = \mathcal{J} \delta_{ik}, \quad (8.47)$$

der diagonal ist, da im Isospin-Raum im Ortsmittel keine Richtung bevorzugt ist. Desweiteren verschwindet für die solitonische Lösung der Erwartungswert des Isospins bei $\omega = \mathbf{0}$, d. h. $\langle\hat{\mathbf{T}}\rangle = \langle\hat{\mathbf{T}}\rangle(\omega = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ – im Isospin-Raum ist keine Richtung bevorzugt. Explizit erhält

man dies, wenn man z. B. $\langle \hat{T}^3 \rangle$ mit Hilfe der Einteilchenbasis (Anhang D) berechnet. Der Anteil eines Einteilchenzustandes mit der Einteilchenenergie ε_λ , Parität Π , Superspin g und Projektion m ist gegeben durch (siehe z. B. [92])

$$\langle \lambda g m \Pi | t^3 | \lambda g m \Pi \rangle = (-1)^{g-m} \begin{pmatrix} g & 1 & g \\ -m & 0 & m \end{pmatrix} \langle \lambda g \Pi || t || \lambda g \Pi \rangle . \quad (8.48)$$

Der Ausdruck in den großen runden Klammern ist das 3j-Symbol, und $\langle \lambda g \Pi || t || \lambda g \Pi \rangle$ ist das reduzierte Matrixelement, das unabhängig von der Projektion m ist. Das 3j-Symbol hat den Wert $2m/[2g(2g+1)(2g+2)]^{1/2}$ [92] und ist proportional zur Projektion m des Superspins, so daß der Erwartungswert in Gl. (8.48) nach der Summation über die Projektionsquantenzahlen verschwindet.

Diese Überlegungen ergeben mit Gl. (8.45) und Gl. (8.46)

$$\langle \hat{T}^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{T})^2 \rangle = \langle [\hat{T}^2]_{(1)} \rangle + 3\mathcal{J}T . \quad (8.49)$$

Die mit diesen Isospinfluktuationen verbundenen kinetischen Energien erhält man bei Division der obigen Gleichung durch das Zweifache des Trägheitsparameters für die Rotation

$$E_{\text{rot}}^{\text{fl}} = \frac{\langle [\hat{T}^2]_{(1)} \rangle}{2\mathcal{J}} + \frac{3}{2}T . \quad (8.50)$$

Der 2. Term beschreibt wieder die thermischen Fluktuationen des Solitons bei Anwesenheit eines Mediums (auf jeden Rotations-Freiheitsgrad entfallen $T/2$), und der 1. Term liefert die unphysikalische Rotationsenergie

$$E_{\text{rot}} = \frac{\langle [\hat{T}^2]_{(1)} \rangle}{2\mathcal{J}} , \quad (8.51)$$

die von der Meanfield-Energie zu subtrahieren ist. Der Erwartungswert des Einteilchenbeitrages von \hat{T}^2 ist endlich und wird nicht regularisiert. Aus den Vertauschungsrelationen der Isospin-Matrizen folgt $t^2 = 3/4 I$. Setzt man dies für o in den Formeln (4.68) und (4.74) ein, so ist der Ausdruck proportional zur Baryonenzahl. Man erhält für Gl. (8.51)

$$E_{\text{rot}} = \frac{9B}{8\mathcal{J}} . \quad (8.52)$$

Um das Nukleon mit Isospin $\mathcal{T} = 1/2$ oder die Δ -Isobaren ($\mathcal{T} = 3/2$) zu erhalten, betrachten wir ein im Isospin-Raum als Ganzes rotierendes Soliton dessen semiklassisch quantisierter Isospin den Wert \mathcal{T} haben soll. Die Energie dieser kollektiven Rotation ist näherungsweise durch den Cranking Term

$$E_{\text{crank}}^{\mathcal{T}} = \frac{\mathcal{T}(\mathcal{T}+1)}{2\mathcal{J}} , \quad (8.53)$$

gegeben, den wir zur Gesamtenergie addieren.

Nach den Schwerpunkts- und Rotationskorrekturen sind die korrigierten, vom Isospin der Feldkonfiguration abhängigen, inneren und freien Energien sowie das großkanonische Potential gegeben durch

$$\begin{aligned} E_{\text{korr}}^{\mathcal{T}} &= E - E_{\text{cmm}} - E_{\text{rot}} + E_{\text{crank}}^{\mathcal{T}}, \\ F_{\text{korr}}^{\mathcal{T}} &= F - E_{\text{cmm}} - E_{\text{rot}} + E_{\text{crank}}^{\mathcal{T}}, \\ \Omega_{\text{korr}}^{\mathcal{T}} &= \Omega - E_{\text{cmm}} - E_{\text{rot}} + E_{\text{crank}}^{\mathcal{T}} \end{aligned} \quad (8.54)$$

mit den Korrekturen aus den Gln. (8.21), (8.52) und (8.53).

Der Energieunterschied zwischen der solitonischen Feldkonfiguration mit dem Isospin $\mathcal{T} = 3/2$ und solchen mit dem Isospin $\mathcal{T} = 1/2$, der die Massenaufspaltung zwischen Nukleon und Δ -Isobaren beschreibt, ist gegeben durch

$$\Delta E_{\Delta N} = E_{\text{korr}}^{\mathcal{T}=3/2} - E_{\text{korr}}^{\mathcal{T}=1/2} = E_{\text{crank}}^{\mathcal{T}=3/2} - E_{\text{crank}}^{\mathcal{T}=1/2} = \frac{3}{2\mathcal{J}} \quad (8.55)$$

und proportional zum Inversen des regularisierten und temperatur- und dichteabhängigen Trägheitsmomentes. Die Kenntnis des Trägheitsmomentes im Medium erlaubt auch die Bestimmung der Δ -Nukleon-Massenaufspaltung in Abhängigkeit von Temperatur und Teilchendichte der Umgebung.

Die Bestimmung des Trägheitsmomentes und die anschließende Berechnung der korrigierten Meanfield-Energien ist im folgenden Abschnitt gegeben.

8.2.1 Trägheitsparameter für Rotation im Isospin-Raum – Trägheitsmoment

Die Berechnung des Trägheitsparameters für die Rotation im Isospin-Raum erfolgt in Analogie zum vorigen Kapitel.

Wir nehmen wieder eine adiabatische Bewegung des Solitons an und betreiben Störungstheorie in ω bezüglich der Meanfield-Lösung bei $\omega = 0$. Das großkanonische Potential für ein rotierendes Soliton ist durch den Ausdruck (4.34) gegeben, bei dem der Einteilchen-Quark-Hamilton-Operator h ersetzt wurde durch den Ausdruck in Gl. (8.44) mit dem Einteilchen-Isospin-Operator $t = \tau/2$. Die Rotationsgeschwindigkeit ω kann man hier als Lagrange-Parameter zur Fixierung des mittleren Isospins $\langle \hat{T} \rangle(\omega)$ des Solitons betrachten. Der Term $-\omega \cdot t$ wirkt für die Quarks in dem mitbewegten System wie ein zusätzliches Feld. Die Rotationsgeschwindigkeit ist wieder antihermitesch $\omega^\dagger = -\omega$ anzusetzen. Die zu Gl. (8.28) analoge Beziehung zur Bestimmung des Trägheitsmomentes für die Rotation im Isospin-Raum ergibt (Gl. (8.47))

$$\mathcal{J}_{ik} \equiv \frac{\partial}{\partial \omega^i} \langle T^k \rangle(\omega) \Big|_{\omega=0} = - \frac{\partial^2 \Omega_{\Lambda}(T, \mu; \omega)}{\partial \omega^i \partial \omega^k} \Big|_{\omega=0}. \quad (8.56)$$

Die Berechnung der Beiträge von See- und Mediumquarks zum Trägheitsmoment ist im Anhang G ausgeführt.

Für den regularisierten Seeanteil erhält man nach Abzug des Anteils vom homogenen Medium (Gl. (G.17))

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Lambda^{\text{q,see}} &\equiv - \frac{\partial^2}{\partial \omega^3 \partial \omega^3} \Omega_\Lambda^{\text{q,sea}}(\omega) \Big|_{\omega=0} \\ &= \frac{N_c}{2} \sum_{\alpha\beta} \left[R_{\mathcal{J}}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta; \Lambda) \frac{\langle \alpha | t^3 | \beta \rangle \langle \beta | t^3 | \alpha \rangle}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha} \right. \\ &\quad \left. - R_{\mathcal{J}}(\varepsilon_\alpha^0, \varepsilon_\beta^0; \Lambda) \frac{\langle \alpha^0 | t^3 | \beta^0 \rangle \langle \beta^0 | t^3 | \alpha^0 \rangle}{\varepsilon_\beta^0 - \varepsilon_\alpha^0} \right] \end{aligned} \quad (8.57)$$

mit der Regularisierungsfunktion (Gl. (G.18))

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{J}}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta; \Lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds s^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha} \left[e^{-s\varepsilon_\alpha^2} - e^{-s\varepsilon_\beta^2} - s(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot (\varepsilon_\beta e^{-s\varepsilon_\beta^2} + \varepsilon_\alpha e^{-s\varepsilon_\alpha^2}) \right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha} \left[2|\varepsilon_\beta| R_\varepsilon(\varepsilon_\beta; \Lambda) - 2|\varepsilon_\alpha| R_\varepsilon(\varepsilon_\alpha; \Lambda) \right. \\ &\quad \left. - (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) (R_\phi(\varepsilon_\beta; \Lambda) \text{sign}(\varepsilon_\beta) + R_\phi(\varepsilon_\alpha; \Lambda) \text{sign}(\varepsilon_\alpha)) \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Lambda}{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta} \left[e^{-(\varepsilon_\alpha/\Lambda)^2} - e^{-(\varepsilon_\beta/\Lambda)^2} \right] \\ &\quad + R_\phi(\varepsilon_\beta; \Lambda) \text{sign}(\varepsilon_\beta) - R_\phi(\varepsilon_\alpha; \Lambda) \text{sign}(\varepsilon_\alpha), \end{aligned} \quad (8.58)$$

die man auf die beiden Regularisierungsfunktionen (Gl. (4.23)) und (Gl. (4.41)) zurückführen kann. Mit Hilfe der Drehimpuls-Algebra kann man zeigen, daß die Matrixelemente $\langle \alpha | t^3 | \beta \rangle$ nur von Null verschieden sind, wenn der Superspin und die Parität der beiden Zustände gleich sind (Ausnahme $g=g'=0$) oder die Zustände sich im Superspin um Eins unterscheiden und entgegengesetzte Parität aufweisen.

Da wir nur den nicht explizit vom chemischen Potential und der Temperatur abhängigen Seeanteil regularisieren, stimmt unser Ergebnis mit [93] überein, bei der diese Cranking Prozedur für das Soliton im nicht-störungstheoretischem QCD-Vakuum durchgeführt wurde. Der Einfluß des Mediums ist hier implizit gegeben durch die Verschiebung der Einteilchen-Energieniveaus und Veränderung der Energieeigenfunktionen der Quarks gegenüber dem Vakuum aufgrund der temperaturabhängigen mittleren Felder.

Aus der letzten Beziehung in Gl. (8.58) kann man leicht den Limes $\Lambda \rightarrow \infty$ erhalten. Der Term mit den Exponentialfunktionen geht gegen Null und R_ϕ geht gegen Eins, so daß sich $R_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \text{sign}(\varepsilon_\beta) - \text{sign}(\varepsilon_\alpha) = 2[\Theta(\varepsilon_\beta) - \Theta(\varepsilon_\alpha)]$ ergibt, was auf die in der Kernphysik bekannte Inglis-Formel [94,95] für das Trägheitsmoment führt. Die Differenz der Thetafunktionen ist nur von Null verschieden, wenn die Energieniveaus unterschiedliches Vorzeichen haben. In dem vereinfachten Bild des vollbesetzten Dirac-Sees heißt dies, daß nur Übergänge zwischen besetzten (negativen) Energieniveaus und unbesetzten (positiven) Niveaus beitragen. Für $\varepsilon_\beta \rightarrow \varepsilon_\alpha$ ergibt sich im unregularisierten Fall $\Theta(\varepsilon_\beta) - \Theta(\varepsilon_\alpha) / (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) \xrightarrow{\varepsilon_\beta \rightarrow \varepsilon_\alpha} = \delta(\varepsilon_\alpha)$, was aufgrund der Energielücke im Einteilchenspektrum keinen Beitrag liefert.

Für den regularisierten Ausdruck (Gl. (8.57)) kann man zeigen, daß die Übergänge zwischen dicht benachbarten Energieniveaus $\varepsilon_\beta \rightarrow \varepsilon_\alpha$, und damit speziell Übergänge zwischen denselben Einteilchen-Energieniveaus $\varepsilon_\beta = \varepsilon_\alpha$, keinen Beitrag zum regularisierten Trägheitsmoment des Dirac-Sees in Gl. (8.57) liefern ($R_{\mathcal{J}}/(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) \xrightarrow{\varepsilon_\beta \rightarrow \varepsilon_\alpha} 0$). Ebenso kann man zeigen, daß auch der Limes $\varepsilon_\beta \rightarrow -\varepsilon_\alpha$ wohldefiniert ist ($R_{\mathcal{J}} \xrightarrow{\varepsilon_\beta \rightarrow -\varepsilon_\alpha} -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\varepsilon_\alpha}{\Lambda} e^{-(\varepsilon_\alpha/\Lambda)^2} - 2R_\phi(\varepsilon_\alpha; \Lambda) \text{sign}(\varepsilon_\alpha)$).

Der bei endlicher Temperatur und/oder Teilchendichte hinzukommende Mediumanteil ist, nach Abzug des Anteils vom homogenen Medium, gegeben durch den Ausdruck (Gl. (G.30))

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{\text{q,med}}(T, \mu) &\equiv - \frac{\partial^2}{\partial \omega^3 \partial \omega^3} \Omega^{\text{q,med}}(T, \mu; \omega) \Big|_{\omega=0} \\ &= N_c \sum_{\alpha\beta} \left\{ [\tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\alpha) - \tilde{n}(\varepsilon_\beta; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\beta)] \frac{\langle \alpha | t^3 | \beta \rangle \langle \beta | t^3 | \alpha \rangle}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha} \right. \\ &\quad \left. - [\tilde{n}(\varepsilon_\alpha^0; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\alpha^0) - \tilde{n}(\varepsilon_\beta^0; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\beta^0)] \frac{\langle \alpha^0 | t^3 | \beta^0 \rangle \langle \beta^0 | t^3 | \alpha^0 \rangle}{\varepsilon_\beta^0 - \varepsilon_\alpha^0} \right\}, \quad (8.59) \end{aligned}$$

der die mittleren Besetzungszahlen der Einteilchenniveaus, d. h. die thermodynamische Wahrscheinlichkeit mit der die Einteilchenniveaus der Quarks bevölkert sind, enthält. Besitzen die Energieniveaus ε_α und ε_β dasselbe Vorzeichen, so ist ihr Beitrag zum Mediumanteil (Gl. (8.59)) positiv, besitzen sie verschiedenes Vorzeichen, so ist der Beitrag negativ.

