

WISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE BERICHTE

FZR-276

September 1999

ISSN 1437-322X



Rudi Wunsch

Archiv-Ex.:

**Freie Elektronen Laser
an der Strahlungsquelle ELBE:**

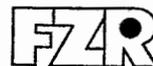
**Theoretische Vorhersagen
und eindimensionale Modellrechnungen**

Herausgeber:
FORSCHUNGSZENTRUM ROSSENDORF
Postfach 51 01 19
D-01314 Dresden
Telefon +49 351 26 00
Telefax +49 351 2 69 04 61
<http://www.fz-rossendorf.de/>

Als Manuskript gedruckt
Alle Rechte beim Herausgeber

FORSCHUNGSZENTRUM ROSSENDORF

WISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE BERICHTE



FZR-276

September 1999

Rudi Wünsch

**Freie Elektronen Laser
an der Strahlungsquelle ELBE:**

**Theoretische Vorhersagen
und eindimensionale Modellrechnungen**

Freie Elektronen Laser an der Strahlungsquelle ELBE:

Theoretische Vorhersagen
und eindimensionale Modellrechnungen

R. Wunsch*

Institut für Kern- und Hadronenphysik, Forschungszentrum Rossendorf e.V.,
Postfach 51 01 19, D-01314 Dresden, Bundesrepublik Deutschland

Zusammenfassung

Für die im Forschungszentrum Rossendorf in Bau befindliche Strahlungsquelle ELBE werden die Möglichkeiten zur Erzeugung kohärenter Strahlung mit Hilfe eines Freie Elektronen Lasers im Bereich des mittleren und fernen Infrarot vorgestellt. Mit Hilfe einfacher Modelle werden die Vorgänge bei der Erzeugung und Verstärkung kohärenter Strahlung erläutert und ihre Eigenschaften in Abhängigkeit von den Parametern des Elektronenstrahls und des verwendeten Undulators berechnet. Insgesamt werden 4 mögliche Varianten eines Undulators diskutiert. Anwendbarkeit und Genauigkeit der verwendeten Näherungsformeln werden mit Hilfe eindimensionaler Simulationsrechnungen getestet.

PACS: 41.60.Cr, 07.57.-c

*e-mail: R.Wuensch@fz-rossendorf.de

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Parameter von Elektronenstrahl, Undulator und optischen Resonator	4
3	Wellenlänge der emittierten Strahlung	7
4	Spontane Emission elektromagnetischer Strahlung	8
5	Das Feld im optischen Resonator	11
6	Arbeitsregime des FEL und ihre Charakteristika	16
6.1	Low-Gain Regime	18
6.2	Medium-Gain Regime	24
6.3	High-Gain Regime	25
6.4	Sättigung der Intensität des optischen Feldes	26
7	Eindimensionale Simulationsrechnungen	29
7.1	Monoenergetischer Elektronenstrahl	33
7.2	Elektronenstrahl endlicher Energieschärfe	36
8	Zusammenwirken von Undulator und Resonator beim Aufbau des Laserfeldes	39
9	Zusammenfassung	46
A	Anhang	49
A.1	Einheiten, physikalische Konstanten (MKSA) und Umrechnungsfaktoren	49
A.2	Koordinatensysteme	49
A.3	Symbole und Bezeichnungen	50

1 Einleitung

Der im Bau befindliche supraleitende 40 MeV Linearbeschleuniger der Rossendorfer Strahlungsquelle ELBE¹ wird einen quasi-kontinuierlichen (cw) Elektronenstrahl liefern, der eine Vielzahl von Experimente auf den Gebieten der Kern- und Hadronenphysik, der Festkörper- und Molekülphysik aber auch der Materialforschung und der Biomedizin gestatten wird. Einzelheiten des Projekts sind in Refs. [1, 2] beschrieben.

Neben einigen direkten Anwendungen für kern- und festkörperphysikalische Experimente werden die Elektronen hauptsächlich zur Erzeugung sekundärer Strahlung in Form elektromagnetischer Wellen vom fernen Infrarot bis zur Gammastrahlung sowie von Positronen und Neutronen dienen. Freie Elektronen Laser (FEL) sollen elektromagnetische Strahlung hoher Brillanz im mittleren (MIR: $5 \mu\text{m} \lesssim \lambda \lesssim 30 \mu\text{m}$) und fernen Infrarotbereich (FIR: $30 \mu\text{m} \lesssim \lambda \lesssim 150 \mu\text{m}$) erzeugen.

Herzstück der vorgesehenen FEL sind sogenannte Undulatoren oder Wiggler, die mit Hilfe eines periodischen Magnetfeldes die Elektronen zu einer sinusförmigen Wiggelbewegung veranlassen, die sowohl die Ursache für die spontane Emission elektromagnetischer Wellen als auch für die Verstärkung vorhandener Strahlung (induzierte Emission) ist. Solche FEL werden als *Compton FEL* bezeichnet, da bei ihnen die Wechselwirkung zwischen Elektronen und elektromagnetischem Feld als Comptonstreuung ultrarelativistischer Elektronen an den virtuellen Photonen des Undulatorfeldes verstanden werden kann. Demgegenüber beruhen Erzeugung und Verstärkung elektromagnetischer Strahlung bei einem *Raman FEL* auf den Plasmaschwingungen des Elektronenstrahls. Diese spielen bei dem von ELBE erzeugten Strahl wegen der relativ geringen Ladung der einzelnen Elektronenpulse und ihrer großen kinetischen Energie nur eine untergeordnete Rolle. Ein Überblick über die verschiedenen Methoden, mit Hilfe eines Elektronenstrahls kohärente Strahlung zu erzeugen, kann in Referenz [3] gefunden werden.

Ein wichtiges Kriterium für die Arbeit eines FEL ist der bei einem Durchlauf durch den Undulator erhaltene Gewinn an elektromagnetischer Energie (*single-pass gain*). Er wird für ELBE auf einige 10% geschätzt (Siehe Unterkapitel 6.1). Dieser Wert ist zu gering, um sich auf die Verstärkung spontan emittierter Strahlung (SASE) in einem Durchlauf durch den Undulator zu beschränken. Um hohe elektromagnetische Feldstärken zu erreichen, muss der optische Strahl in einen Resonator eingekoppelt werden, der mit Hilfe zweier Spiegel das Licht so reflektiert, dass es den Undulator viele Male durchläuft. Die gewünschte Strahlungsenergie wird dabei erst nach einigen hundert Umläufen erreicht. Die Parameter des Resonators bestimmen Form und transversale Ausdehnung des optischen Strahles und haben dadurch ebenfalls Einfluss auf den Verstärkungseffekt im Undulator.