Im Gegensatz zum regularisierten Seeanteil des Trägheitsmomentes liefern die Übergänge zwischen dicht benachbarten Energieniveaus $\varepsilon_\beta \rightarrow \varepsilon_\alpha$, und damit speziell Übergänge zwischen denselben Energieniveaus, einen endlichen Beitrag zum Trägheitsmoment des Mediums. Es gilt $[\tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\alpha) - \tilde{n}(\varepsilon_\beta; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\beta)]/(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) \xrightarrow{\varepsilon_\beta \rightarrow \varepsilon_\alpha} -\frac{\partial}{\partial \varepsilon_\alpha} [\tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\alpha)] = \tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu) [1 - \tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu)]/T$. Für große Temperaturen sind diese Übergänge zwischen dicht benachbarten Energieniveaus somit unterdrückt. Diese Terme führen allerdings zu Schwierigkeiten bei kleinen Temperaturen und endlichen Dichten. Bildet man nämlich den Limes für kleine Temperaturen, so erhält man δ -Funktionen $-\frac{\partial}{\partial \varepsilon_\alpha} [\tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\alpha)] \xrightarrow{T \rightarrow 0} \delta(\mu \text{sign}(\varepsilon_\alpha) - |\varepsilon_\alpha|)$. Unsere numerischen Untersuchungen zeigen, daß erst ab $T \approx 50$ MeV für nichtverschwindende Teilchendichten stabile mittlere Felder berechnet werden können. Für kleine von Null verschiedene Temperaturen wird aus der δ -Funktion eine Glockenkurve die bei Energieeigenwerten um das chemische Potential herum konzentriert ist. Die positiven Energieeigenzustände um μ herum liefern dann die wesentlichen Beiträge zum Trägheitsmoment des Mediumanteils. Bei verschwindender Mediumdichte, also $\mu = 0$, verschwinden diese Beiträge. Dies liegt an der Lücke im Energiespektrum der Quarks in der Nähe verschwindender Energie.

Der Beitrag des Valenzniveaus zu dem Mediumanteil in Gl. (8.59) ergibt sich, mit der auf Eins fixierten Besetzungszahl des Valenzniveaus, zu

$$\mathcal{J}^{\text{q,val}}(T, \mu) \equiv 2N_c \sum_{\alpha} [1 - \tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\alpha)] \frac{\langle \text{val} | t^3 | \alpha \rangle \langle \alpha | t^3 | \text{val} \rangle}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\text{val}}}, \quad (8.60)$$

der Übergänge zwischen dem Valenzniveau und Niveaus, die mit der thermodynamischen Wahrscheinlichkeit $\tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu)$ besetzt sind, beschreibt. Für $\mu=0$ und $T=0$ und ein vollbesetztes Valenzniveau erhält man den bekannten Valenzbeitrag für den Fall des Solitons im Vakuum

$$\mathcal{J}^{\text{q, val}}(T=0, \mu=0) = 2N_c \sum_{\alpha} \frac{\langle \text{val} | t^3 | \alpha \rangle \langle \alpha | t^3 | \text{val} \rangle}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\text{val}}}. \quad (8.61)$$

Das Valenzniveau, als das niedrigste positive Energieniveau im Einteilchen-Energiespektrum der Quarks, die sich in den selbstkonsistenten sphärischen Hedgehog-Feldern bewegen, trägt den Superspin $g=0$. Da die Matrixelemente zwischen Einteilchenniveaus mit dem Superspin $g=g'=0$ verschwinden, liefert der Term mit $\alpha=\text{val}$ in Gl. (8.60) keinen Beitrag zur Summe. Da das Valenzniveau von den anderen Niveaus deutlich separiert ist, ergibt sich keine Schwierigkeit mit kleinen Energiedifferenzen im Nenner.

Das gesamte Trägheitsmoment des Solitons ist die Summe der Beiträge aus Gl. (8.57) und Gl. (8.59)

$$\mathcal{J}_\Lambda(T, \mu) = \mathcal{J}_\Lambda^{\text{q, see}} + \mathcal{J}^{\text{q, med}}(T, \mu), \quad (8.62)$$

wobei $\mathcal{J}^{\text{q, val}}$ ein Bestandteil von $\mathcal{J}^{\text{q, med}}$ ist.

Die Größenordnung des gesamten Trägheitsmomentes kann abgeschätzt werden, wenn man für den Fall des Solitons im Vakuum die experimentellen Massen von Nukleon $E_N(T=0, \mu=0) = 938 \text{ MeV}$ und Δ -Isobaren $E_\Delta(T=0, \mu=0) = 1232 \text{ MeV}$ zu grunde legt. Diese Massenaufspaltung ist proportional zum Inversen des Trägheitsmomentes (Gl. (8.55)) und liefert für den Vakuumfall den experimentellen Wert $\mathcal{J}_\Lambda(T=0, \mu=0) = 1,01 \text{ fm}$.

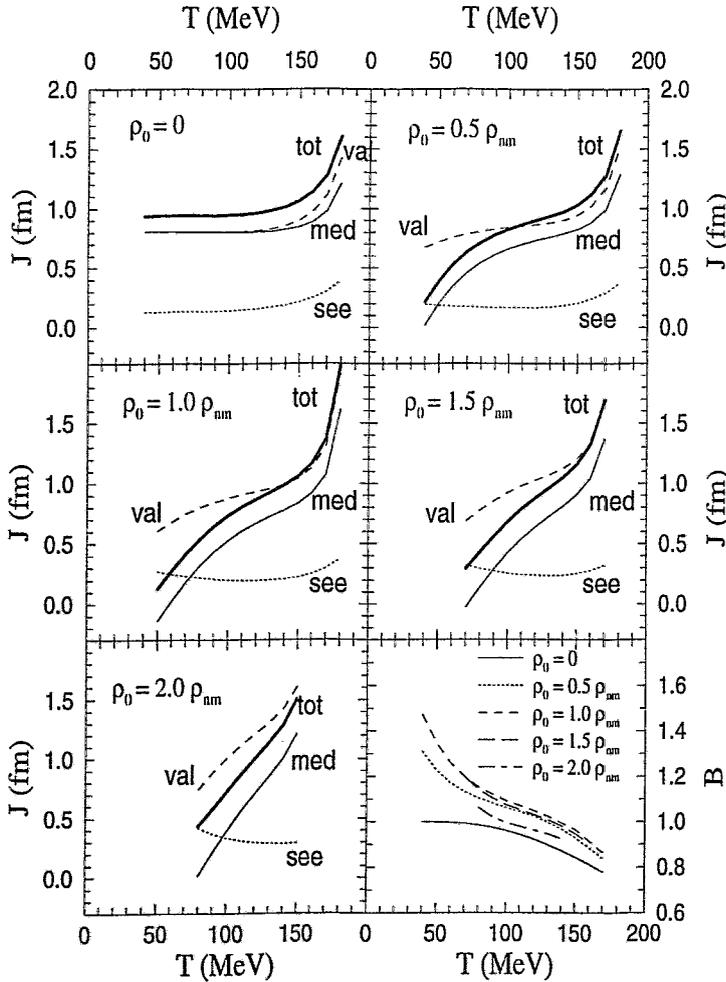
Die Abbildung 8-3 zeigt die numerischen Ergebnisse, berechnet mit der selbstkonsistenten Meanfield-Lösung, für den regularisierten Seeanteil (Gl. (8.57)), den Mediumanteil (Gl. (8.59)) und den Valenzanteil (Gl. (8.60)) am Trägheitsmoment. Das gesamte Trägheitsmoment (Gl. (8.62)), als Summe von Medium- und regularisierten Seeanteil, ist ebenfalls angegeben.

Der starke Anstieg des Valenzanteils bei hohen Temperaturen, unmittelbar vor dem Verschwinden der solitonischen Lösung, führt dann zu einem starken Anstieg des totalen Trägheitsmomentes. Da die Energiekorrekturen proportional zum Inversen des Trägheitsmomentes sind, ist das Verfahren am ehesten im Bereich höherer Temperaturen geeignet.

Bei endlichen Baryonendichten der Umgebung, in die das Soliton eingebettet ist, zeigt sich bei kleinen Temperaturen ein Abnehmen des Valenzanteils am Trägheitsmoment. Dies kann man qualitativ verstehen, wenn man in Gleichung (8.60) den Grenzfall $T \rightarrow 0$ betrachtet. Wegen

$$[1 - \tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\alpha)] \xrightarrow{T \rightarrow 0} [1 - \Theta(\mu \text{sign}(\varepsilon_\alpha) - |\varepsilon_\alpha|) \text{sign}(\varepsilon_\alpha)] = \begin{cases} 1 & : \varepsilon_\alpha > \mu \\ 0 & : 0 < \varepsilon_\alpha < \mu \\ 1 & : \varepsilon_\alpha < 0 \end{cases} \quad (8.63)$$

liefern nur Übergänge zwischen dem Valenzniveau und unbesetzten Niveaus einen Beitrag zum Trägheitsmoment. Da dann aber die Differenz $\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\text{val}}$ zu unbesetzten Niveaus vom Betrag her besonders hoch ist, sind das die kleineren Beiträge zum Trägheitsmoment in Gl. (8.60). Natürlich spielt hier noch die Größe der Matrixelemente $\langle \text{val} | t^3 | \alpha \rangle$ eine

**Bild 8-3:**

See- (see) (Gl. (8.57)) und Mediumbeitrag (med) aus Gl. (8.59) sowie das gesamte (tot) Trägheitsmoment als deren Summe (Gl. (8.62)) für die Rotation im Isospinraum in Abhängigkeit von der Temperatur (T) und Baryondichte des Mediums (ρ_0). Die Valenzquarks liefern zum Trägheitsmoment des Mediumbeitrages den Anteil (val) (Gl. (8.60)).

Rolle, so daß die Diskussion qualitativer Art ist. Übergänge zwischen dem Valenzniveau und Zuständen unterhalb der Fermi-Kante (μ) würden, aufgrund des kleineren Niveauabstandes, einen größeren Beitrag liefern. Da diese Niveaus für kleine Temperaturen besetzt sind, sind diese Übergänge unterdrückt (Pauli-Blockierung). Umgekehrt liefert dies auch ein qualitatives Verständnis für die Zunahme des Valenzbeitrages bei höheren Temperaturen, da dann genau diese Übergänge möglich werden. Für $\rho_0 \neq 0$ und kleine Temperaturen wird, durch die näherungsweise Beschreibung der baryonischen Umgebung als ein Gas von Konstituentenquarks, der Einfluß des Mediums sicher überschätzt.

8.2.2 Δ -Nukleon-Massenaufspaltung und Energien des Nukleons

Mit der Kenntnis des Trägheitsmomentes sind wir in der Lage, die Δ -Nukleon-Massenaufspaltung (Gl. (8.55)) im Medium zu bestimmen. Im oberen Teilbild der Abbildung 8-4 ist

noch einmal zusammenfassend das gesamte Trägheitsmoment (Gl. (8.62)) in Abhängigkeit von Baryonendichte und Temperatur der Umgebung dargestellt. Eine Erhöhung der Tem-

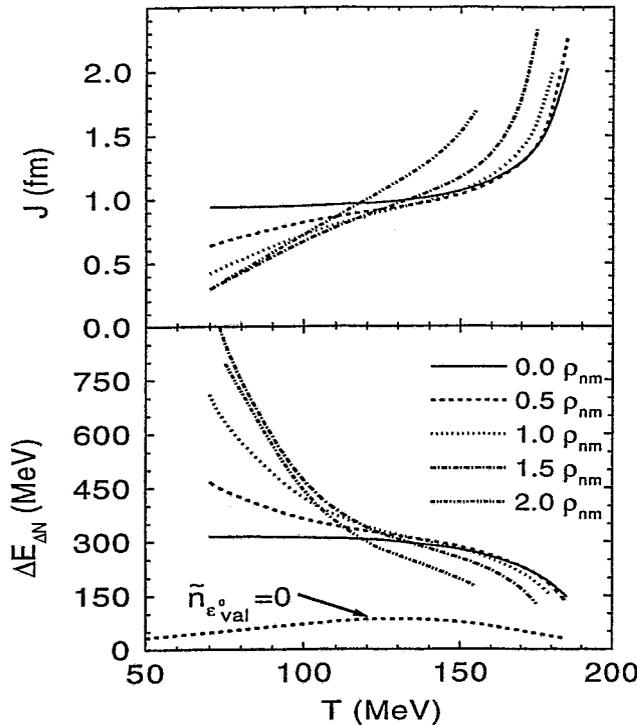


Bild 8-4:

Gesamtes Trägheitsmoment \mathcal{J} (Gl. (8.62)) des Solitons für die Rotation im Isospin-Raum und dazugehörige Δ -Nukleon-Massenaufspaltung (Gl. (8.55)) in Abhängigkeit von der Temperatur und Baryonendichte der Umgebung, in dem das Soliton eingebettet ist. Die unterste Kurve in dem unteren Teilbild zeigt die berechnete Massenaufspaltung bei $\rho_0 = 0.5 \rho_{nm}$, wenn das ungebundene Valenzniveau des homogenen Mediums unbesetzt bleibt.

peratur hat bei konstanter Mediumdichte generell ein Erhöhung des Trägheitsmomentes und damit verbunden eine Abnahme der Δ -Nukleon-Massenaufspaltung zur Folge.

Bei verschwindender Baryonendichte der Umgebung zeigt sich erst ab $T \gtrsim 150$ MeV ein deutlicher Anstieg des Trägheitsmomentes bei Erhöhung der Temperatur. Damit verbunden ist dann ein Abfall der Δ -Nukleon-Massenaufspaltung, was im unteren Teilbild zu erkennen ist. Bei Temperaturen unterhalb 100 MeV und endlicher Baryonendichte wird das Trägheitsmoment sehr klein und damit die Massenaufspaltung unsinnig groß. Dies deutet auf eine Instabilität bezüglich der Rotation im Isospin-Raum in diesem Dichte- und Temperaturbereich hin und die Behandlung der Rotation als kleine Störung ist hier nicht mehr gerechtfertigt. Wie bei den Schwerpunktskorrekturen in Abschnitt 8.1.2 sind auch hier die Korrekturen am ehesten bei größeren Temperaturen gerechtfertigt, bei denen diese Korrekturen abnehmen, was auch aus der Abnahme der Δ -Nukleon-Massenaufspaltung ersichtlich ist.

Die quasi-klassischen Energiekorrekturen in Gl. (8.54) representieren Terme einer $1/N_c$ Entwicklung. Die Meanfield-Energien sind proportional zu N_c , die Quantenfluktuationen sind proportional zu $(1/N_c)^0$ und der Crankingterm ist proportional zu $1/N_c$. So ist es nicht

überraschend, daß für $\rho_0 = 0$ die Δ -Nukleon-Massenaufspaltung eine ähnliche Abhängigkeit von der Temperatur zeigt, wie sie in der chiralen Störungstheorie für schwere Baryonen bei Benutzung einer $1/N_c$ Entwicklung erhalten wurde [96]. Die Korrektur $E_{\text{crank}}^T - E_{\text{rot}}$ in Gl. (8.54) ist negativ für Nukleonen und positiv für Δ -Isobaren und ihr Betrag ist, bis auf einen Anteil der von der Abweichung der Baryonenzahl von Eins herrührt, für beide Teilchenarten gleich. In [96] sind die Absolutwerte für die Massenkorekturen für Nukleon und Δ unterschiedlich, dort werden aber auch s-Quarks berücksichtigt. Wir erhalten bei $T \approx 130$ MeV eine Reduzierung der Δ -Nukleon-Massenaufspaltung von etwa 5% gegenüber dem Vakuumwert im Vergleich zu 20% in [96].

Aufgrund des kleinen Trägheitsmomentes bei $\rho_0 \neq 0$ und kleinen Temperaturen, sollte man hier die Energiewerte für die Δ -Nukleon-Massenaufspaltung erst für $T \gtrsim 100$ MeV ernst nehmen. Für $T \gtrsim 120$ MeV hat eine Erhöhung der Baryondichte der Umgebung einen stärkeren Rückgang der Δ -Nukleon-Massenaufspaltung zur Folge. Kurz vor dem Verschwinden der solitonischen Lösung ist die Δ -Nukleon-Massenaufspaltung für alle Baryondichten auf ca. die Hälfte des Vakuumwertes ($\rho_0 = 0, T = 0$) gefallen.

Die unterste Kurve im unteren Teilbild der Abbildung 8-4 zeigt die Massenaufspaltung bei einer Umgebungsdichte von $\rho_0 = 0.5 \rho_{\text{nm}}$, die man erhält, wenn man wie in Ref. [16] vorgeht und das Valenzniveau im homogenen Medium unbesetzt läßt. In diesem Fall sind die Übergänge zu diesem unbesetzten Valenzniveau bevorzugt und der Mediumanteil am Trägheitsmoment in Gl. (8.59) wird sehr groß und damit die Δ -Nukleon-Massenaufspaltung schon bei geringen Umgebungsdichten sehr klein. Aus diesem Grund ist dieses Niveau bei uns mit der entsprechenden thermischen Wahrscheinlichkeit besetzt, im Gegensatz zu [16].

Die Abbildung 8-5 zeigt die nukleonischen Energien, die sowohl die Schwerpunkts- als auch die Rotationskorrekturen enthalten. Für die Nukleonen-Masse im Vakuum ($\rho_0 = 0, T = 0$) erhält man ca. 750 MeV, was um etwa 200 MeV zu niedrig ist. Die Absolutwerte der Energien muß man somit im Vergleich zu diesem Wert betrachten. Die Energien nach den Korrekturen sind relativ stark vom Parameter des Modells, der Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse, abhängig. Wir haben für diesen einzigen freien Parameter einen Wert von 420 MeV benutzt, der die experimentelle Δ -Nukleon-Massenaufspaltung im Vakuum reproduziert, da das NJL-Modell bevorzugt zur Berechnung von Massenaufspaltungen zwischen verschiedenen Baryonen benutzt wird.

Bis auf die Region unmittelbar vor dem Verschwinden der solitonischen Lösungen findet man für alle Umgebungsdichten eine Zunahme der Energien des Nukleons bei Zunahme der Temperatur. Das ist auch dort der Fall wo die Konstituenten-Quarkmasse abnimmt. Die Konstituenten-Quarkmasse skaliert wegen Gl. (6.7), und der Annahme einer temperatur- und dichteunabhängigen Kopplungskonstante G , mit dem Quarkkondensat. Das Brown-Rho-Skalenverhalten [2, 83] sagt qualitativ voraus, daß eine Abnahme (Zunahme) des Quarkkondensates eine Abnahme (Zunahme) der Masse des Nukleons zur Folge hat. Dieser Zusammenhang ist in diesem Soliton-Modell nicht gegeben. Qualitativ gilt die Brown-Rho-Skalierung in diesem Modell nur auf dem Niveau der Konstituenten-Quarkmasse. Ursache für die starke Abweichung vom Brown-Rho-Skalenverhalten der

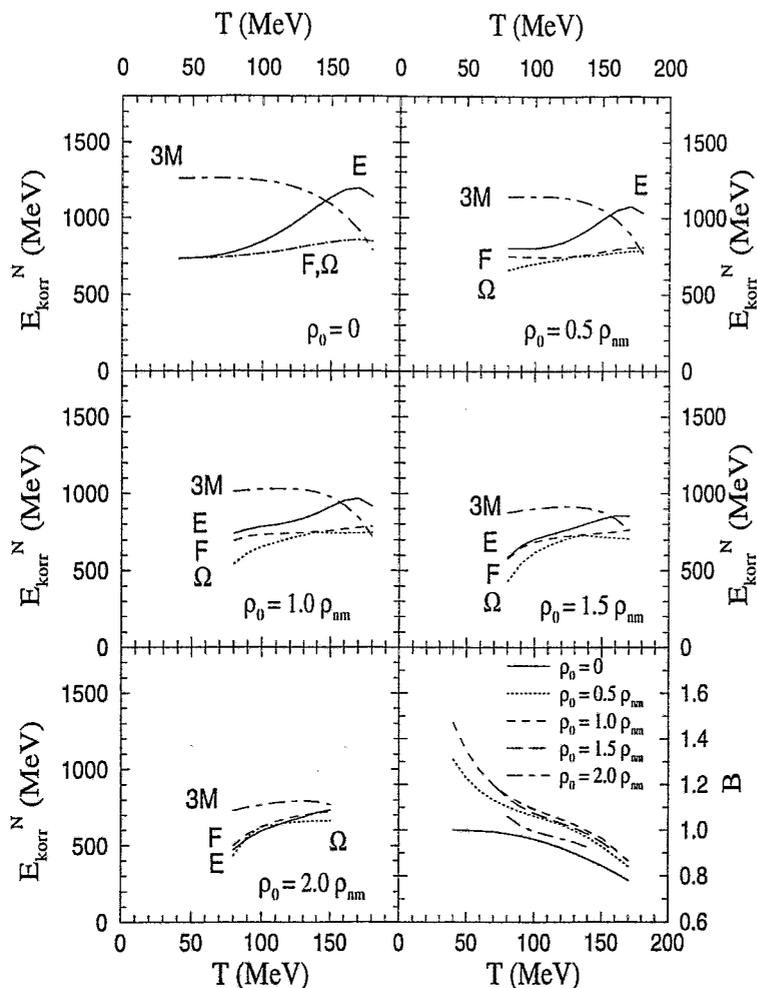


Bild 8-5:

Die Schwerpunkts- und rotationskorrigierte innere (E) und freie Energie (F) sowie das großkanonische Potential (Ω) der solitonischen Feldkonfiguration aus Gl. (8.54) mit dem Isospin $\mathcal{T} = 1/2$ in Abhängigkeit von der Temperatur (T) bei unterschiedlichen Baryondichten (ρ_0) des Mediums. Zum Vergleich ist das Dreifache der Konstituenten-Quarkmasse ($3M$) aufgetragen.

Nukleonen-Masse sind die mit wachsender Temperatur abnehmenden Schwerpunkts- und Rotationskorrekturen, die Änderungen in der inneren Struktur des Nukleons signalisieren. Qualitativ ist das Verhalten der inneren Energie E ähnlich dem Bag-Modell in [90], in dem die Energieniveaus der Quarks im Bag mit der entsprechenden thermischen Wahrscheinlichkeit besetzt werden und außerdem eine mediumabhängige Bag-Konstante eingeführt wird. Zusätzlich koppeln dort die Quarks an die Zeitkomponente des ω -Mesons. Eine Zunahme der Masse des Nukleons mit Zunahme der Temperatur wurde für $\rho_0 = 0$ auch im Rahmen der chiralen Störungstheorie [1, 96] erhalten.

9 Zusammenfassung und Ausblick

In der Arbeit wurden die Eigenschaften eines $SU(2)$ -NJL-Solitons untersucht, welches in ein Gas bestehend aus Konstituentenquarks mit einer selbstkonsistent bestimmten Konstituenten-Quarkmasse eingebettet ist. Es dient als Modell für ein von hadronischer Materie umgebenes Nukleon und soll Aussagen über die Eigenschaften des Nukleons in Abhängigkeit von Temperatur und Dichte der umgebenden Materie liefern. Die im NJL-Modell enthaltene 4-Quark-Punktwechselwirkung wird in der Näherung des mittleren Feldes behandelt, bei Beschränkung auf Hedgehog-Konfigurationen und chiralen Zirkel. Das untersuchte Soliton besteht aus einer lokalisierten Abweichung des mittleren Feldes von seinen konstanten Werten im homogenen Medium von Konstituentenquarks. Ausdehnung und Tiefe der Abweichung bestimmen im wesentlichen die Eigenschaften des Solitons.

Es hat sich gezeigt, daß bei endlichen Werten von Temperatur und Dichte ein stabiles Soliton nur dann existiert, wenn das Valenzniveau wie im Vakuum mit genau 3 Quarks besetzt wird. In diesem Fall erhält man solitonische Konfigurationen bis etwa 180 MeV Temperatur und doppelter Kerndichte. Bei Verwendung der entsprechenden thermischen Besetzungszahl für das Valenzniveau ist das Soliton bereits ab einer Temperatur von etwa 80 MeV instabil, d. h. die homogene Feldverteilung mit freien Konstituentenquarks ist die einzige Lösung der mittleren Feldgleichung.

Damit das Soliton endlich bleibt, muß sein mittleres Feld für genügend große Entfernungen in das homogene Feld des Mediums übergehen. Da das mittlere Feld selbstkonsistent mit den entsprechenden Quarkfeldern bestimmt wird, kann das nur erreicht werden, wenn Soliton und homogenes Medium durch gleiche Werte von Temperatur und chemisches Potential charakterisiert sind. Da der Wert des chemischen Potentials des Mediums durch dessen Dichte bei gegebener Temperatur bereits festgelegt ist, entfällt somit die Möglichkeit durch ein abweichendes chemisches Potential für die solitonische Feldkonfiguration dessen Baryonenzahl auf den gewünschten Wert 1 zu fixieren. Im Rahmen des Modells hat eine solitonische Feldkonfiguration eine Baryonenzahl B , die von Mediumdichte und Temperatur abhängt und etwas vom Wert 1 abweicht ($0.8 \lesssim B \lesssim 1.2$). Bei einer Feldkonfiguration mit fixierter Baryonenzahl ist stets ein Teil der baryonischen Ladung homogen im Raum verteilt, was im Widerspruch zum solitonischen Charakter des Feldes steht.

Die durch die Näherung des ortsabhängigen mittleren Feldes und des Hedgehog-Ansatzes hervorgerufenen Quantenfluktuationen des Solitons und die damit verbundenen unphysikalischen kinetischen Energien wurden näherungsweise mit Hilfe des quasi-klassischen Pushing- und Cranking-Verfahrens bestimmt. Diese Energiebeiträge hängen dabei von den Trägheitsmomenten für die Translation und Rotation des Solitons ab, die in diesem Modell erstmalig für das im Medium eingebettete Soliton berechnet wurden. Analytisch konnte die nichttriviale Gleichheit von träger Masse und innerer Energie des Solitons gezeigt werden. Das Trägheitsmoment für die Rotation wurde separat numerisch bestimmt und erlaubt die Berechnung der Δ -Nukleon-Massenaufspaltung im Medium. Eine Erhöhung der Temperatur hat eine Abnahme der Δ -Nukleon-Massenaufspaltung zur Folge. Kurz vor dem Verschwinden der solitonischen Lösung reduziert sich die Massen-

aufspaltung für alle Baryondichten auf ungefähr die Hälfte des Vakuumwertes.

Als ein Resultat der inneren Struktur des Nukleons ist das Verhalten seiner Energien, in Abhängigkeit von den thermodynamischen Parametern der Umgebung, wesentlich verschieden vom Verhalten der Konstituenten-Quarkmasse. Eine Reduzierung der Konstituenten-Quarkmasse, und damit verbunden die Abnahme der Tiefe der Potentiale in denen sich die Quarks bewegen, wird durch eine größere räumliche Ausdehnung der selbstkonsistenten mittleren Felder teilweise kompensiert. Dies führt zu einer Zunahme des r. m. s. Radius des Nukleons bei Erhöhung der Teilchendichte der Umgebung (swelling).

Die Diskrepanz zwischen dem Verhalten der Konstituenten-Quarkmasse und der Masse des Nukleons wird durch die quasi-klassischen Energiekorrekturen, deren Größe mit zunehmender Temperatur kleiner wird, noch verstärkt. So ist die Abnahme der Lokalisierung der solitonischen Feldkonfiguration bei Erhöhung der Temperatur mit einer Abnahme der unphysikalischen kinetischen Energien der Impulsfluktuationen des Solitons verknüpft, in qualitativer Übereinstimmung mit der Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation. Als Ergebnis erhält man eine Zunahme der Energien des Nukleons bei Erhöhung der Temperatur.

Kopplungskonstante und Regularisierungsparameter des Modells wurden über Relationen im Vakuum fixiert und sind durch die in den numerischen Rechnungen verwendete Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse von $M_{\text{vak}} = 420 \text{ MeV}$ festgelegt, die für das Soliton im Vakuum die experimentelle Δ -Nukleon-Massenaufspaltung von ungefähr 300 MeV reproduziert. Die Werte der Kopplungskonstante und des Regularisierungsparameters wurden unverändert für endliche Werte von Umgebungstemperatur und Dichte übernommen. Will man eine mögliche Variation dieser Parameter im Medium mit einbeziehen, so muß man Ansätze über deren Skalenverhalten machen. Dies könnte man nur im Vergleich mit anderen Modellen (z. B. Brown-Rho-Skalierung) tun.

Es bleibt auch zu untersuchen, inwiefern andere Regularisierungsverfahren (z. B. Pauli-Villars-Regularisierung) die thermodynamischen Eigenschaften des Solitons verändern, um wirklich "modellunabhängige" Aussagen zu gewinnen. Solche Betrachtungen wurden für das im Vakuum eingebettete Soliton schon durchgeführt. Dort stellte sich heraus, daß die Eigenschaften des Solitons bei Verwendung einer Vakuum-Konstituenten-Quarkmasse $M_{\text{vak}} \approx 400 \text{ MeV}$ nur wenig von der speziell gewählten Regularisierung abhängen.

Die Berechnung von nukleonischen Eigenschaften im Medium ist in diesem Modell noch nicht erschöpft. Elektromagnetische Eigenschaften, wie z. B. die magnetischen Momente, Formfaktoren und die axiale Vektorkopplungskonstante des Nukleons im Medium können noch berechnet werden.

Das Problem einer von Eins abweichenden Baryonenzahl des Solitons läßt sich vermutlich lösen, wenn man auf den chiralen Winkel verzichtet und somit neue Freiheitsgrade öffnet. Um das Soliton vor dem Kollaps zu bewahren, muß man dann die Erhaltung der Baryonenzahl des Solitons fordern. Inwiefern diese Idee, die für das Soliton (mit regulierter Baryonenzahl) im Vakuum zur Anwendung kam, für das Soliton im Medium zu realisieren ist, müssen numerische Untersuchungen zeigen.

Mit größerem Aufwand ist sicher die Erweiterung auf s-Quarks, so wie das beim Soliton im Vakuum schon gemacht wurde, und die Einschließung von Vektormesonen verbunden.

A Konventionen

A.1 Natürliche Einheiten

In der Arbeit werden die in der Elementarteilchenphysik üblichen natürlichen Einheiten mit $c \equiv 1$, $\hbar \equiv 1$ verwendet. Dies hat zur Folge, daß sich die Einheiten von Länge, Zeit und Masse durch eine von ihnen ausdrücken lassen. Vereinbarungsgemäß wählt man als grundlegende Einheit die der Masse in Energie-Einheiten. In SI-Einheiten gilt

$$\hbar c = 197,327 \text{ MeV fm} , \quad (\text{A.1})$$

woraus sich

$$1 \text{ fm} = 5,068 \text{ GeV}^{-1} \quad (\text{A.2})$$

ergibt. Desweiteren wird in dieser Arbeit die Boltzmann-Konstante gleich Eins gesetzt $k \equiv 1$. In SI-Einheiten ist $k = 8,617 \cdot 10^{-11} \text{ MeV K}^{-1}$, so daß dann gilt

$$1K = 8,617 \cdot 10^{-11} \text{ MeV} . \quad (\text{A.3})$$

A.2 Minkowski-Raum

Bei relativistisch kovarianter Darstellung verwenden wir die Konventionen aus [97]. Der kontravariante Vierervektor x^μ ist gegeben durch

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{r}) . \quad (\text{A.4})$$

Für den kovarianten Vierervektor x_μ ergibt sich

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\mathbf{r}) \quad (\text{A.5})$$

mit dem metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.6})$$

Die Ableitungen nach Zeit und Raum sind

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) , \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) . \quad (\text{A.7})$$

In der Arbeit wird auch das Symbol für den Nabla-Operator benutzt

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} . \quad (\text{A.8})$$

A.3 γ -Matrizen

Die γ -Matrizen erfüllen folgende Vertauschungsrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I. \quad (\text{A.9})$$

Wir verwenden die Dirac-Darstellung der γ -Matrizen nach [97]:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

sowie

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

die die Relationen

$$\begin{aligned} \{\sigma_i, \sigma_k\} &= \sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\delta_{ik} I, \\ [\sigma_i, \sigma_k] &= \sigma_i \sigma_k - \sigma_k \sigma_i = 2i\epsilon_{ikl} \sigma_l, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

mit dem total antisymmetrischen Symbol ϵ_{ikl} in drei Dimensionen mit $\epsilon_{123} = 1$, erfüllen. In dieser Darstellung gilt

$$\sigma^{ik} = \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^k] = \frac{i}{2} [\alpha^k, \alpha^i] = \epsilon_{ikl} \begin{pmatrix} \sigma^l & 0 \\ 0 & \sigma^l \end{pmatrix} = \epsilon_{ikl} \gamma_5 \alpha^l. \quad (\text{A.14})$$

A.4 Euklidischer Raum

Bei Darstellung im euklidischen Raum verwenden wir die Konventionen

$$\begin{aligned} x_{\mathbb{E}}^\mu &= (x_{\mathbb{E}}^1, x_{\mathbb{E}}^2, x_{\mathbb{E}}^3, x_{\mathbb{E}}^4) = (x^1, x^2, x^3, ix^0) = (\mathbf{r}, it) = (\mathbf{r}, \tau) \\ x_\mu^{\mathbb{E}} &= (x_1^{\mathbb{E}}, x_2^{\mathbb{E}}, x_3^{\mathbb{E}}, x_4^{\mathbb{E}}) = (-x^1, -x^2, -x^3, -ix^0) = (-\mathbf{r}, -it) = (-\mathbf{r}, -\tau), \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

mit den entsprechenden Komponenten aus Gl. (A.4) und Gl. (A.5). Die räumlichen Komponenten sind damit die gleichen wie im Minkowski-Raum. Man kann nun wieder einen metrischen Tensor einführen, der den Übergang von $x_\mu^{\mathbb{E}}$ nach $x_{\mathbb{E}}^\mu$ bewerkstelligt. Für $x_\mu^{\mathbb{E}}$ ergibt sich

$$x_\mu^{\mathbb{E}} = g_{\mu\nu}^{\mathbb{E}} x^\nu = (-\mathbf{r}, -\tau) \quad (\text{A.16})$$

mit

$$g_{\mu\nu}^{\mathbb{E}} = g_{\mathbb{E}}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.17})$$

Für das skalare Produkt gilt dann

$$x_{\mu}^{\text{E}} x_{\text{E}}^{\mu} = x_{\mu} x^{\mu} . \quad (\text{A.18})$$

Wir führen keine euklidischen γ -Matrizen ein sondern verwenden immer die Konventionen in Kapitel A.3. Der Index "E" für euklidische Raum-Zeit-Koordinaten wird in der Arbeit unterdrückt. Wenn nichts anderes vereinbart, wird auch über doppelt auftretende Indizes, die in gleicher Höhe stehen, summiert, z. B. $p^i p^i \equiv \sum_{i=1}^3 p^i p^i = p^2$.