Es ist das Ziel dieser Arbeit, auf der Grundlage der Parameter von Elektronenstrahl, Undulator und optischen Resonator, die zu erwartenden Eigenschaften und Parameter der erzeugten elektromagnetischen Strahlung mit Hilfe von theoretischen Modellen vorherzusagen. Diese Rechnungen sollen auch dazu beitragen, die Vorgänge im FEL besser zu verstehen und Möglichkeiten aufzuzeigen, in Abhängigkeit von der entsprechenden Anwendung, gezielt Einfluss auf die Strahlparameter zu nehmen. Dazu werden die in den vergangenen 30 Jahren entwickelten Modelle, Gleichungen und Parameter zuerst allgemein vorgestellt und erläutert, um sie danach auf die konkreten Fälle der FEL für ELBE anzuwenden.

Eine wichtige Rolle bei der Beschreibung von FEL spielen algebraische Formeln zur Ermittlung des Gewinns an elektromagnetischer Energie in Abhängigkeit von seinen Parametern. Anwendbarkeit und Genauigkeit dieser Formeln sind an Annahmen und Voraussetzungen gebunden, deren Gültigkeit im konkreten Falle überprüft werden muss. Dazu dienen allgemeinere Modelle, die auf einer Lösung der Bewegungsgleichung für die Elektronen im Undulator basieren. Ein Ziel der Arbeit ist es, Anwendbarkeit und Genauigkeit der algebraischen Näherungsformeln durch Vergleich mit selbstkonsistenten Lösungen der Bewegungsgleichungen (Simulationsrech-

¹ELBE = Elektronenquelle mit hoher B Brillanz und geringer Emittanz

nungen) für den konkreten Fall der für ELBE vorgesehenen FEL zu testen.

Im folgenden Kapitel 2 werden die Parameter des Elektronenstrahls, der Undulatoren sowie des optischen Resonators vorgestellt insofern sie für die Modellierung des FEL und seiner Arbeit von Bedeutung sind. Die jeweiligen Wellenlängenbereiche der erzeugten elektromagnetischen Strahlung werden in Kapitel 3 berechnet. Im Kapitel 4 werden Spektrum und Winkelverteilung der beim Durchlaufen der Elektronen durch den Undulator spontan emittierten Strahlung berechnet. Form und Ausdehnung des optischen Feldes im Resonator sowie seine Stabilität werden im Kapitel 5 behandelt. Kapitel 6 definiert die unterschiedlichen Arbeitsregime eines Compton FEL und ihre Relevanz für ELBE. Die Formeln zur Berechnung der Laserverstärkung im Small- und Medium-Gain Regime sowie in der Phase der Sättigung werden hier erläutert und auf ELBE angewandt. Das High-Gain Regime wird nur soweit behandelt, wie es für das Gesamtverständnis notwendig ist. Der für ELBE prognostizierte Gewinn liegt deutlich unterhalb dieser Regimes. Im Kapitel 7 werden für ELBE Simulationsrechnungen im Rahmen eindimensionaler Modelle vorgestellt und ihre Ergebnisse mit den im Small- und Medium-Gain Regime verwendeten Näherungsformeln verglichen. Kapitel 8 behandelt die zeitliche Entwicklung des Laserfeldes im Resonator und die Stärke, die es in Abhängigkeit von den Verlusten und dem auszukoppelnden Anteil erreichen kann. Eine Zusammenfassung wird in Kapitel 9 gegeben.

In der gesamten Arbeit werden MKSA Einheiten (Anhang A.1) verwendet. Die benutzten Koordinatensysteme sowie die wichtigsten der verwendeten Symbole sind im Anhang (A.2) bzw. (A.3) zusammengestellt.

2 Parameter von Elektronenstrahl, Undulator und optischen Resonator

Für die Berechnungen in den Kapiteln 3-8 werden die Parameter benötigt, die den Elektronenstrahl, den Undulator und den optischen Resonator charakterisieren. Soweit diese für ELBE festliegen, werden sie verwendet [2]. Einige der Parameter können dabei in einem festgelegten Bereich variieren. Es besteht die Möglichkeit, dass sich im Laufe des Aufbaus und der Erprobung von ELBE der eine oder andere Parameterwert noch ändern wird. Für eine genaue quantitative Beschreibung müssen dann entsprechend modifizierte Rechnungen durchgeführt werden. Die eher qualitativen Aussagen dieser Arbeit bleiben davon aber unbeeinflusst. In einzelnen Fällen werden die vorgegebenen Parameter in den Rechnungen variiert, um zu untersuchen, welche Konsequenzen eine entsprechende Änderung hätte oder wie die Aussagen im Falle anderer bereits existierender FEL wäre.

Soweit nicht anders angegeben, werden in den Rechnungen die in den Tabellen 2.1-2.3 zusammengefassten Parameter verwendet. Im weiteren werden diese, ihre Bedeutung für den FEL und die wesentlichen Argumente für ihre Festlegung kurz vorgestellt. Der vom supraleitenden Linearbeschleuniger erzeugte quasi-kontinuierliche Elektronenstrahl besteht aus Mikropulsen der (rms) Dauer σ_t , die aufeinander mit der Frequenz $f_{\text{micro}} \approx 11.8 \text{ MHz}$ folgen. Zusammen mit dem mittleren Strom I_{av} , der für ELBE auf etwa 1 mA beschränkt ist, bestimmt die Wiederholrate f_{micro} die Gesamtladung Q eines Pulses. In Abhängigkeit vom Verwendungszweck des zu erzeugenden Laserpulses können die Pulslänge und damit auch der während eines Pulses fließende Strom I_p (Peakstrom) variiert werden. Letzterer bestimmt wesentlich die Laserverstärkung. Um einen Zusammenhang zwischen Pulslänge, -ladung und Strom herzustellen, gehen wir von Pulsen in der Form einer Gaußschen Glockenkurve aus. Für andere Pulsformen müssen die entsprechenden Gleichungen modifiziert werden. Die in den meisten Rechnungen angenommene 1σ Pulslänge von 1.5 ps liegt im mittleren Bereich, wie er für den Betrieb des Lasers im Hinblick auf mögliche Anwendungen vorgesehen ist. Dabei werden für das ferne Infrarot eher längere Pulse eingesetzt werden, während im mittleren Infrarot kürzere Pulse von Interesse sind. Eine Verkürzung der Pulsdauer führt bei konstanter Ladung Q zu einer Erhöhung des Peakstromes

und somit zu einer größeren Laserverstärkung. Andererseits verringert die Slippage-Korrektur (6.12) die Verstärkung extrem kurzer Pulse.