B Summenformeln für Matsubara-Frequenzen

Wir geben hier einige nützliche Formeln an, die bei der Summierung über die ungeraden Matsubara-Frequenzen (für Fermionen) des öfteren in der Arbeit verwendet werden.

Es gilt

$$\frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a + i(2n+1)\pi} + \frac{1}{a - i(2n+1)\pi} \right] \quad (\text{B.1})$$

$$= \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} e^{-ax} \left[e^{-i(2n+1)\pi x} + e^{i(2n+1)\pi x} \right] dx . \quad (\text{B.2})$$

Summiert man nun über n , indem man die dabei entstehenden geometrischen Reihen auf der rechten Seite berechnet, dann ergibt sich die Reihe als Partialbruchzerlegung des $\tanh(a/2)$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2 + a^2} = \frac{1}{2a} \tanh \frac{a}{2} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{e^a + 1} \right) . \quad (\text{B.3})$$

An dieser Stelle sind schon gewisse Strukturen erkennbar, die bei Anwendung dieser Formel (z. B. bei Berechnung der inneren Energie) hervortreten. In der Klammer auf der rechten Seite der Gleichung wird das $\frac{1}{2}$ zu den Nullpunktsbeiträgen (durch virtuelle Quark-Antiquark-Quantenfluktuationen) der Quarks führen und der zweite Term in der Klammer zu den fermionischen Besetzungszahlen (Mediumanteil der reellen Quarks). Speziell bei der Berechnung des großkanonischen Potentials benötigt man folgende Gleichheit

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{(2n+1)^2 \pi^2 + a^2}{(2n+1)^2 \pi^2 + b^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{b^2}^{a^2} da'^2 \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2 + a'^2} , \quad (\text{B.4})$$

die bei Anwendung von Gleichung (B.3) auf

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln \frac{(2n+1)^2 \pi^2 + a^2}{(2n+1)^2 \pi^2 + b^2} = a - b + 2 \ln \frac{1 + e^{-a}}{1 + e^{-b}} = 2 \ln \frac{\cosh(a/2)}{\cosh(b/2)} \quad (\text{B.5})$$

führt. Wegen $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln a_n = \ln \prod_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ ergibt sich daraus folgende Produktformel

$$\prod_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(2n+1)^2 \pi^2 + a^2}{(2n+1)^2 \pi^2 + b^2} = \frac{\cosh^2(a/2)}{\cosh^2(b/2)}. \quad (\text{B.6})$$

Bei der Berechnung des Vakuumanteils am großkanonischen Potential tritt an die Stelle der Summation über die Matsubara-Frequenzen in Gl. (B.3) eine Integration. Ein typisches dabei zu berechnendes Integral ist

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \ln \frac{\omega^2 + a^2}{\omega^2 + b^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{b^2}^{a^2} da'^2 \frac{1}{\omega^2 + a'^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{b^2}^{a^2} da'^2 \frac{1}{a'} \left[\arctg \frac{\omega}{a'} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{b^2}^{a^2} da'^2 \frac{1}{a'} \text{sign}(a') = |a| - |b|. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

C Vertauschung des Hamilton-Operators mit dem Superspin

Im folgenden zeigen wir, daß der Einteilchen-Quark-Hamilton-Operator h (Gl. (3.11)) für sphärische Hedgehog-Felder $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma(r)$, $\pi(\mathbf{r}) = \pi(r)\hat{r}$ mit dem Superspin \mathbf{g} (Gl. (4.3)), der die Summe aus Spin \mathbf{s} , Bahndrehimpuls $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ und Isospin \mathbf{t} ist, vertauscht.

Wir beginnen mit der Vertauschung des Hamilton-Operators mit dem Spin \mathbf{s} . Mit der Darstellung der γ -Matrizen in Gl. (A.11) läßt sich der Spin darstellen als

$$\mathbf{s} = \frac{1}{2} \gamma_5 \boldsymbol{\alpha}, \quad (\text{C.1})$$

und man erhält mit den Vertauschungsrelationen der γ -Matrizen aus dem Anhang A

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, s^k] = \frac{1}{2} [\alpha^i, \gamma_5 \alpha^k] p^i = \frac{1}{2} \left([\alpha^i, \gamma_5] \alpha^k + \gamma_5 [\alpha^i, \alpha^k] \right) p^i = i \epsilon_{imk} \alpha^l p^i, \quad (\text{C.2})$$

wobei die Relationen $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$, $[\alpha^i, \gamma_5] = 0$, die Beziehung (A.14) und $\gamma_5^2 = I$ ausgenutzt wurden. Mit den Vertauschungsrelationen der γ -Matrizen läßt sich sofort $[\gamma^0, s^k] = [\gamma^0 \gamma_5, s^k] = 0$ zeigen, so daß die Terme mit den σ und π Feldern mit dem Spin vertauschen. Man erhält somit

$$[h, s^k] = i\epsilon_{lik}\alpha^l p^i. \quad (C.3)$$

Die Vertauschung des Bahndrehimpulses l mit dem kinetischen Term des Hamilton-Operators führt auf

$$[\alpha \cdot p, l^k] = \epsilon_{lmk}\alpha^l [p^i, r^i] p^m = -i\epsilon_{lmk}\delta^{il}\alpha^i p^m = -i\epsilon_{imk}\alpha^i p^m. \quad (C.4)$$

Die Vertauschung des Drehimpulses mit dem skalaren mesonischen Feld ergibt

$$[\sigma(r), l^k] = -\epsilon_{lmk}r^l [p^m, \sigma(r)] = i\epsilon_{lmk}r^l \frac{\partial \sigma(r)}{\partial r^m} = i\epsilon_{lmk} \frac{r^l r^m}{r} \frac{\partial \sigma(r)}{\partial r} = 0, \quad (C.5)$$

da das Produkt zwischen dem antisymmetrischen ϵ_{lmk} und dem symmetrischen Ausdruck $r^l r^m$ verschwindet. Dabei wurde $\frac{\partial}{\partial r^m} = \frac{r^m}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ benutzt. Für die Vertauschung mit einer Komponente des isoskalaren π -Feldes ergibt sich

$$\begin{aligned} [\pi^i, l^k] &= -\epsilon_{lmk}r^l [p^m, \pi^i] = i\epsilon_{lmk}r^l \frac{\partial \pi^i}{\partial r^m} = i\epsilon_{lmk}r^l \frac{\partial}{\partial r^m} \left(\pi(r) \frac{r^i}{r} \right) \\ &= i\epsilon_{lmk}r^l r^m r^i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\pi(r)}{r} \right) + i\epsilon_{lmk}r^l \frac{\pi(r)}{r} \delta^{im}, \end{aligned} \quad (C.6)$$

wobei der 1. Term auf der rechten Seite in der letzten Zeile wieder verschwindet, mit dem gleichen Argument wie zuvor bei der Vertauschung des σ -Feldes mit dem Bahndrehimpuls. Wir erhalten somit

$$[\pi^i, l^k] = i\epsilon_{lik}\pi^l. \quad (C.7)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (C.4), (C.5) und (C.7) erhält man für die Vertauschung des Bahndrehimpuls-Operators mit dem Hamilton-Operator

$$[h, l^k] = -i\epsilon_{imk}\alpha^i p^m - \epsilon_{lik}\gamma^0 \gamma_5 \pi^l \tau^i. \quad (C.8)$$

Für die Vertauschung des Hamilton-Operators mit dem Isospin $t = \frac{\tau}{2}$ erhält man

$$[h, t^k] = \frac{i}{2}\gamma^0 \gamma_5 \pi^i [\tau^i, \tau^k] = \epsilon_{ilk}\gamma^0 \gamma_5 \pi^i \tau^l, \quad (C.9)$$

wobei die Relation (A.13), die ebenfalls für die Isospin-Matrizen gilt, verwendet wurde.

Addiert man die Gleichungen (C.3), (C.8) und (C.9), so gilt offensichtlich

$$[h, g^k] = [h, s^k] + [h, l^k] + [h, t^k] = 0, \quad (C.10)$$

d. h. der Einteilchen-Hamilton-Operator vertauscht für sphärische mesonische Hedgehog-Felder mit dem Superspin.

D Verwendete Basiszustände

In Anhang C wurde gezeigt, daß der Hamilton-Operator weder mit dem Drehimpuls- j noch mit dem Isospin-Operator $t = \frac{1}{2}\tau$ vertauscht – dafür aber mit dem Superspin $g = j + t$. Deshalb werden aus den Zuständen $|ljm_j\rangle$ und dem Isospinor $\chi_{t=1/2, m_t}$ Eigenzustände zum Superspin g entsprechend der Drehimpuls-Algebra konstruiert [98]

$$\langle \hat{r} | l, j; gm \rangle = \sum_{m_j, m_t} \left(j, t = \frac{1}{2}, g | m_j, m_t, m \right) |ljm_j\rangle \chi_{t=1/2, m_t}. \quad (\text{D.1})$$

Dabei sind die Drehimpuls-Eigenzustände $|ljm_j\rangle$ selber aus Eigenzuständen des Bahndrehimpulses und des Spins der Quarks zusammengesetzt

$$\langle \hat{r} | lj m_j \rangle = \sum_{m_l, m_s} \left(l, s = \frac{1}{2}, j | m_l, m_s, m_j \right) Y_{l, m_l}(\hat{r}) \chi_{s=1/2, m_s}, \quad (\text{D.2})$$

mit den Kugelfunktionen Y_{l, m_l} und dem Spinor $\chi_{s=1/2, m_s}$. Die Ausdrücke in den großen runden Klammern sind die entsprechenden Clebsch-Gordan-Koeffizienten.

Wir verwenden einen diskreten Satz von Basiszuständen $\langle r | a n; gm \Pi \rangle$ [99] mit dem Winkel-Spin-Isospin-Anteil $\langle \hat{r} | l, j; gm \rangle$ aus Gl. (D.1) und den Besselfunktionen $j_l(k_n^g r)$ als Radial-Anteil, die in einer sphärischen Box vom Radius D definiert sind

$$\begin{aligned} \langle r | 1 n; gm+ \rangle &= N_n^g \begin{pmatrix} ij_g(k_n^g r) \langle \hat{r} | g, g - \frac{1}{2}; gm \rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \langle r | 2 n; gm+ \rangle &= N_n^g \begin{pmatrix} ij_g(k_n^g r) \langle \hat{r} | g, g + \frac{1}{2}; gm \rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \langle r | 3 n; gm+ \rangle &= N_n^g \begin{pmatrix} 0 \\ j_{g-1}(k_n^g r) \langle \hat{r} | g - 1, g - \frac{1}{2}; gm \rangle \end{pmatrix}, \\ \langle r | 4 n; gm+ \rangle &= N_n^g \begin{pmatrix} 0 \\ j_{g+1}(k_n^g r) \langle \hat{r} | g + 1, g + \frac{1}{2}; gm \rangle \end{pmatrix}, \\ \langle r | 1 n; gm- \rangle &= N_n^g \begin{pmatrix} ij_{g-1}(k_n^g r) \langle \hat{r} | g - 1, g - \frac{1}{2}; gm \rangle \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r} | 2n; gm- \rangle &= N_n^g \left(\begin{array}{c} ij_{g+1}(k_n^g r) \langle \hat{\mathbf{r}} | g+1, g+\frac{1}{2}; gm \rangle \\ 0 \end{array} \right), \\
\langle \mathbf{r} | 3n; gm- \rangle &= N_n^g \left(\begin{array}{c} 0 \\ j_g(k_n^g r) \langle \hat{\mathbf{r}} | g, g-\frac{1}{2}; gm \rangle \end{array} \right), \\
\langle \mathbf{r} | 4n; gm- \rangle &= N_n^g \left(\begin{array}{c} 0 \\ j_g(k_n^g r) \langle \hat{\mathbf{r}} | g, g+\frac{1}{2}; gm \rangle \end{array} \right) \quad (D.3)
\end{aligned}$$

mit der Normierungskonstanten

$$N_n^g = \sqrt{\frac{2}{D^3}} |j_{g\pm 1}(k_n^g D)|^{-1}. \quad (D.4)$$

Bei den Basiszuständen in Gl. (D.3) steht “+” für die natürliche Parität $\Pi = (-1)^g$ und “-” für die unnatürliche Parität $\Pi = -(-1)^g$.

Ein Energieeigenzustand mit dem Energieeigenwert ε_λ , Superspin g , Projektion des Superspins m und Parität Π ergibt sich dann als Linearkombination der entsprechenden Basis-Spinoren zu

$$\langle \mathbf{r} | \lambda gm \Pi \rangle = \sum_{a=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} V_{\lambda, g, \Pi}^{k_n^g, a} \langle \mathbf{r} | a n; gm \Pi \rangle. \quad (D.5)$$

Für $g=0$ entfallen die Zustände mit $a=1$ und $a=3$.

Die Diskretisierungsbedingung für den Parameter k_n^g folgt aus der Forderung, daß die Besselfunktion am Kastenrand verschwindet, wobei n die Anzahl der Knoten der Besselfunktion im Intervall $0 < r \leq D$ bezeichnet

$$j_g(k_n^g D) = 0 \quad (D.6)$$

mit $n = 1, 2, 3, \dots, n_{\max}$. D und n_{\max} müssen so gewählt werden, daß bei einer weiteren Vergrößerung dieser rein numerischen Parameter die berechneten Observablen des Solitons, d. h. die Differenz zwischen dem ortsabhängigen inhomogenen System und dem homogenen System (ebenfalls mit der diskreten Basis berechnet!), stabil bleiben.

In der eingeführten Basis (Gl. (D.3)) wird der Hamilton-Operator (Gl. (3.11)) mit den sphärischen Mesonenfeldern (Gl. (4.2)), für gegebenen Superspin und Parität, diagonalisiert und mit der Eigenwertgleichung die entsprechenden Koeffizienten $V_{\lambda, g, \Pi}^{k_n^g, a}$ aus Gl. (D.5) bestimmt. Eine ausführliche Darstellung findet man in den Anhängen der Arbeiten [100, 63].

Zur numerischen Berechnung wurden von uns $D = 18 M^{-1}$ und $k_{n_{\max}} = 144 D^{-1} = 8 M$, mit der temperatur- und dichteabhängigen Konstituenten-Quarkmasse M , benutzt. Das bedeutet $n_{\max} \approx 45$ für $g=0$. Für größere Superspines nimmt n_{\max} ab. Die Schrittweite für numerische Integrationen betrug $0.1125 M^{-1}$. Weiterhin wurden Zustände bis zu einem maximalen Superspin von $g_{\max} = 99$ mitgenommen. Die Regularisierung sorgt dafür, daß Zustände der Seequarks (virtuelle Quark-Antiquark-Fluktuationen) mit zunehmenden

Superspin (der Betrag des Energieeigenwertes wächst) einen immer kleineren Beitrag zu den physikalischen Observablen liefern. Bei dem Mediumanteil sorgen die fermionischen Besetzungszahlen automatisch für diesen Prozeß.

Die erforderliche Größe der Basis und die Schrittweite der numerischen Integration wurden in solchen Fällen bestimmt, in denen ein Vergleich mit dem Kontinuumslimit möglich ist (homogenes Medium).

E Nützliche Formeln des Exponentialoperators

Wir geben hier die Ableitung einiger in der Arbeit verwendeten Formeln an, die bei der proper-time Regularisierung der Nullpunktsenergien (Dirac-See-Anteil am großkanonischen Potential) auftreten und speziell bei der Bestimmung der Trägheitsparameter des Solitons Verwendung finden. Die ersten Schritte sind dabei dem Anhang in [101] entnommen.

Beginnen wir mit den zwei äquivalenten Definitionen

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad \text{mit } A^0 = I, \quad (\text{E.1})$$

$$e^A = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(I + \frac{1}{m} A \right)^m. \quad (\text{E.2})$$

Aus der letzten folgt mit $\det(A^m) = (\det A)^m$

$$\det(e^A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\det \left(I + \frac{1}{m} A \right) \right]^m. \quad (\text{E.3})$$

Nun gilt

$$\det \left(I + \frac{1}{m} A \right) = 1 + \frac{1}{m} \text{Sp}A + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \quad (\text{E.4})$$

und man erhält für Gl. (E.3)

$$\det(e^A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{m} \text{Sp}A + O\left(\frac{1}{m^2}\right) \right]^m. \quad (\text{E.5})$$

Man kann zeigen, daß der Term der Ordnung $1/m^2$ vernachlässigt werden kann. Die rechte Seite von Gl. (E.5) ist dann identisch mit der Entwicklung in Gl. (E.2), wenn man dort die Matrix A durch die Zahl $\text{Sp}A$ ersetzt. Es ergibt sich die oft genutzte Beziehung

$$\det(e^A) = e^{\text{Sp}A}. \quad (\text{E.6})$$

Weitere nützliche Relationen lassen sich mit Hilfe des parameterabhängigen Operators

$$H(y) = e^{-yF} G e^{yF} \quad (\text{E.7})$$

erhalten. Die Operatoren F und G seien dabei unabhängig vom Parameter y . Nun differenzieren wir beide Seiten nach dem Parameter y , und wir erhalten wegen $\frac{d}{dy} e^{yF} = e^{yF} F = F e^{yF}$ nach Anwendung der Produktregel

$$\frac{d}{dy} H(y) = [H(y), F] = e^{-yF} [G, F] e^{yF}. \quad (\text{E.8})$$

Integrieren wir nun wieder, so ergibt sich

$$\int_0^1 dy \frac{d}{dy} H(y) = H(1) - H(0) = e^{-F} G e^F - G = \int_0^1 dy e^{-yF} [G, F] e^{yF} \quad (\text{E.9})$$

und nach Multiplikation von links mit e^F

$$[G, e^F] = \int_0^1 dy e^{(1-y)F} [G, F] e^{yF}. \quad (\text{E.10})$$

Ein oft benutzter Spezialfall dieser Formel ergibt sich, wenn man für den Operator G den Differentialoperator $\frac{d}{dx}$ einsetzt und $F(x)$ nun vom Parameter x abhängt. Die Vertauschung des Differentialoperators mit einem Operator ist die Ableitung dieses Operators nach x , so daß sich

$$\frac{d}{dx} e^{F(x)} = \int_0^1 dy e^{(1-y)F(x)} \frac{dF(x)}{dx} e^{yF(x)} \quad (\text{E.11})$$

ergibt.

Entwickelt man den Operator (Gl. (E.7)) nach dem Parameter y , so ergibt sich eine Summe von multiplen Kommutatoren

$$\begin{aligned} H(y) = e^{-yF} G e^{yF} &= G + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dy^n} H(y) \Big|_{y=0} \cdot y^n \\ &= G + y [G, F] + \frac{y^2}{2} [[G, F], F] + \dots \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Die Formel (E.11) erlaubt die Ableitung einer weiteren oft benutzten Beziehung. Multipliziert man Gleichung (E.11) von links mit $e^{-F(x)}$ und bildet danach auf beiden Seiten die Spur, so ergibt sich aufgrund des zyklischen Vertauschens unter der Spur

$$\text{Sp} \left[e^{-F(x)} \frac{d}{dx} e^{F(x)} \right] = \text{Sp} \frac{dF(x)}{dx}, \quad (\text{E.13})$$

und mit $B(x) = e^{F(x)}$ also $F(x) = \ln B(x)$ und $B(x)^{-1} = e^{-F(x)}$ erhält man

$$\text{Sp} \left[B(x)^{-1} \frac{d}{dx} B(x) \right] = \frac{d}{dx} \text{Sp} \ln B(x) = \frac{d}{dx} \ln \det B(x) = \frac{1}{\det B(x)} \frac{d}{dx} \det B(x), \quad (\text{E.14})$$

wobei zwischendurch noch die Beziehung $\text{Sp} \ln B = \ln \det B$ benutzt wurde (Gl. (E.6)). Letzte Gleichung gibt an wie man die Determinante nach einem Parameter ableiten kann, was bei der Berechnung von Erwartungswerten von Operatoren, bei der die Ableitung der Quark-Determinante auftaucht, benutzt wird.

Will man $\ln \det(B_0 + B_1)$ systematisch nach B_1 entwickeln, so kann man Gl. (E.14) verwenden. Wir definieren den parameterabhängigen Operator $B(x) = B_0 + xB_1$ und erhalten

$$\ln \det(B_0 + B_1) - \ln \det B_0 = \int_0^1 dx \frac{d}{dx} \ln \det B(x) = \int_0^1 dx \text{Sp} B(x)^{-1} B_1. \quad (\text{E.15})$$

Entwickeln wir nun $B(x)^{-1}$ um $x=0$

$$B(x)^{-1} = B_0^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n}{dx^n} B(x)^{-1} \right|_{x=0} \cdot x^n \quad (\text{E.16})$$

und beachten, daß aus $B(x)^{-1} B(x) = I$ nach Differenzieren nach x folgt: $(\frac{d}{dx} B(x)^{-1}) B(x) + B(x)^{-1} \frac{d}{dx} B(x) = 0$ und damit $\frac{d}{dx} B(x)^{-1} = -B(x)^{-1} (\frac{d}{dx} B(x)) B(x)^{-1}$ mit $\frac{d}{dx} B(x) = B_1$. Durch Anwendung der Kettenregel kann man dann auch höhere Ableitungen berechnen und erhält

$$\left. \frac{d^n}{dx^n} B(x)^{-1} \right|_{x=0} = n! (-1)^n (B_0^{-1} B_1)^n B_0^{-1}, \quad (\text{E.17})$$

so daß sich aus Gl. (E.15) nach Integration über x

$$\ln \det(B_0 + B_1) - \ln \det B_0 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \text{Sp}(B_0^{-1} B_1)^n \quad (\text{E.18})$$

ergibt.

Gleichung (E.11) kann man auch für eine systematische Entwicklung des Operators $e^{A_0 + A_1}$ nach A_1 benutzen, wobei wir das im folgenden nur bis zur ersten Ordnung in A_1 praktizieren werden. Dazu definieren wir uns den parameterabhängigen Operator $A(x) = A_0 + xA_1$, so daß gilt

$$e^{A_0 + A_1} - e^{A_0} = \int_0^1 dx \frac{d}{dx} e^{A(x)}. \quad (\text{E.19})$$

Verwenden wir nun Gl. (E.11) mit $\frac{d}{dx} A(x) = A_1$, dann erhält man

$$e^{A_0 + A_1} - e^{A_0} = \int_0^1 dx \int_0^1 dy e^{(1-y)A(x)} A_1 e^{yA(x)}. \quad (\text{E.20})$$

Setzt man nun wiederum

$$e^{(1-y)A(x)} = e^{(1-y)A_0} + \int_0^x dz \frac{d}{dz} e^{(1-y)A(z)}, \quad (\text{E.21})$$

so ergibt sich

$$e^{A_0+A_1} = e^{A_0} + \int_0^1 dy e^{(1-y)A_0} A_1 e^{yA_0} + O(A_1^2). \quad (\text{E.22})$$

Will man den regularisierten Anteil der Quark-Determinante bis zur zweiten Ordnung in den mittleren Feldern berechnen, so läuft das darauf hinaus in Gl. (E.20) die Spur zu bilden. Aufgrund des zyklischen Vertauschens unter der Spur ergibt sich

$$\text{Sp} e^{A_0+A_1} - \text{Sp} e^{A_0} = \text{Sp} \int_0^1 dx e^{A(x)} A_1 \quad (\text{E.23})$$

und Anwendung der Formeln (E.11) und (E.21) führt auf

$$\text{Sp} e^{A_0+A_1} = \text{Sp} e^{A_0} + \text{Sp} e^{A_0} A_1 + \text{Sp} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^1 dz e^{(1-z)A(y)} A_1 e^{zA(y)} A_1, \quad (\text{E.24})$$

woraus sich

$$\text{Sp} e^{A_0+A_1} = \text{Sp} e^{A_0} + \text{Sp} e^{A_0} A_1 + \frac{1}{2} \text{Sp} \int_0^1 dz e^{(1-z)A_0} A_1 e^{zA_0} A_1 + O(A_1^3) \quad (\text{E.25})$$

ergibt.

F Berechnung des Trägheitsparameters für eine Translation des Solitons

Um den Trägheitstensor (Gl. (8.28)) zu berechnen, betrachten wir diejenigen Beiträge zum großkanonischen Potential $\Omega(v)$, die von $h(v)$ abhängen, d. h. den See- und Mediumanteil. Der rein mesonische Beitrag am großkanonischen Potential enthält keine kinetischen Terme und liefert somit keinen Beitrag zur Trägheit. Die mesonische Energie taucht jedoch in Gl. (8.41) wieder auf, da über die Bewegungsgleichung für die mesonischen Felder alle Terme miteinander verkoppelt sind.

In Analogie zu den Operatoren (Gl. (4.11)), (Gl. (4.12)) definieren wir die Operatoren

$$D(\mu; \mathbf{v}) \equiv D(\mu) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = \partial_\tau + h - \mu - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}, \quad (\text{F.1})$$

$$D_0(\mu; \mathbf{v}) \equiv D_0(\mu) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} = \partial_\tau + h_0 - \mu - \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{F.2})$$

und in Analogie zu Gl. (4.13) und Gl. (4.14)

$$A(\mu; \mathbf{v}) \equiv D(\mu; \mathbf{v})^\dagger D(\mu; \mathbf{v}) = A(\mu) + B^i v^i - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})^2, \quad (\text{F.3})$$

$$A_0(\mu; \mathbf{v}) \equiv D_0(\mu; \mathbf{v})^\dagger D_0(\mu; \mathbf{v}) = A_0(\mu) + B_0^i v^i - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p})^2 \quad (\text{F.4})$$

mit $A(\mu)$, $A_0(\mu)$ definiert in den Gln. (4.13), (4.14) und den Operatoren

$$\begin{aligned} B^i &\equiv \left. \frac{\partial}{\partial v^i} A(\mu; \mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=0} = p^i D(\mu) - D(\mu)^\dagger p^i \\ &= 2p^i \partial_\tau + [p^i, h] = 2p^i \partial_\tau - i\beta \partial_i [\sigma(\mathbf{r}) + i\pi(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5], \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$B_0^i \equiv \left. \frac{\partial}{\partial v^i} A_0(\mu; \mathbf{v}) \right|_{\mathbf{v}=0} = p^i D_0(\mu) - D_0(\mu)^\dagger p^i = 2p^i \partial_\tau, \quad (\text{F.6})$$

wobei $\mathbf{v}^\dagger = -\mathbf{v}$ berücksichtigt wurde. Der Kommutator $[h, p^i]$ ist gegeben durch die Ableitungen der mittleren Felder und verschwindet im homogenen Fall für $h = h_0$.

Der regularisierte Realteil des geschwindigkeitsabhängigen großkanonischen Potentials, der von der Quark-Determinante herrührt, ist dann gegeben durch die Ausdrücke in Gl. (4.22) und Gl. (4.29), wobei man $A_{(0)}(\mu)$ durch $A_{(0)}(\mu; \mathbf{v})$ zu ersetzen hat. Der unregularisierte Imaginärteil ist gegeben durch

$$\Im \Omega^q(T, \mu; \mathbf{v}) = iT \frac{1}{2} \ln \frac{\det [D(\mu; \mathbf{v})(D(\mu; \mathbf{v})^\dagger)^{-1}]}{\det [D_0(\mu; \mathbf{v})(D_0(\mu; \mathbf{v})^\dagger)^{-1}]} \quad (\text{F.7})$$

mit $\Omega^q(T, \mu; \mathbf{v}) = -T \ln \frac{\det D(\mu; \mathbf{v})}{\det D_0(\mu; \mathbf{v})} = \Re \Omega^q(T, \mu; \mathbf{v}) + i\Im \Omega^q(T, \mu; \mathbf{v})$. Die Darstellung in Gl. (F.7) macht man sich klar, wenn man den Logarithmus einer komplexen Zahl $a = |a|e^{i\phi}$ betrachtet: $\ln a = \ln |a| + i\phi = \frac{1}{2} \ln(a^* a) + \frac{1}{2} \ln \frac{a}{a^*}$. Der Real- und Imaginärteil von $\ln a$ ist also gegeben durch $\Re(\ln a) = \ln |a| = \frac{1}{2} \ln(a^* a)$ und $\Im(\ln a) = \phi = -\frac{1}{2} \ln \frac{a}{a^*}$. Nun setzt man $a = \det D$ und nutzt $(\det D)^* = \det D^* = \det (D^*)^T = \det D^\dagger$. Dabei wurde ausgenutzt, daß sich der Wert der Determinante einer Matrix nicht ändert, wenn man in der Matrix die Spalten mit den Zeilen vertauscht, d. h. wenn man sie transponiert. Man kann nun zeigen, daß der Imaginärteil (Gl. (F.7)) bis zur Ordnung v^2 verschwindet und deshalb bei den weiteren Betrachtungen keine Rolle spielt.