Parameter	Symbol	Wert
Energie pro Elektron	E_e	10... 40 MeV
Energieunschärfe (rms)	σ_E	90 keV
Normierte Emittanz (rms)	ϵ_n	7 mm mrad
Mittlerer Strom	I_{av}	1 mA
Wiederholrate der Mikropulse	f_{micro}	11.818 MHz
Ladung eines Mikropulses	$Q = I_{av}/f_{micro}$	85 pC
Zeitdauer eines Mikropulses (rms)	σ_t	1.5 ps (0.4...4) ps

Tabelle 2.1: Parameter des Elektronenstrahls.

Die Energie E_e der einzelnen Elektronen wird zwischen ca. 10 und 20 MeV, in einer zweiten Ausbaustufe bis 40 MeV variiert werden können. Elektronen geringerer Energie werden voraussichtlich von Raumladungseffekten so stark beeinflusst, dass sie für den Betrieb eines FEL ungeeignet sind. Die Energieunschärfe σ_E des Elektronenstrahls ist eine kritische Größe für den FEL. Wir gehen von einer rms Breite von 90 keV aus, die von dem Strahlbunching-System vor dem Beschleuniger herrührt und die im gesamten Energiegebiet in etwa konstant sein wird. Damit wird das Kriterium

$$\frac{\sigma_E}{E_e} \ll \frac{1}{4nN_U} \quad (2.1)$$

mit der Anzahl N_U der Undulatorperioden nicht erfüllt und man muss nach Gl. (6.19) mit einer merklichen Reduktion des Gewinns bereits für das Lasen mit der 1. Harmonischen ($n = 1$) rechnen. Die normierte transversale Emittanz² ϵ_n des Elektronenstrahls wird mit höchstens 7mm mrad recht klein sein und hat somit einen geringen Einfluss auf den FEL. Hier lautet das entsprechende Kriterium für das Low-Gain Regime (Kapitel 6)

$$\epsilon_n \ll \frac{(1 + K_{rms}^2) \lambda_U}{4n\pi N_U K_{rms}} \quad (2.2)$$

mit dem Undulatorparameter K_{rms} (2.4). Es wird selbst für den Undulator mit der kürzesten Periodenlänge und der größten Periodenzahl um fast eine Größenordnung unterschritten. Für den Fall, dass sich die Ellipse der transversalen Phasenraumverteilung in Hauptachsenlage befindet, ist die Länge der Halbachsen mit der Standardabweichung σ_x bzw. $\sigma_{x'}$ in der jeweiligen Dimension identisch

$$\epsilon \equiv 2 \sigma_x \sigma_{x'} \quad \epsilon_n \equiv \gamma \epsilon \quad (\text{normierte Emittanz}). \quad (2.3)$$

Um einen Wellenlängenbereiches von etwa $5 \mu\text{m}$ bis $150 \mu\text{m}$ abdecken zu können, müssen mehrere Undulatoren mit unterschiedlichen Periodenlängen λ_U eingesetzt werden. Aus Permanentmagneten zusammengesetzte Undulatoren können mit Periodenlängen von etwa 1-10 cm gebaut werden. Größere Wellenlängen erreicht man mit elektromagnetischen Undulatoren mit Periodenlängen von 6-60 cm. In der Arbeit werden 4 Undulatorvarianten untersucht, die für ELBE zum Einsatz kommen können. Für die Erzeugung von Strahlung im mittleren Infrarot wird ein Undulator betrachtet, der aus 1 oder 2 Modulen des am DESY in Bau befindlichen VUV FEL [4] mit 32 bzw. 64 Perioden der Länge 2.73 cm besteht (im weiteren bezeichnet als U27×32 bzw. U27×64). Hierbei handelt es sich um einen Hybridundulator bestehend aus Permanentmagneten und hochpermäablem Eisen. Zur Erzeugung längerer Wellen kann ein ursprünglich für

²Wir verwenden die rms Emittanz, die unter der Annahme einer gaussförmigen Belegung des Phasenraumes als das Doppelte des Produktes der beiden Halbachsen der 1σ Phasenraumellipse definiert ist (ohne einen Faktor π).

den LISA FEL am ENEA Institut in Frascati (Italien) [5] entwickelter Undulator in Halb- ach- Ordnung (im Weiteren bezeichnet als U50×45) mit 45 Perioden der Länge 5 cm zeitweise genutzt werden. Alternativ dazu könnte die eigene Entwicklung eines elektromagnetischen Undulators bestehend aus 28 Perioden mit einer Länge von 9 cm zum Einsatz kommen. Letzterer basiert auf dem Undulator FIREFLY [6] an der Stanford Universität im kalifornischen Palo Alto. Er wird im weiteren mit U90×28 bezeichnet.

Parameter	Symbol	Wert			
		U27×32	U27×64	U50×45	U90×28
Periodenlänge	λ_U	2.73 cm	2.73 cm	5.0 cm	9.0 cm
Anzahl der Perioden	N_U	32	64	45	28
Undulatorlänge	L_U	0.87 m	1.74 m	2.25 m	2.52 m
Undulatorparameter	K_{rms}	0.3...1.0	0.3...1.0	0.3...2.0	0.8...1.2

Tabelle 2.2: *Parameter der betrachteten Undulatoren.*

Die Anzahl N_U der Undulatorperioden bestimmt wesentlich die Verstärkung des Lasers und die Bandbreite der ausgesandten Strahlung. Die wichtigste Größe zur Charakterisierung eines Undulators ist der Undulatorparameter K_{rms} , der für einen planaren Undulator definiert ist durch

$$K_{\text{rms}} = \frac{eB_U\lambda_U}{2\pi mc} \approx 0.934 B_U[T] \lambda_U[\text{cm}] \quad (2.4)$$

mit der rms Amplitude B_U des Magnetfeldes auf der Undulatorachse und den in Anhang A.1 definierten Konstanten e , c und m . Eine Variation des Undulatorparameters wird durch eine Veränderung der Magnetfeldstärke auf der Undulatorachse erreicht. Bei einem elektromagnetischen Undulator geschieht dies durch Variation der Stromstärke in den Magnetspulen, bei einem Undulator mit Permanentmagneten durch eine mechanische Veränderung der Größe des Spaltes (gap) zwischen den beiden Undulatorhälften.

Durch die Wechselwirkung mit dem Magnetfeld vollführt der Elektronenstrahl im Undulator eine Wiggelbewegung mit der Periodenlänge λ_U und der Amplitude $\sqrt{2}K_{\text{rms}}\lambda_U/(2\pi\gamma)$ mit dem Lorentzfaktor γ (A.1) der entsprechenden Elektronenenergie. Das sich in Richtung der Pole verstärkende Magnetfeld führt zu einer Oszillation (Betatronschwingung) in der zur Wiggelbewegung senkrechten Ebene. Daran sind alle Elektronen beteiligt, die sich wegen der endlichen Emittanz des Strahles nicht exakt auf der Achse des Undulators bewegen bzw. einen endlichen Winkel zu dieser Achse haben. Die Betatronschwingung hat die Periodenlänge

$$\lambda_\beta = \frac{\gamma}{K_{\text{rms}}} \lambda_U, \quad (2.5)$$

die wegen $\gamma \gg K_{\text{rms}}$ deutlich größer als die Periode λ_U der Wiggelbewegung ist. In der Wiggel- ebene wird das Magnetfeld als konstant angenommen, was durch eine hinreichende Breite der Magneten im Verhältnis zu Spaltgröße und Strahldurchmesser gewährleistet wird.

Die Länge des optischen Resonators ist bis auf eine mögliche Verstimmung (Desynchronisa- tion) in der Größenordnung der Wellenlänge des ausgestrahlten Lichtes durch den räumlichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Elektronenpulsen bestimmt: nach einer jeweiligen Reflexion am oberen und unteren Spiegel muss der optische Puls gerade auf den nächsten Puls aus dem Elektronenbeschleuniger treffen. Daraus ergibt sich eine Resonatorlänge $L_R = c/(2f_{\text{micro}})$.

Die Rayleighlänge z_R eines Resonators wird durch Abstand und Krümmungsradius der bei- den Spiegel festgelegt (Siehe Kapitel 5.). Sie bestimmt die transversale Ausdehnung des optischen Strahls und die Stabilität des Resonators gegenüber kleinen Verkippungen [7]. Um einen ma- ximalen Energieübertrag vom Elektronenstrahl auf die elektromagnetische Welle zu erreichen, muss der Radius des optischen Strahls im Undulator möglichst klein gehalten werden, ohne

Parameter	Symbol	Wert
Resonatorlänge	$L_R = c/(2f_{\text{micro}})$	12.684 m
Rayleighlänge	z_R	1 m (0.5 m*)
Krümmungsradien der Spiegel	$R = (4z_R^2 + L_R^2)/2L_R$	6.499 m (6.381 m*)

* für U27×32

Tabelle 2.3: *Parameter des optischen Resonators*

die Ausdehnung des Elektronenstrahls zu unterschreiten. Dies wird bei einer Rayleighlänge von $z_R \approx L_U/3 \dots L_U/2$ erreicht. Die in den Rechnungen verwendete Rayleighlänge von 1 m bzw. 50 cm stellt dazu einen Näherungswert dar. Gesondert muss noch untersucht werden, ob dieser Wert eine ausreichende Stabilität des Resonators gewährleistet (Siehe Kapitel 5).

3 Wellenlänge der emittierten Strahlung

Einer der großen Vorzüge eines FEL gegenüber einem konventionellen Laser besteht in seiner Möglichkeit, die Wellenlänge der emittierten Strahlung auf relativ einfache Weise und in größerem Maßstab kontinuierlich zu variieren. Für einen vorgegeben Wert von Elektronenenergie $E_e = \gamma mc^2$ und Undulatorparameter K_{rms} besteht das Spektrum der spontan emittierten Strahlung aus einer Abfolge sog. Harmonischer $n = 1, 2, \dots$, deren Maxima bei einer Wellenlänge

$$\lambda_n = \frac{1 + K_{\text{rms}}^2}{2n\gamma^2} \lambda_U \approx 130.56 \mu\text{m} \frac{1 + K_{\text{rms}}^2}{n} \frac{\lambda_U[\text{mm}]}{(E_e[\text{MeV}])^2} \quad (3.1)$$

liegen. Die Maxima der durch den Lasereffekt verstärkten Strahlung unterscheiden sich ge-

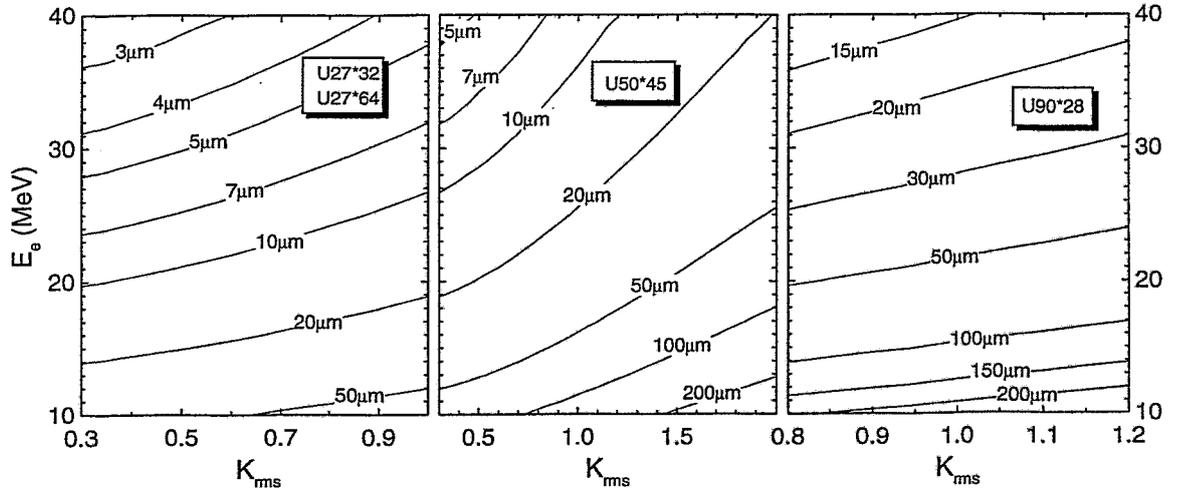


Abbildung 3.1: Wellenlänge λ_1 der ersten Harmonischen für die verschiedenen für die Strahlungsquelle ELBE diskutierten Undulatoren (Tabelle 2.2) in Abhängigkeit von Undulatorparameter K_{rms} und Elektronenenergie E_e . Die Wellenlängen für die 3. Harmonische sind jeweils um einen Faktor 3 kleiner.

ringfügig von den Resonanzwellenlängen (3.1) und liegen an den Flanken der jeweiligen spontanen Emissionspeaks hin zu größeren Wellenlängen bei

$$\lambda_n^{\text{FEL}} \approx \frac{\lambda_n}{1 - \frac{2.606}{2n\pi N_U}} \quad (3.2)$$

Die Abweichung entspricht der halben Breite der spontanen Emissionspeaks. Sie verringert sich mit wachsender Anzahl von Undulatorperioden.