Um dies zu zeigen, führen wir eine Entwicklung um $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ durch. Mit Hilfe von Gl. (E.18) erhält man

$$\begin{aligned} \ln \det [D(\mu; \mathbf{v})(D(\mu; \mathbf{v})^\dagger)^{-1}] &= \ln \det D(\mu; \mathbf{v}) - \ln \det D(\mu; \mathbf{v})^\dagger \\ &= \ln \det D(\mu) - \ln \det D(\mu)^\dagger \\ &\quad - v^i \left[\text{Sp} [D(\mu)^{-1} p^i] + \text{Sp} [(D(\mu)^\dagger)^{-1} p^i] \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} v^i v^k \left[\text{Sp} [D(\mu)^{-1} p^k D(\mu)^{-1} p^i] - \text{Sp} [(D(\mu)^\dagger)^{-1} p^k (D(\mu)^\dagger)^{-1} p^i] \right] \\ &\quad + O(v^3). \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Der Term der Ordnung v^0 verschwindet wegen Gl. (4.19). Aufgrund der Kommutatordarstellung (Gl. (8.18)) des Einteilchen-Impulsoperators, des möglichen zyklischen Vertauschens von Operatoren unterhalb der Spur und da h^2 mit $D(\mu)$ und $D(\mu)^\dagger$ vertauscht, verschwindet der Term der Ordnung v^1 ebenfalls. Führt man in Gl. (F.8) für den Term der Ordnung v^2 die Spur explizit aus, so ergibt sich mit den Gln. (3.26), (3.27) und der Normierung in Gl. (3.30) sowie der Eigenschaft $\langle \alpha n | p^i | \alpha' n' \rangle = \langle \alpha | p^i | \alpha' \rangle \delta_{nn'}$

$$\text{Sp} \left[D(\mu)^{-1} p^k D(\mu)^{-1} p^i - (D(\mu)^\dagger)^{-1} p^k (D(\mu)^\dagger)^{-1} p^i \right] = N_c \sum_{\alpha\beta n} f(\omega_n, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) \cdot \langle \alpha | p^k | \beta \rangle \langle \beta | p^i | \alpha \rangle \quad (\text{F.9})$$

mit

$$f(\omega_n, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = \frac{1}{(-i\omega_n + \varepsilon_\alpha - \mu)(-i\omega_n + \varepsilon_\beta - \mu)} - \frac{1}{(i\omega_n + \varepsilon_\alpha - \mu)(i\omega_n + \varepsilon_\beta - \mu)} \quad (\text{F.10})$$

Wie man leicht erkennt ist f eine ungerade Funktion bezüglich der Matsubara-Frequenzen ω_n : $f(\omega_n, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = -f(-\omega_n, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta)$. Dies hat $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(\omega_n, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta) = 0$ zur Folge, und der Term der Ordnung v^2 in Gl. (F.8) verschwindet. Auf diese Art und Weise verschwinden alle weiteren geraden Potenzen v^{2k} in der Entwicklung (Gl. (F.8)). Da wir nur Terme bis zur Ordnung v^2 berücksichtigen, verschwindet der Imaginärteil.

Wir führen wie in [20] die Kommutatordarstellung von B^i und B_0^i ein

$$B^i = [C^i, A(0)] = [C^i, A(\mu) + 2\mu h] \quad (\text{F.11})$$

$$B_0^i = [C^i, A_0(0)] = [C^i, A_0(\mu) + 2\mu h_0] \quad (\text{F.12})$$

mit

$$C^i = \frac{\alpha^i}{2} - i r^i \partial_\tau \quad (\text{F.13})$$

Dies kann man mit Hilfe der folgenden Beziehungen für den Einteilchen-Hamilton-Operator $h = \alpha \cdot p + \beta [\sigma(\mathbf{r}) + i\pi(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5]$ überprüfen

$$\begin{aligned} [h, r^i] &= \alpha^j [p^j, r^i] + [\beta (\sigma + i\pi \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5), r^i] = \alpha^j [p^j, r^i] = -i\alpha^i, \\ [h^2, r^i] &= [h, r^i] h + h [h, r^i] = -i \{h, \alpha^i\} = -i \{\alpha^j, \alpha^i\} p^j - i \{\beta (\sigma + i\pi \cdot \boldsymbol{\tau} \gamma_5), \alpha^i\} \\ &= -i \{\alpha^j, \alpha^i\} p^j = -2i p^i, \\ [\alpha^i, h^2] &= i [[h, r^i], h^2] = i [[h^2, r^i], h] = 2 [p^i, h], \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

mit $\{A, B\} \equiv AB + BA$, wobei die Beziehungen $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$, die Jacobi-Identität $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$ sowie die Antivertauschungsrelationen der γ -Matrizen aus Anhang A genutzt wurden.

Die in diesem Anhang abgeleiteten Relationen gelten für beliebige ortsabhängige Felder $\sigma(\mathbf{r})$ und $\pi(\mathbf{r})$ unabhängig von weiteren Symmetrien (wie z. B. sphärische Symmetrie oder Hedgehog-Ansatz für das π -Feld). Die Existenz des Operators C^i erlaubt uns im folgenden eine Reihe von Manipulationen.

Betrachten wir zuerst den proper-time regularisierten Seeanteil am Trägheitsparameter. Dazu benötigen wir die Ableitung des Exponentialoperators (Gl. (E.11))

$$\frac{\partial}{\partial v^k} e^{-sA(0;v)} = -s \int_0^1 dt e^{-(1-t)sA(0;v)} [B^k - 2p^k p^l v^l] e^{-tsA(0;v)}. \quad (\text{F.15})$$

Setzt man am Ende $v = 0$, so verbleibt nur der Operator B^k in der inneren Klammer der nun durch die Kommutatorrelation (Gl. (F.11)) ersetzt werden kann. Dieses Integral vereinfacht sich dann wegen Gl. (E.10) zum Kommutator zwischen C^k und $e^{-sA(0)}$

$$\left. \frac{\partial}{\partial v^k} e^{-sA(0;v)} \right|_{v=0} = \int_0^1 dt e^{-(1-t)sA(0)} [C^k, -sA(0)] e^{-tsA(0)} = [C^k, e^{-sA(0)}]. \quad (\text{F.16})$$

Differenziert man Gl. (F.15) noch einmal, setzt am Ende $v = 0$ und verwendet dann Gl. (F.16), so erhält man

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^k} e^{-sA(0;v)} \right|_{v=0} &= -s \int_0^1 dt [C^i, e^{-(1-t)sA(0)}] B^k e^{-tsA(0)} \\ &+ s \int_0^1 dt e^{-(1-t)sA(0)} 2p^i p^k e^{-tsA(0)} - s \int_0^1 dt e^{-(1-t)sA(0)} B^k [C^i, e^{-tsA(0)}]. \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

Berechnet man die Spur dieses Ausdruckes und nutzt dabei das zyklische Vertauschen, so ergibt sich

$$\text{Sp} \left. \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^k} e^{-sA(0;v)} \right|_{v=0} = 2\text{Sp} \left[s e^{-sA(0)} \left(p^i p^k + \frac{1}{2} [C^i, B^k] \right) \right], \quad (\text{F.18})$$

und wir erhalten für den Anteil des Dirac-Sees an der trägen Masse des Solitons

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^k} \Omega_{\Lambda}^{\text{q,see}}(v) \right|_{v=0} &= \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[e^{-sA(0)} \left(p^i p^k + \frac{1}{2} [C^i, B^k] \right) \right. \\ &\quad \left. - e^{-sA_0(0)} \left(p^i p^k + \frac{1}{2} [C^i, B_0^k] \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.19})$$

mit den Kommutatoren

$$[C^i, B^k] = 2\delta^{ik} \partial_\tau^2 + i\gamma^i \partial_k (\sigma + i\pi \cdot \tau \gamma_5), \quad (\text{F.20})$$

$$[C^i, B_0^k] = 2\delta^{ik} \partial_\tau^2. \quad (\text{F.21})$$

Dabei liefert der Term mit dem Operator $p^i p^k$ im zweiten Teil auf der rechten Seite (homogenes System) von Gleichung (F.19) keinen Beitrag zur Spur $\text{Sp}[e^{-sA_0(0)} p^i p^k] = 0$, aufgrund der Darstellung

$$p^i p^k = \frac{i}{2} [p^2, r^i p^k] = \frac{i}{2} [h_0^2, r^i p^k] = \frac{i}{2} [A_0(0), r^i p^k] = \frac{i}{2} [A_0(\mu) + 2\mu h_0, r^i p^k] \quad (\text{F.22})$$

und des möglichen zyklischen Vertauschens unter der Spur.

Anstelle der Berechnung der zweiten Ableitung des Exponentialoperators (Gl. (F.17)) und anschließender Spurbildung (Gl. (F.18)), hätte man auch gleich von der Entwicklung der Spur des Exponentialoperators (Gl. (E.25)) ausgehen können, wenn man dort die Ersetzung $A_0 \rightarrow -sA(0)$, $A_1 \rightarrow -s [B^l v^l - (v \cdot p)^2]$ vornimmt und dann die Terme proportional zu $v^l v^m$ aussortiert. Danach nutzt man die Relationen (F.11) und (E.10). Dabei kann man dann noch $\text{Sp}[e^{-sA(0)}[C^i, B^k]] = \text{Sp}[e^{-sA(0)}[C^k, B^i]]$ verwenden. Dies folgt aus Gl. (F.11) und der Jacobi-Identität für den Doppelkommutator $[C^i, B^k] = [C^i, [C^k, A(0)]] = [[A(0), C^i], C^k] + [[C^i, C^k], A(0)] = [C^k, B^i] + [[C^i, C^k], A(0)]$ nach Multiplikation mit $e^{-sA(0)}$ und anschließender Spurbildung. Wegen des möglichen zyklischen Vertauschens unter der Spur liefert der letzte Term keinen Beitrag.

Zur Berechnung des Mediumanteils an der trägen Masse betrachten wir den Ausdruck

$$\frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^k} \text{Sp} \ln A(\mu; v) \Big|_{v=0} = -2 \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} p^i p^k + \frac{1}{2} A(\mu)^{-1} B^i A(\mu)^{-1} B^k \right], \quad (\text{F.23})$$

der sich mit Hilfe von Gl. (F.3) nach nochmaliger Ableitung von Gl. (E.14) ergibt. Zur Berechnung des zweiten Terms setzten wir die Kommutatordarstellung (Gl. (F.11)) des Operators B^i ein und erhalten

$$\begin{aligned} \text{Sp} [A(\mu)^{-1} B^i A(\mu)^{-1} B^k] &= \text{Sp} [A(\mu)^{-1} [C^i, A(\mu) + 2\mu h] A(\mu)^{-1} B^k] \\ &= \text{Sp} [A(\mu)^{-1} [C^i, A(\mu)] A(\mu)^{-1} B^k] \\ &\quad + 2\mu \text{Sp} [A(\mu)^{-1} [C^i, h] A(\mu)^{-1} B^k]. \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

Der erste Term in Gl. (F.24) führt auf

$$\text{Sp} [A(\mu)^{-1} [C^i, A(\mu)] A(\mu)^{-1} B^k] = \text{Sp} [A(\mu)^{-1} [C^i, B^k]]. \quad (\text{F.25})$$

Der zweite Term auf der rechten Seite in Gl. (F.24) sieht noch kompliziert aus. Der Kommutator $[C^i, h]$ läßt sich aber auf die Operatoren $A(\mu)$ und $D(\mu)$ zurückführen, was dann noch weitere Manipulationen erlaubt. Mit Hilfe der Beziehungen (F.13) und (F.14) erhalten wir

$$\begin{aligned} [C^i, h] &= \frac{1}{2} [\alpha^i, h] - i [r^i, h] \partial_\tau = \frac{i}{2} [[h, r^i], h] - i [r^i, h] \partial_\tau \\ &= \frac{i}{2} [h^2, r^i] + i h [r^i, h] - i \partial_\tau [r^i, h], \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

wobei wir für den Doppelkommutator $[[A, B], A] = [A^2, B] + 2A[B, A]$ verwendet haben. Nun setzen wir $[h^2, r^i] = [A(\mu) + 2\mu h, r^i]$ ein und erhalten

$$\begin{aligned} [C^i, h] &= \frac{i}{2} [A(\mu), r^i] - i \mu [r^i, h] + i h [r^i, h] - i \partial_\tau [r^i, h] \\ &= \frac{i}{2} [A(\mu), r^i] + i D(\mu)^\dagger [r^i, h]. \end{aligned} \quad (\text{F.27})$$

Zum Schluß nutzen wir $[r^i, h] = [r^i, D(\mu)]$ und bekommen

$$[C^i, h] = \frac{i}{2} [A(\mu), r^i] + iD(\mu)^\dagger [r^i, D(\mu)] = -\frac{i}{2} \{A(\mu), r^i\} + iD(\mu)^\dagger r^i D(\mu). \quad (\text{F.28})$$

Mit dieser Beziehung kann man, unter Ausnutzung des möglichen zyklischen Vertauschens der Operatoren unter der Spur, den letzten Term in Gl. (F.24) umformen zu

$$\begin{aligned} \text{Sp} [A(\mu)^{-1} [C^i, h] A(\mu)^{-1} B^k] &= -i \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} B^k A(\mu)^{-1} \left(\frac{1}{2} \{r^i, A(\mu)\} - D(\mu)^\dagger r^i D(\mu) \right) \right] \\ &= -i \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} \frac{1}{2} \{B^k, r^i\} \right] \\ &\quad + i \text{Sp} \left[(D(\mu)^\dagger)^{-1} B^k D(\mu)^{-1} r^i \right]. \quad (\text{F.29}) \end{aligned}$$

Benutzt man die Gleichungen (F.5) und (4.13) so erhält man

$$\frac{1}{2} \{r^i, B^k\} = (2r^i p^k - i\delta^{ik}) \partial_\tau - r^i [h, p^k] \quad (\text{F.30})$$

und

$$\begin{aligned} \text{Sp} \left[(D(\mu)^\dagger)^{-1} B^k D(\mu)^{-1} r^i \right] &= \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} (p^k r^i D(\mu) - D(\mu)^\dagger r^i p^k) \right] \\ &= \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} (2r^i p^k \partial_\tau - i\delta^{ik} D(\mu) + [r^i p^k, h]) \right]. \quad (\text{F.31}) \end{aligned}$$

Der letzte Term liefert wieder keinen Beitrag zur Spur da h mit $A(\mu)^{-1}$ vertauscht. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^k} \text{Sp} \ln A(\mu; \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=0} &= -\text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} (2p^i p^k + [C^i, B^k] \right. \\ &\quad \left. + 2\mu [(h - \mu)\delta^{ik} + ir^i [h, p^k]]) \right] \quad (\text{F.32}) \end{aligned}$$

mit dem Kommutator $[C^i, B^k]$ gegeben in Gleichung (F.20). Somit erhält man nach Abzug des Beitrages vom homogenen Medium

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^k} \Omega^{\text{q,med}}(T, \mu; \mathbf{v}) \Big|_{\mathbf{v}=0} &= T \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} \left(p^i p^k + \frac{1}{2} [C^i, B^k] \right) - \frac{1}{2} A_0(\mu)^{-1} [C^i, B_0^k] \right] \\ &\quad - \lim_{T \rightarrow 0} T \text{Sp} \left[A(0)^{-1} \left(p^i p^k + \frac{1}{2} [C^i, B^k] \right) - \frac{1}{2} A_0(0)^{-1} [C^i, B_0^k] \right] \\ &\quad + \mu T \text{Sp} \left[A(\mu)^{-1} \left((h - \mu)\delta^{ik} + ir^i [h, p^k] \right) - A_0(\mu)^{-1} (h_0 - \mu)\delta^{ik} \right]. \quad (\text{F.33}) \end{aligned}$$

Dabei ist $\text{Sp}[A_0(\mu)^{-1} p^i p^k] = \text{Sp}[A_0(0)^{-1} p^i p^k] = 0$ berücksichtigt, was aus der Darstellung (Gl. (F.22)), dem Vertauschen von h_0 mit $A_0(\mu)^{-1}$ und dem möglichen zyklischen Vertauschen unter der Spur folgt.