Durch Änderung der Elektronenenergie, ausgedrückt durch γ , und/oder durch Änderung der Magnetfeldstärke auf der Undulatorachse, welche sich auf die Größe des Undulatorparameters K_{rms} (2.4) auswirkt, kann man die Wellenlänge der Strahlung variieren. Eine weitere Möglichkeit vor allem zu kürzeren Wellenlängen zu kommen, besteht in der Verwendung höherer Harmonischer ($n > 1$), welche bei Undulatoren mit einem Parameter $K_{\text{rms}} \gtrsim 1$ in ausreichendem Maße ausgestrahlt und verstärkt werden können.

In Abbildung 3.1 ist das Wellenlängengebiet λ_1 für die Grundharmonische angegeben, das mit dem Elektronenstrahl aus Tabelle 2.1 und den Undulatoren aus Tabelle 2.2 erreicht werden kann. Für höhere Harmonische erhält man entsprechend Gleichung (3.1) kürzere Wellenlängen.

Gleichung (3.1) beschreibt die Wellenlänge der in Richtung der Undulatorachse emittierten Strahlung. Die unter einem endlichen Winkel Θ emittierte Strahlung hat eine etwas größere Wellenlänge

$$\lambda_n(\Theta) = \frac{1 + K_{\text{rms}}^2 + \gamma^2 \Theta^2}{2n\gamma^2} \lambda_U. \quad (3.3)$$

Gleichung (3.3) stellt eine Näherung für kleine Winkel Θ dar. Sie kann aber für alle Winkel benutzt werden, da eine merkbare Strahlung nur innerhalb eines sehr schmalen Konuses ($\Theta \ll 1/\gamma$) emittiert wird.

4 Spontane Emission elektromagnetischer Strahlung

Der im Undulator oszillierende Elektronenstrahl sendet elektromagnetische Strahlung aus, die wegen der relativistischen Geschwindigkeit der Elektronen in einem engen Winkelbereich $\Theta \ll \gamma^{-1}$ um die Undulatorachse konzentriert ist. Der periodische Verlauf der Elektronenbahn im Undulator bedingt ein quasi-diskretes Spektrum der Strahlung mit scharfen Resonanzen bei den Wellenlängen λ_n (3.1). Die spektrale Form dieser Resonanzen wird geprägt durch das Quadrat der Funktion

$$\text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin x}{x}, \quad (4.1)$$

welche ein ausgeprägtes Maximum bei $x=0$ hat. Die von einem einzelnen Elektron auf seinem Weg durch den Undulator im Wellenlängenintervall $d\lambda$ und in einem Raumwinkel $d\Omega$ ausgesandte Strahlungsenergie ist gegeben durch die Summe [3]

$$\frac{d^2 E_{\text{opt}}}{d\lambda d\Omega} = 8\pi\alpha\hbar c \frac{N_U^2 \gamma^4}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sinc}^2\left(\frac{\nu_n}{2}\right) \quad (4.2)$$

mit der als Energieverstimmung (*Detuning Parameter*) bezeichneten Variablen

$$\nu_n = 2n\pi N_U \left(1 - \frac{\lambda_n}{\lambda}\right) = 2n\pi N_U \left(1 - \frac{\gamma_n^2}{\gamma^2}\right) \approx 4n\pi N_U \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma}\right), \quad (4.3)$$

die den Abstand der betrachteten Wellenlänge λ von der Resonanzwellenlänge λ_n bzw. den Abstand der Elektronenenergie γ von der zur Wellenlänge λ gehörenden Resonanzenergie γ_n (beides für die n -te Harmonische) der Elektronen beschreibt. Letztere erhält man durch Auflösung von Gl. (3.1) nach γ . Die Amplituden A_n im Spektrum (4.2) sind gegeben durch

$$A_n = \frac{n^2}{(1 + K_{\text{rms}}^2 + \gamma^2 \Theta^2)^2} \left[\left| S_n^{(1)}(K_{\text{rms}}; \Theta, \Phi) \right|^2 + \left| S_n^{(2)}(K_{\text{rms}}; \Theta, \Phi) \right|^2 \right]. \quad (4.4)$$

Sie hängen vom polaren Winkel Θ und vom azimutalen Winkel Φ der emittierten Strahlung ab (Siehe A.2). Die Funktionen $S_n^{(1,2)}$ sind definiert durch

$$\begin{aligned} S_n^{(1)}(K_{\text{rms}}; \Theta, \Phi) &= \Theta \cos \Phi J_n(-n\zeta, -n\xi) + \frac{K_{\text{rms}}}{\sqrt{2}\gamma} \left[J_{n-1}(-n\zeta, -n\xi) + J_{n+1}(-n\zeta, -n\xi) \right] \\ S_n^{(2)}(K_{\text{rms}}; \Theta, \Phi) &= \Theta \sin \Phi J_n(-n\zeta, -n\xi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

mit den verallgemeinerten Besselfunktionen

$$J_n(x, y) \equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{n-2l}(x) \cdot J_l(y) \quad (4.6)$$

und den Variablen

$$\zeta = \frac{2\sqrt{2}K_{\text{rms}}\gamma\Theta \cos \Phi}{1+K_{\text{rms}}^2+\gamma^2\Theta^2} \quad \xi = \frac{K_{\text{rms}}^2}{2(1+K_{\text{rms}}^2+\gamma^2\Theta^2)}. \quad (4.7)$$

Die Funktionen $J_l(x)$ bezeichnen Besselfunktionen erster Art [8]. Das Spektrum (4.2) zeigt Resonanzen bei den Wellenlängen $\lambda = \lambda_n$ mit Breiten $\delta\lambda_n$ (FWHM), die gegeben sind durch

$$\frac{\delta\lambda_n}{\lambda_n} \approx \frac{1}{nN_U}. \quad (4.8)$$

Ein unkorrelierter Mikropuls mit der Gesamtladung Q , der rms Länge σ_t und dem daraus resultierenden Peakstrom $I_p = Q/(\sqrt{2\pi}\sigma_t)$ liefert ein optisches Leistungsspektrum

$$\frac{d^2 P_{\text{opt}}}{d\lambda d\Omega} = \frac{Q}{e\sqrt{2\pi}\sigma_t} \frac{d^2 E_{\text{opt}}}{d\lambda d\Omega} = \frac{I_p}{e} \frac{d^2 E_{\text{opt}}}{d\lambda d\Omega}. \quad (4.9)$$

Falls die Länge des Pulses vergleichbar mit der Wellenlänge der Strahlung ist oder der Puls eine innere Struktur in dieser Größenordnung besitzt, so kann das Leistungsspektrum deutlich davon abweichen [9].

Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen das zu erwartende Leistungsspektrum der spontanen Emission für den U90×28 Undulator. Die Stärke der einzelnen Resonanzen variiert stark mit dem Polarwinkel Θ und dem Undulatorparameter K_{rms} und hängt auch vom Azimutalwinkel Φ ab. Bei einer Vergrößerung des Polarwinkels wird das Maximum der Emission leicht zu größeren Wellenlängen verschoben. Genau in Richtung der Undulatorachse werden nur ungerade Harmonische emittiert. Während die Stärke der 1. Harmonischen ziemlich glatt vom Winkel Θ abhängt, zeigen höhere Harmonische ausgeprägte Maxima bei bestimmten Polarwinkeln. Auch sind höhere Harmonische nach Gl. (4.8) schmaler als die Grundharmonische.

Das Verhältnis zwischen den Stärken der verschiedenen Harmonischen hängt stark vom Undulatorparameter K_{rms} ab. Um dieses Verhalten zu illustrieren haben wir in Abb. 4.2 das Spektrum für einen halb so großen Undulatorparameter wie in Abb. 4.1 berechnet. Um die Resonanzen an die gleiche Wellenlänge zu platzieren, haben wir gleichzeitig die Elektronenenergie in Übereinstimmung mit Gl. (3.1) von 20 MeV auf etwa 15.811 MeV reduziert und so das Verhältnis $(1+K_{\text{rms}}^2)/\gamma^2$ konstant gehalten. Man sieht deutlich den reduzierten Beitrag höherer Harmonischer und die gestiegene Emission mit der Wellenlänge der Grundharmonischen.

Gerade Harmonische tragen zur Emission in Richtung der Undulatorachse nicht bei. Aus Gl. (4.2) erhält man für $\Theta = 0$

$$\left. \frac{d^2 E_{\text{opt}}}{d\lambda d\Omega} \right|_{\Theta=0} = 4\pi\alpha\hbar c \left(\frac{N_U\gamma}{\lambda} \right)^2 \left(\frac{K_{\text{rms}}}{1+K_{\text{rms}}^2} \right)^2 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^2 B_n^2 \text{sinc}^2 \left(\frac{\nu_n}{2} \right) \quad (4.10)$$

mit dem Abschwächungsfaktor

$$B_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[J_{\frac{n-1}{2}}(n\xi) - J_{\frac{n+1}{2}}(n\xi) \right]. \quad (4.11)$$

Das entsprechende elektromagnetische Leistungsspektrum erhält man mit Hilfe von Gl. (4.9).

Integriert man über alle Wellenlängen, bekommt man die gesamte in Längsrichtung des Undulators emittierte Leistung. Sie beträgt für hinreichend schmale Resonanzen ($N_U \gg 1$)

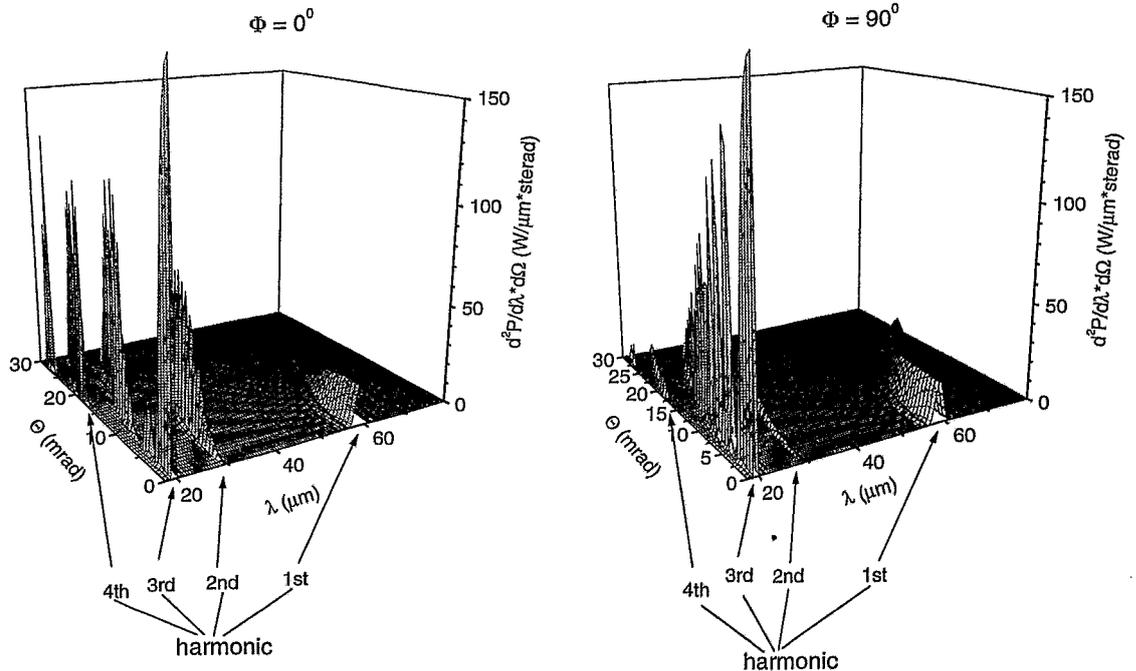


Abbildung 4.1: *Spektrum der spontan emittierten Strahlung des U90×28 Undulator mit den Parametern von Tabelle 2.1 und 2.2 bei $K_{\text{rms}} = 1.0$ und $E_e = 20 \text{ MeV}$ in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ und dem polaren Emissionswinkel Θ .
 Linke Seite: Emission in die Undulatorebene ($\Phi = 0^\circ$);
 Rechte Seite: Emission in die Wiggelebene ($\Phi = 90^\circ$).*