G Berechnung des Trägheitsparameters für eine Rotation des Solitons

Um den Trägheitsparameter für die Rotation im Isospin-Raum zu berechnen, gehen wir analog zum Kapitel F vor. Wir definieren Operatoren, die man aus den ersten Formeln in Kapitel F einfach durch die Ersetzung $v \rightarrow \omega$ und $p \rightarrow t$ erhält

$$D(\mu; \omega) \equiv D(\mu) - \omega \cdot t = \partial_\tau + h - \mu - \omega \cdot t, \quad (\text{G.1})$$

$$D_0(\mu; \omega) \equiv D_0(\mu) - \omega \cdot t = \partial_\tau + h_0 - \mu - \omega \cdot t \quad (\text{G.2})$$

und wegen der Antihermitizität $\omega^\dagger = -\omega$ gilt analog den Gln. (4.13), (4.14)

$$A(\mu; \omega) \equiv D(\mu; \omega)^\dagger D(\mu; \omega) = A(\mu) + B^i \omega^i - (\omega \cdot t)^2, \quad (\text{G.3})$$

$$A_0(\mu; \omega) \equiv D_0(\mu; \omega)^\dagger D_0(\mu; \omega) = A_0(\mu) + B_0^i \omega^i - (\omega \cdot t)^2 \quad (\text{G.4})$$

mit $A(\mu)$, $A_0(\mu)$ definiert in Gln. (4.13), (4.14) und den Operatoren

$$\begin{aligned} B^i &\equiv \left. \frac{\partial}{\partial \omega^i} A(\mu; \omega) \right|_{\omega=0} = t^i D(\mu) - D(\mu)^\dagger t^i \\ &= 2t^i \partial_\tau - [h, t^i], \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

$$B_0^i \equiv \left. \frac{\partial}{\partial \omega^i} A_0(\mu; \omega) \right|_{\omega=0} = t^i D_0(\mu) - D_0(\mu)^\dagger t^i = 2t^i \partial_\tau. \quad (\text{G.6})$$

Im homogenen Fall verschwindet das π -Feld und h_0 vertauscht mit dem Einteilchen-Isospin-Operator t .

Der unregularisierte Imaginärteil des, von der Rotationsgeschwindigkeit abhängigen, großkanonischen Potentials der Quarks $\Omega^q(T, \mu; \omega)$ ist gegeben durch Gl. (F.7), wenn man dort die Ersetzung $v \rightarrow \omega$ vornimmt. Der Imaginärteil verschwindet ebenfalls bis zur Ordnung ω^2 . Die Argumentation für das Verschwinden der Ordnung ω^0 und ω^2 ist identisch mit den Ausführungen im Anhang F. Der Term der Ordnung ω ist proportional zum unregulierten Erwartungswert des Isospins des Solitons, wegen der Beziehung $\text{Sp}[D(\mu)^{-1} t^i] + \text{Sp}[(D(\mu)^\dagger)^{-1} t^i] = 2 \text{Sp}[A(\mu)^{-1} (h - \mu) t^i]$ (vergleiche mit Gl. (F.8)) und den Gln. (4.68) und (4.72). Der Erwartungswert des Isospins des Solitons bei $\omega = 0$ verschwindet nun, was in Kapitel 8.2 erläutert wurde. Aus diesen Gründen spielt der Imaginärteil bei den folgenden Betrachtungen keine Rolle und wir betrachten ab jetzt nur den regularisierten Realteil von $\Omega^q(T, \mu; \omega)$.

Nun ist keine Kommutatordarstellung von B^i wie in Kapitel F bekannt, die auf eventuelle Vereinfachungen hoffen lassen könnte, und man muß den Trägheitsparameter von grunde auf berechnen. Zur Berechnung des proper-time regularisierten Seeanteils des Trägheitsparameters bilden wir die erste Ableitung des Exponentialoperators und erhalten analog zu Gl. (F.15)

$$\frac{\partial}{\partial \omega^k} e^{-sA(0; \omega)} = -s \int_0^1 dt e^{-(1-t)sA(0; \omega)} [B^k - \{t^k, t^l\} \omega^l] e^{-tsA(0; \omega)}, \quad (\text{G.7})$$

wobei man aber die Nichtvertauschung der Isospin-Operatoren beachten muß. Bilden wir nochmals die Ableitung und setzen am Ende $\omega = 0$, so erhält man den umfangreichen Ausdruck

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2}{\partial \omega^i \partial \omega^k} e^{-sA(0; \omega)} \right|_{\omega=0} &= s^2 \int_0^1 dt \int_0^1 dt' (1-t) e^{-(1-t')(1-t)sA(0)} B^i e^{-t'(1-t)sA(0)} B^k e^{-tsA(0)} \\ &+ s^2 \int_0^1 dt \int_0^1 dt' t e^{-(1-t)sA(0)} B^k e^{-(1-t')tsA(0)} B^i e^{-t'sA(0)} \\ &+ s \int_0^1 dt e^{-(1-t)sA(0)} \{t^k, t^i\} e^{-tsA(0)}. \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

Aufgrund der Vertauschungsrelationen für die Isospin-Operatoren $\{t^k, t^i\} = \frac{1}{2} \delta^{ik}$, die auch dazu führen, daß der Operator $A(\mu; \omega)$ doch nur linear in t ist, könnte man in dem letzten Term die Integration über t beseitigen, was aber zu keiner wesentlichen Vereinfachung führt. Bildet man nun die Spur im Sinne von Gl. (4.15), schiebt zwischen den Operatoren einen vollständigen Satz $I = \sum_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega |\alpha, \omega\rangle \langle \alpha, \omega|$ von normierten Eigenfunktionen $|\alpha, \omega\rangle$ (Gl. (4.16)) der Einteilchen-Operatoren ∂_r und h ein, und beachtet das aufgrund der Beziehungen (4.16), (4.17)

$$\begin{aligned} \langle \beta, \omega' | A(0) | \alpha, \omega \rangle &= (\varepsilon_{\alpha}^2 + \omega^2) \delta_{\beta\alpha} \delta(\omega' - \omega), \\ \langle \beta, \omega' | B^i | \alpha, \omega \rangle &= -\langle \beta | t^i | \alpha \rangle [(\varepsilon_{\beta} - \varepsilon_{\alpha}) + 2i\omega] \delta(\omega' - \omega) \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

gilt, so ergibt sich für den ersten Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (G.8) nach Spurbildung ein Integral der Form

$$\begin{aligned} -s^2 N_c \sum_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^1 dt \int_0^1 dt' (1-t) e^{-s\omega^2} e^{-s\varepsilon_{\alpha}^2 + (1-t)t' s(\varepsilon_{\alpha}^2 - \varepsilon_{\beta}^2)} [(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta})^2 + 4\omega^2] \cdot \\ \cdot \langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Führt man nun nacheinander die Integration über t' und t aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} N_c \sum_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-s\omega^2} \frac{(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta})^2 + 4\omega^2}{(\varepsilon_{\alpha}^2 - \varepsilon_{\beta}^2)^2} \left[e^{-s\varepsilon_{\alpha}^2} - e^{-s\varepsilon_{\beta}^2} + s(\varepsilon_{\alpha}^2 - \varepsilon_{\beta}^2) e^{-s\varepsilon_{\alpha}^2} \right] \cdot \\ \cdot \langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite von Gl. (G.8) ergibt sich nach Spurbildung

$$\begin{aligned} -s^2 N_c \sum_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_0^1 dt \int_0^1 dt' t e^{-s\omega^2} e^{-s\varepsilon_{\beta}^2 + (1-t)ts(\varepsilon_{\beta}^2 - \varepsilon_{\alpha}^2)} [(\varepsilon_{\alpha} - \varepsilon_{\beta})^2 + 4\omega^2] \cdot \\ \cdot \langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle, \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

was nach Ausführung der Integration über t' und t auf

$$N_c \sum_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-s\omega^2} \frac{(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + 4\omega^2}{(\varepsilon_\beta^2 - \varepsilon_\alpha^2)^2} \left[e^{-s\varepsilon_\beta^2} - e^{-s\varepsilon_\alpha^2} + s(\varepsilon_\beta^2 - \varepsilon_\alpha^2) e^{-s\varepsilon_\beta^2} \right] \cdot \langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle \quad (\text{G.13})$$

führt. Für den letzten Term in Gl. (G.8) erhält man nach Spurbildung das Integral

$$sN_c \sum_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-s\omega^2} (e^{-s\varepsilon_\alpha^2} + e^{-s\varepsilon_\beta^2}) \langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle. \quad (\text{G.14})$$

Addiert man die Gln. (G.11), (G.13) und (G.14), so erhält man

$$sN_c \sum_{\alpha\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha} e^{-s\omega^2} \left[4\omega^2 (e^{-s\varepsilon_\beta^2} - e^{-s\varepsilon_\alpha^2}) + 2(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) (\varepsilon_\beta e^{-s\varepsilon_\beta^2} + \varepsilon_\alpha e^{-s\varepsilon_\alpha^2}) \right] \cdot \frac{\langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha} \quad (\text{G.15})$$

und nach der Integration über ω

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} s^{-\frac{1}{2}} N_c \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha} \left[e^{-s\varepsilon_\beta^2} - e^{-s\varepsilon_\alpha^2} + s(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) (\varepsilon_\beta e^{-s\varepsilon_\beta^2} + \varepsilon_\alpha e^{-s\varepsilon_\alpha^2}) \right] \cdot \frac{\langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}. \quad (\text{G.16})$$

Zusammenfassend erhält man dann für den Seeanteil am Trägheitsparameter der Rotation

$$\mathcal{J}_{ik}^{\text{q,see}} = - \frac{\partial^2}{\partial \omega^i \partial \omega^k} \Omega_\Lambda^{\text{q,sea}}(\omega) \Big|_{\omega=0} = \frac{N_c}{2} \sum_{\alpha\beta} R_{\mathcal{J}}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta; \Lambda) \frac{\langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha} \quad (\text{G.17})$$

mit

$$R_{\mathcal{J}}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta; \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds s^{-\frac{3}{2}} \frac{1}{\varepsilon_\beta + \varepsilon_\alpha} \cdot \left[e^{-s\varepsilon_\alpha^2} - e^{-s\varepsilon_\beta^2} - s(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) (\varepsilon_\beta e^{-s\varepsilon_\beta^2} + \varepsilon_\alpha e^{-s\varepsilon_\alpha^2}) \right]. \quad (\text{G.18})$$

Anstelle der Berechnung der zweiten Ableitung des Exponentialoperators (Gl. (G.8)) und anschließender Spurbildung, hätte man auch gleich von der Entwicklung der Spur des Exponentialoperators (Gl. (E.25)) ausgehen können, wenn man dort die Ersetzung $A_0 \rightarrow -sA(0)$, $A_1 \rightarrow -s [B^t \omega^t - (\omega \cdot t)^2]$ vornimmt und dann die Terme proportional zu $\omega^t \omega^m$ aussortiert.

Zur Berechnung des Mediumanteils am Trägheitsparameter betrachten wir den folgenden Ausdruck

$$\frac{\partial^2}{\partial \omega^i \partial \omega^k} \text{Sp} \ln A(\mu; \omega) \Big|_{\omega=0} = -\text{Sp} [A(\mu)^{-1} \{t^i, t^k\} + A(\mu)^{-1} B^i A(\mu)^{-1} B^k]. \quad (\text{G.19})$$

Führen wir hier die Spur im Sinne von Gl. (3.26) aus, schieben zwischen den Operatoren $I = \sum_{\alpha n} |\alpha, n\rangle \langle \alpha, n|$ ein und beachten das anstelle der Beziehungen in Gl. (G.9) nun wegen Gl. (3.27), Gl. (3.30) gilt

$$\begin{aligned} \langle \beta, n' | A(\mu) | \alpha, n \rangle &= [(\varepsilon_\alpha - \mu)^2 + \omega_n^2] \delta_{\beta\alpha} \delta_{nn'}, \\ \langle \beta, n' | B^i | \alpha, n \rangle &= -\langle \beta | t^i | \alpha \rangle [(\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) + 2i\omega_n] \delta_{nn'}, \end{aligned} \quad (\text{G.20})$$

so erhält man für den ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (G.19)

$$-N_c \sum_{\alpha\beta n} \left[\frac{1}{\omega_n^2 + (\varepsilon_\alpha - \mu)^2} + \frac{1}{\omega_n^2 + (\varepsilon_\beta - \mu)^2} \right] \langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle \quad (\text{G.21})$$

und für den zweiten ergibt sich

$$N_c \sum_{\alpha\beta n} \frac{1}{[\omega_n^2 + (\varepsilon_\alpha - \mu)^2][\omega_n^2 + (\varepsilon_\beta - \mu)^2]} [4\omega_n^2 + (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2] \langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle. \quad (\text{G.22})$$

Formt man den obigen Bruch in eine Summe von Brüchen um

$$\begin{aligned} \frac{1}{[\omega_n^2 + (\varepsilon_\alpha - \mu)^2][\omega_n^2 + (\varepsilon_\beta - \mu)^2]} &= \frac{1}{(\varepsilon_\beta - \mu)^2 - (\varepsilon_\alpha - \mu)^2} \\ &\cdot \left[\frac{1}{\omega_n^2 + (\varepsilon_\alpha - \mu)^2} - \frac{1}{\omega_n^2 + (\varepsilon_\beta - \mu)^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{G.23})$$

und addiert dann die Gleichungen (G.21) und (G.22), so kann man die Summe in den Ausdruck überführen

$$\begin{aligned} N_c \sum_{\alpha\beta n} \frac{1}{(\varepsilon_\beta - \mu)^2 - (\varepsilon_\alpha - \mu)^2} &\left[\frac{3(\varepsilon_\beta - \mu)^2 - (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\alpha - \mu)^2}{\omega_n^2 + (\varepsilon_\beta - \mu)^2} \right. \\ &\left. - \frac{3(\varepsilon_\alpha - \mu)^2 - (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\beta - \mu)^2}{\omega_n^2 + (\varepsilon_\alpha - \mu)^2} \right] \langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle. \end{aligned} \quad (\text{G.24})$$

Wegen

$$\begin{aligned} 3(\varepsilon_\alpha - \mu)^2 - (\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta)^2 + (\varepsilon_\beta - \mu)^2 &= 2(\varepsilon_\alpha - \mu)(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\mu) \\ (\varepsilon_\beta - \mu)^2 - (\varepsilon_\alpha - \mu)^2 &= (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha)(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - 2\mu) \end{aligned} \quad (\text{G.25})$$

reduziert sich die Summe auf den einfachen Ausdruck

$$2N_c \sum_{\alpha\beta n} \left[\frac{\varepsilon_\beta - \mu}{\omega_n^2 + (\varepsilon_\beta - \mu)^2} - \frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{\omega_n^2 + (\varepsilon_\alpha - \mu)^2} \right] \frac{\langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}. \quad (\text{G.26})$$

Die Summation über die diskreten Matsubara-Frequenzen ω_n kann mit den Formeln in Anhang B einfach ausgeführt werden mit dem Resultat

$$2\frac{1}{T}N_c \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{e^{(\varepsilon_\alpha - \mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(\varepsilon_\beta - \mu)/T} + 1} \right] \frac{\langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}. \quad (\text{G.27})$$

Entsprechend der Zerlegung des großkanonischen Potentials muß davon der unregulisierte Seeanteil abgezogen werden. Dieser ergibt sich aus dem oberen Ausdruck nach Multiplikation mit $\frac{T}{2}$ für $\mu=0$ und anschließendem Limes $T \rightarrow 0$ oder äquivalent aus der Formel (G.17) für den regulisierten Seeanteil mit $\Lambda \rightarrow \infty$. Wir wählen die erste Variante und nutzen

$$\frac{1}{e^{\varepsilon_\alpha/T} + 1} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \Theta(-\varepsilon_\alpha) = \begin{cases} 0 & : \varepsilon_\alpha > 0 \\ 1 & : \varepsilon_\alpha < 0 \end{cases} \quad (\text{G.28})$$

und erhalten für den Mediumanteil am Trägheitsparameter

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ik}^{\text{q,med}}(T, \mu) &= - \frac{\partial^2}{\partial \omega^i \partial \omega^k} \Omega^{\text{q,med}}(T, \mu; \omega) \Big|_{\omega=0} \\ &= N_c \sum_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{e^{(\varepsilon_\alpha - \mu)/T} + 1} - \frac{1}{e^{(\varepsilon_\beta - \mu)/T} + 1} - \Theta(-\varepsilon_\alpha) + \Theta(-\varepsilon_\beta) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{G.29})$$

wofür man auch kompakter schreiben kann

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ik}^{\text{med}}(T, \mu) &= N_c \sum_{\alpha\beta} [\tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\alpha) - \tilde{n}(\varepsilon_\beta; T, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\beta)] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\langle \alpha | t^i | \beta \rangle \langle \beta | t^k | \alpha \rangle}{\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha} \end{aligned} \quad (\text{G.30})$$

mit der mittleren fermionischen Besetzungszahl \tilde{n} gegeben in Gleichung (4.30).