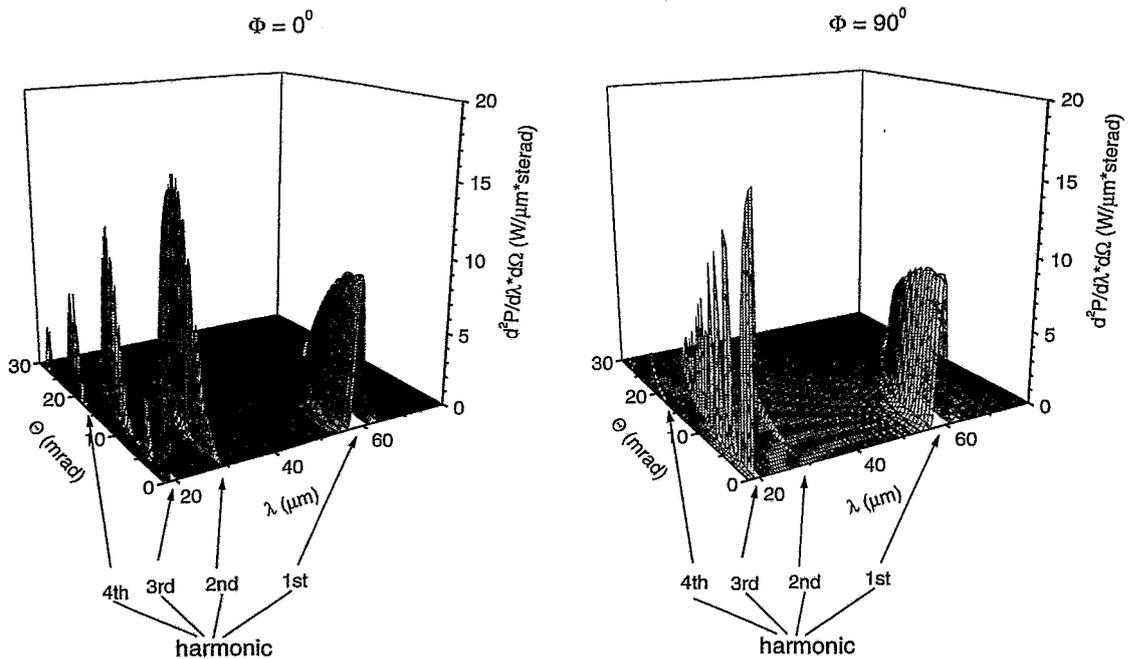


Abbildung 4.2: *Dasselbe wie in Abb. 4.1 für $K_{\text{rms}} = 0.5$ und $E_e = 15.811 \text{ MeV}$.*

$$\begin{aligned}
\left. \frac{dP_{\text{opt}}}{d\Omega} \right|_{\Theta=0} &= \frac{2e}{\epsilon_0} I_p \gamma^4 \frac{N_U}{\lambda_U} \frac{K_{\text{rms}}^2}{(1+K_{\text{rms}}^2)^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} n^2 \mathcal{B}_n^2 \\
&= \frac{e}{2\epsilon_0} I_p N_U \lambda_U \frac{K_{\text{rms}}^2}{1+K_{\text{rms}}^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{\mathcal{B}_n}{\lambda_n} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Das Verhältnis der verschiedenen Harmonischen in Vorwärtsrichtung wird durch den Faktor $K_{\text{rms}}^2/(1+K_{\text{rms}}^2)^3 (n\mathcal{B}_n)^2$ und somit allein durch den Undulatorparameter bestimmt. Abb. 4.3 zeigt diesen Faktor in Abhängigkeit von K_{rms} . Bei kleinen Parametern ($K_{\text{rms}} \ll 1$) dominiert

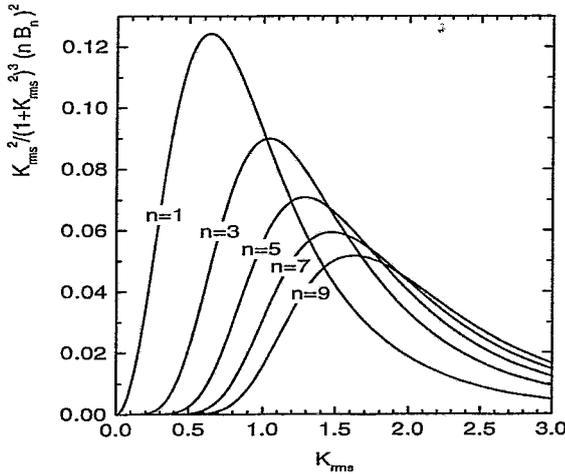


Abbildung 4.3: Relative Stärke der verschiedenen Harmonischen n der spontanen Emission in Vorwärtsrichtung als eine Funktion des Undulatorparameters K_{rms}

die 1. Harmonische. Bei $K_{\text{rms}} \approx 1$ erreicht die 3. Harmonische die Stärke der ersten. Bei größeren Undulatorparametern wird eine Vielzahl Harmonischer mit annähernd der gleichen Stärke emittiert.

5 Das Feld im optischen Resonator

Die räumliche Verteilung des elektromagnetischen Feldes im Undulator ist von großer Bedeutung für die Wechselwirkung zwischen Feld und Elektronen und damit für den Lasereffekt. Kann sich das Feld frei im Raum ausbreiten, so sind ebene Wellen eine geeignete Näherung zu seiner Beschreibung. Wird dagegen wie bei ELBE das erzeugte elektromagnetische Feld in einen optischen Resonator eingeschlossen, aus dem nur ein Bruchteil der elektromagnetischen Energie ausgekoppelt wird, so wird es durch sog. Gauss-Laguerre Moden [7], den Eigenmoden eines zylindersymmetrischen Resonators, beschrieben. Bei diesen stimmt der Krümmungsradius der Wellenfronten auf den Spiegeln mit den Krümmungsradien der Spiegel überein. Noch andere Formen nimmt das Feld an, wenn es durch einen Wellenleiter begrenzt wird. Obwohl es sich zumindest für längere Wellenlängen herausstellen könnte, dass der optische Strahl nur mit Hilfe eines Wellenleiters durch den Undulator geführt werden kann, wollen wir diesen Fall hier noch nicht betrachten.