Im folgenden betrachten wir das Trägheitsmoment im Grenzfall hoher Temperaturen und chemischer Potentiale. Dies kommt praktisch in unserem Modell nicht zur Anwendung, dient aber der Überprüfung der Richtigkeit der abgeleiteten Formeln (siehe auch Diskussion in Abschnitt 6.1 zur Abhängigkeit des Quarkkondensates bei hohen Temperaturen).

Für den Term in den eckigen Klammern des Mediumanteils am Trägheitsmoment in Gl. (G.30) gilt für $\mu=0$ und $T \rightarrow \infty$

$$\tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T, \mu=0) \text{sign}(\varepsilon_\alpha) - \tilde{n}(\varepsilon_\beta; T, \mu=0) \text{sign}(\varepsilon_\beta) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [\text{sign}(\varepsilon_\alpha) - \text{sign}(\varepsilon_\beta)] \quad (\text{G.31})$$

sowie für $T=0$ und $\mu \rightarrow \infty$

$$\tilde{n}(\varepsilon_\alpha; T=0, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\alpha) - \tilde{n}(\varepsilon_\beta; T=0, \mu) \text{sign}(\varepsilon_\beta) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \Theta(\varepsilon_\alpha) \text{sign}(\varepsilon_\alpha) - \Theta(\varepsilon_\beta) \text{sign}(\varepsilon_\beta). \quad (\text{G.32})$$

Letzterer Ausdruck läßt sich mit Hilfe von $\Theta(\varepsilon_\alpha) = [1 + \text{sign}(\varepsilon_\alpha)] / 2$ auf den gleichen Grenzwert wie in Gl. (G.31) zurückführen. Weiterhin betrachten wir den unregularisierten Seeanteil am Trägheitsmoment. Aus Gl. (G.18) folgt

$$R_{\mathcal{J}}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta; \Lambda) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} \text{sign}(\varepsilon_\beta) - \text{sign}(\varepsilon_\alpha) \quad (\text{G.33})$$

und mit Gl. (G.17) und Gl. (G.30) erhalten wir die Relation

$$\mathcal{J}_{ik}^{\text{see}}(\Lambda \rightarrow \infty) + \mathcal{J}_{ik}^{\text{med}}(T, \mu \rightarrow \infty) = 0, \quad (\text{G.34})$$

d. h. im Grenzfall hoher Temperaturen (chemischer Potentiale) kompensieren sich der (unregularisierte) Seeanteil und der Mediumanteil am Trägheitsmoment. Dies ist ein Hinweis, daß in einer Theorie, in der die Temperatur sehr viel größer als der einzuführende Regularisierungsparameter ist ($T \gg \Lambda$), die Regularisierung von See- und Mediumanteilen am Trägheitsparameter in gleicher Art und Weise vorzunehmen ist – wenn die Eigenschaft der Kompensation weiter gelten soll. Das gleiche Argument gilt auch für die innere Energie, die sich als Trägheitsparameter für die translative Bewegung ergeben hat.

Literatur

- [1] H. Leutwyler und A. V. Smilga, *Nucl. Phys.* **B342** (1990) 302.
- [2] G. E. Brown und M. Rho, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 2720.
- [3] C. Adami und I. Zahed, *Phys. Rev.* **D45** (1992) 4312.
- [4] V. L. Eletsky und B. L. Ioffe, *Phys. Rev.* **D47** (1993) 3083.
- [5] X. Jin und B. K. Jennings, *Phys. Lett.* **B374** (1996) 13.
- [6] A. V. Smilga, *Nucl. Phys.* **B335** (1990) 569.
- [7] G. Boyd, S. Gupta, F. Karsch, B. Laermann, E. Petersson und K. Redlich, *Phys. Lett.* **B349** (1995) 170.
- [8] F. Karsch, *Nucl. Phys.* **A590** (1995) 367c.
- [9] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345.
- [10] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **124** (1961) 246.
- [11] J. Bijnens, *Phys. Rep.* **265** (1996) 369.
- [12] C. V. Christov, A. Blotz, H.-C. Kim, P. V. Pobylitsa, T. Watabe, T. Meißner, E. Ruiz Arriola und K. Goeke, *Prog. Part. and Nucl. Phys.* **37** (1996) 1.
- [13] R. Alkofer, H. Reinhardt und H. Weigel, *Phys. Rep.* **265** (1996) 139.
- [14] T. Hatsuda und T. Kunihiro, *Phys. Rep.* **247** (1994) 221.
- [15] M. Jaminon, G. Ripka und P. Stassart, *Nucl. Phys.* **A504** (1989) 733.
- [16] J. Berger und C. V. Christov, *Nucl. Phys.* **A609** (1996) 537.
- [17] M. C. Birse, *J. Phys.* **G20** (1994) 1537.
- [18] C. V. Christov und K. Goeke, *Nucl. Phys.* **A564** (1993) 551.
- [19] P. Ring und P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, (Springer Verlag, New York, 1980).
- [20] P. V. Pobylitsa, E. Ruiz Arriola, T. Meißner, F. Grümmer, K. Goeke und W. Broniowski, *J. Phys.* **G18** (1992) 1455.
- [21] M. Schleif, R. Wünsch und T. Meissner, *Int. J. Mod. Phys. E* (1998) im Druck; Preprint FZR 173 (1997); *nucl-th/9703024*.

- [22] M. Schleif und R. Wünsch, *Eur. Phys. J. A* **1** (1998) 171; Preprint FZR 182 (1997); *nucl-th/9709060*.
- [23] S. Coleman und E. Weinberg, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 1888.
- [24] J. Polchinski, NSF-ITP-92-132, UTTG-20-92 (1992); *hep-th/9210046*.
- [25] D. B. Kaplan, DOE/ER/40561-205-INT95-00-92 (1995); *nucl-th/9506035*.
- [26] P. Becher, M. Böhm und H. Joos, *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*, (Teubner, Stuttgart, 1983).
- [27] A. Dhar, R. Shankar und R. S. Wadia, *Phys. Rev. D* **31** (1985) 3526.
- [28] D. Ebert und H. Reinhardt, *Nucl. Phys. B* **271** (1986) 188.
- [29] H. Reinhardt, *Phys. Lett. B* **244** (1990) 316.
- [30] R. Alkofer und H. Reinhardt, *Chiral Quark Dynamics*, (Springer Verlag, Berlin, 1995).
- [31] D. Diakonov und V. Petrov, *Phys. Lett. B* **147** (1984) 351.
- [32] D. Diakonov und V. Petrov, *Nucl. Phys. B* **272** (1986) 457.
- [33] D. Diakonov und V. Petrov, in *Quark Cluster Dynamics*, Hrsg. K. Goeke u. a. (Springer Verlag, Berlin, 1993).
- [34] E. Shuryak, *Nucl. Phys. A* **606** (1996) 201.
- [35] G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 8.
- [36] G. 't Hooft, *Phys. Rev. D* **14** (1976) 3432.
- [37] W. Florkowski, INP 1739/PH (1997); *hep-ph/9701223*.
- [38] K. Fujikawa, *Phys. Rev. D* **21** (1980) 2848.
- [39] T. Matsubara, *Prog. Theor. Phys.* **14** (1957) 570.
- [40] J. I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [41] J. W. Negele und H. Orland, *Quantum Many-Particle Systems*, (Addison-Wesley, Amsterdam, 1988).
- [42] R. L. Stratonovich, *Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R.* **115** (1957) 1907.
- [43] J. Hubbard, *Phys. Rev. Lett.* **3** (1959) 77.

- [44] J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc.* **A276** (1963) 238.
- [45] J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc.* **A277** (1964) 237.
- [46] J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc.* **A281** (1964) 401.
- [47] L. Dolan und R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D9** (1974) 3320.
- [48] J. M. Cornwall, R. Jackiw und E. Tomboulis, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2428.
- [49] E. M. Lifschitz und L. P. Pitajewski, *Statistische Physik, Teil 2*, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band IX. (Akademie-Verlag, Berlin, 1989).
- [50] W. B. Berestetzki, E. M. Lifschitz und L. P. Pitajewski, *Quantenelektrodynamik*, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band IV. (Akademie-Verlag, Berlin, 1989).
- [51] M. Gell-Mann und M. Levy, *Nuovo Cimento* **16** (1960) 705.
- [52] P. Sieber, T. Meißner, F. Grümmer und K. Goeke, *Nucl. Phys.* **A547** (1992) 459.
- [53] T. Watabe und H. Toki, *Prog. Theor. Phys.* **87** (1992) 651.
- [54] D. Berg, E. Ruiz Arriola, F. Grümmer und K. Goeke, *J. Phys.* **G18** (1992) 35.
- [55] J. A. Zuk, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 1358.
- [56] A. Blotz, F. Döring, T. Meißner und K. Goeke, *Phys. Lett.* **B251** (1990) 235.
- [57] F. Döring, A. Blotz, C. Schüren, T. Meißner, E. Ruiz Arriola und K. Goeke, *Nucl. Phys.* **A536** (1992) 548.
- [58] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82** (1951) 664.
- [59] D. Diakonov und V. Petrov, *Nucl. Phys.* **B245** (1984) 259.
- [60] R. Wunsch, K. Goeke und T. Meißner, *Z. Phys.* **A348** (1994) 111.
- [61] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Statistische Physik, Teil 1*, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band V. (Akademie-Verlag, Berlin, 1987).
- [62] H. Schlienz, H. Weigel, H. Reinhardt und R. Alkofer, *Phys. Lett.* **B315** (1993) 6.
- [63] T. Meißner, *Dissertation*, (Universität Bochum, 1991).
- [64] M. Gell-Mann, R. J. Oakes und B. Renner, *Phys. Rev.* **175** (1968) 2195.
- [65] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl und W. Weise, *Nucl. Phys.* **A516** (1990) 429.
- [66] U. Vogl und W. Weise, *Prog. Part. and Nucl. Phys.* **27** (1991) 195.
- [67] M. Velkovsky und E. Shuryak, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 2766.

- [68] M. C. Chu und S. Schramm, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 4580.
- [69] S. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.* **64** (1992) 649.
- [70] M. K. Volkov, *Phys. Part. Nucl.* **24** (1993) 35.
- [71] E. G. Drukarev und E. M. Levin, *Nucl. Phys.* **A511** (1990) 679.
- [72] E. G. Drukarev und E. M. Levin, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27** (1991) 77.
- [73] T. D. Cohen, R. J. Furnstahl und D. K. Griegel, *Phys. Rev.* **C45** (1992) 1881.
- [74] H. Satz, CERN-TH/96-172, BI-TP 96/25 (1996); *hep-ph/9611366*.
- [75] J. Gasser und H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **B184** (1987) 83.
- [76] J. Gasser und H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **B188** (1987) 477.
- [77] J. Gasser und H. Leutwyler, *Nucl. Phys.* **B307** (1988) 763.
- [78] E. N. Nikolov, W. Broniowski, C. V. Christov, G. Ripka und K. Goeke, *Nucl. Phys.* **A608** (1996) 411.
- [79] H. Reinhardt und R. Wünsch, *Phys. Lett.* **B215** (1988) 577.
- [80] H. Reinhardt und R. Wünsch, *Phys. Lett.* **B230** (1989) 93.
- [81] T. Meißner, F. Grümmer und K. Goeke, *Phys. Lett.* **B227** (1989) 296.
- [82] J. R. Aitchison und C. M. Frazer, *Phys. Rev.* **D31** (1985) 2605.
- [83] C. Adami und G. E. Brown, *Phys. Rep.* **234** (1993) 1.
- [84] M. Schleif und R. Wünsch, FZR 55 (1994); *nucl-th/9409011*.
- [85] M. Jammer, *Der Begriff der Masse in der Physik*, (-Sonderausgabe, 3. Aufl.- Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1981).
- [86] R. U. Sexl und H. K. Urbantke, *Relativität, Gruppen, Teilchen*, (-3., neubearb. Aufl.- Springer Verlag, Wien, 1992).
- [87] R. K. Bhaduri, *Models of the Nucleon: From Quarks to Soliton*, (Addison-Wesley, Amsterdam, 1988).
- [88] M. Schleif und R. Wünsch, FZR 132 (1996).
- [89] X. Jin und B. K. Jennings, *Phys. Rev.* **C54** (1996) 1427.
- [90] P. K. Panda, A. Mishra, J. M. Eisenberg und W. Greiner, *nucl-th/9705045*.
- [91] C. V. Christov, E. Ruiz Arriola und K. Goeke, *Nucl. Phys.* **A556** (1993) 641.

- [92] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, *Quantenmechanik*, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band III. (Akademie-Verlag, Berlin, 1988).
- [93] H. Reinhardt, *Nucl. Phys.* **A503** (1989) 825.
- [94] D. R. Inglis, *Phys. Rev.* **96** (1954) 1059.
- [95] D. R. Inglis, *Phys. Rev.* **97** (1955) 701.
- [96] P. F. Bedaque, *Phys. Lett.* **B387** (1996) 1.
- [97] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistische Quantenmechanik*, (BI Hochschultaschenbücher Band 98, Mannheim, 1966).
- [98] A. R. Edmonds, *Drehimpulse in der Quantenmechanik*, (BI Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1964).
- [99] S. Kahana und G. Ripka, *Nucl. Phys.* **A429** (1984) 462.
- [100] A Blotz, *Diplomarbeit*, (Universität Bochum, 1990).
- [101] M. Veltman, *Diagrammatica: The Path to Feynman Diagrams*, Cambridge Lecture Notes in Physics 4. (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).

Versicherung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die Dissertation wurde am Forschungszentrum Rossendorf unter der wissenschaftlichen Betreuung von Herrn Dr. R. Wünsch und Herrn Prof. Dr. G. Soff von der TU Dresden angefertigt.

Ich erkenne die Promotionsordnung der Technischen Universität Dresden im vollen Umfang an.

Dresden, den 23. September 1997

Mathias Schleif

Danksagung

An dieser Stelle sei all denen gedankt, die in irgendeiner Art und Weise zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Dr. R. Wunsch vom Forschungszentrum Rossendorf e. V., unter dessen persönlicher Betreuung die Dissertation zustande kam. In den oft heiß geführten Diskussionen war es sicher nicht immer ganz einfach mit mir.

Desweiteren danke ich Herrn Prof. Dr. G. Soff von der TU Dresden für sein Interesse an dieser Arbeit und der lebhaften Diskussion während der Seminare an der TU Dresden. Für die Möglichkeit einer Verlängerung meines Arbeitsvertrages in Rossendorf bedanke ich mich bei Prof. Dr. E. Grosse.

Viele Ideen sind in Diskussionen entstanden. Hier ist besonders die Bochumer Gruppe zu erwähnen. Prof. Dr. K. Goeke danke ich für die Möglichkeit eines längeren Arbeitsaufenthaltes an der Ruhr-Universität Bochum. Viele intensive Gespräche sind zu dieser Zeit, und später besonders auf den Physiker-Tagungen, mit J. Berger, T. Watabe, C. V. Christov u. a. entstanden.

Für zwei kurze Aufenthalte an der Universität Rostock bedanke ich mich besonders bei Prof. Dr. G. Röpke und Dr. D. Blaschke, die dies kurzfristig ermöglichten.

Zahlreiche Diskussionen während der Kaffeepausen in Rossendorf mit F. Dittes, E. E. Kolomeitsev, A. Pfitzner, E. Persson u. a. trugen zur guten Atmosphäre während meiner Arbeit bei. Mit einigen von Ihnen gab es auch Kontakte außerhalb der Physik. Dr. H. W. Barz danke ich für wertvolle Hinweise bei der Fertigstellung der schriftlichen Arbeit.

Bei Problemen mit der Rechentechnik waren Herr M. Schlett und Frau U. Fromm stets zur Stelle. Ein großes Dankeschön gilt auch den Sekretärinnen Frau E. Kluge und Frau H. Römer, die viele organisatorische Aufgaben sehr schnell und unbürokratisch erledigten.

Zum Schluß danke ich meinen Eltern und meinem langjährigen Freund F. Creutzburg für die Unterstützung in jeglicher Hinsicht.