Ein optischer Resonator wird von zwei gegenüberstehenden, kreisförmigen Spiegeln gebildet, die den optischen Strahl vielfach reflektieren und so seine Energie fast vollständig in den Raum zwischen den Spiegeln einschließen. Dadurch passiert der Strahl den Undulator viele Male und kann so auch bei einer relativ kleinen Verstärkung pro Durchlauf recht große Feldstärken erreichen. Die Geometrie des Resonators bestimmt die Form des optischen Feldes, insbesondere seine

transversale Ausdehnung. Diese hat Einfluss auf den Verstärkungsprozess im Undulator, da nur dort ein Energieübertrag von den Elektronen auf das elektromagnetische Feld erfolgen kann, wo gleichzeitig Elektronen und Strahlung vorhanden sind. Im Infrarotbereich ist die transversale Ausdehnung der Strahlung i. allg. größer als die der Elektronen. Deshalb ist es das Ziel, den Durchmesser des optischen Strahls im Undulator möglichst klein zu machen. Dadurch wird der Verstärkungseffekt erhöht und die Gefahr verringert, dass der Strahl auf Bauteile des Undulators (Magnete, Strahlrohr usw.) trifft und so absorbiert oder reflektiert wird.

Im Unterschied zu einer ebenen Welle sind Amplitude und Phase einer Gauss-Laguerre Mode abhängig von der Koordinate ρ senkrecht zur Ausbreitungsrichtung z . Ihre transversale Ausdehnung wird durch einen z -abhängigen Modenradius

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \quad (5.1)$$

mit einem als Rayleighlänge z_R bezeichneten Parameter beschrieben. Zweckmäßigerweise haben wir den Koordinatenursprung ($z = 0$) in den Punkt mit der geringsten transversalen Ausdehnung (Taille) gelegt, wo der Strahl den Radius w_0 besitzt. Die z -Achse stimmt mit der Symmetrieachse des Feldes überein und ist in dessen Ausbreitungsrichtung orientiert. Eventuell im Strahlengang vorhandenen rechteckigen Schlitze oder Blenden, die die Rotationssymmetrie um die z -Achse verletzen, bleiben hier unberücksichtigt. Der Modenradius w (5.1) beschreibt denjenigen Abstand von der Strahlachse, bei dem die Intensität des Strahles annähernd auf das $e^{-2} \approx 0.135$ -fache seines Maximalwertes auf der Achse gefallen ist.

Tailenradius w_0 und Rayleighlänge z_R werden durch den Krümmungsradius R der beiden Spiegel³ und die Länge des Resonators (Abstand der beiden Spiegel) L_R bestimmt

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} z_R = \frac{\lambda L_R}{2\pi} \sqrt{\frac{1+g}{1-g}} \quad \text{mit} \quad g = 1 - \frac{L_R}{R} \quad (5.2)$$

und

$$z_R = \sqrt{\frac{1+g}{1-g}} \frac{L_R}{2} = \sqrt{\frac{2R}{L_R} - 1} \frac{L_R}{2}. \quad (5.3)$$

Ein Gauss-Laguerre Mode wird durch eine Feldverteilung

$$u_{p,m}(\rho, \Phi, z) = \sqrt{\frac{2p!}{(1+\delta_{m0})\pi(p+m)!}} \frac{1}{w(z)} e^{i(2p+m+1)\Psi(z)} e^{ik\frac{\rho^2}{2R(z)}} e^{im\Phi} \quad (5.4)$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)}\right)^m L_p^m\left(\frac{2\rho^2}{w(z)^2}\right) e^{-\frac{\rho^2}{w(z)^2}}$$

mit dem z -abhängigen Krümmungsradius der Wellenfront

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \quad (5.5)$$

und der ebenfalls z -abhängigen sog. Guoy Phasenverschiebung

$$\Psi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) \quad (5.6)$$

beschrieben. Die Guoy Phase wurde in der Taille auf Null gesetzt. Sie variiert beim Durchgang durch die Taille von $-\pi/2$ bei $z = -\infty$ auf $+\pi/2$ bei $z = +\infty$. Die Hälfte dieser Phasenverschiebung ($\pi/2$) geschieht innerhalb der Entfernung einer Rayleighlänge von der Taille also

³Wir beschränken uns auf symmetrische Resonatoren mit Spiegeln, die den gleichen Krümmungsradius haben ($R_1 = R_2 = R$).

von $z = -z_R$ nach $z = +z_R$. Eine Gauss-Laguerre Mode ist durch einen ganzzahligen radialen Modenindex $p \geq 0$ und einen ganzzahligen azimuthalen Modenindex m charakterisiert. L_p^m bezeichnet das entsprechende zugeordnete Laguerre Polynom [8]. Neben ρ und z hängt die Phase der Feldverteilung für $m \neq 0$ vom Azimuthalwinkel Φ ab. Die radiale Energieverteilung einer einzelnen Gauss-Laguerre Mode ist unabhängig vom Azimuthalwinkel⁴ und bis auf eine von der Koordinate z abhängige Konstante gegeben durch

$$I_{p,m}(\rho, \Phi, z) \sim \rho^{2m} \left[L_p^m \left(\frac{2\rho^2}{w^2} \right) \right]^2 e^{-\frac{2\rho^2}{w^2}}. \quad (5.7)$$

Die Grundmode mit $p = m = 0$ hat die Intensitätsverteilung

$$I_{0,0}(\rho, \Phi, z) \sim e^{-\frac{2\rho^2}{w^2}}. \quad (5.8)$$

Für sie ist der Radiusparameter w identisch mit dem Zweifachen der Standardabweichung vom Maximalwert bei $\rho = 0$. Für Moden höherer Ordnung ist w geringfügig kleiner als 2σ .

Die effektive (energie-gewichtete) Querschnittsfläche einer Gauss-Laguerre Grundmode ist gegeben durch

$$\Sigma_{\text{opt}}(z) \equiv \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^\infty d\rho \rho I_{0,0}(\rho, \Phi, z) = \frac{\pi}{2} w(z)^2. \quad (5.9)$$

Von Bedeutung für den Durchgang eines Strahls durch Blenden oder andere Engstellen ist derjenige Energieanteil, der innerhalb bzw. außerhalb eines vorgegebenen Radius R_{ap} liegt. Für eine Gaussche Grundmode mit der Intensitätsverteilung (5.8) ist der Anteil der Intensität, der innerhalb eines Radiuses R_{ap} um die Symmetrieachse liegt, gegeben durch

$$A_{\text{inner}} = 1 - e^{-2\frac{R_{\text{ap}}^2}{w^2}}, \quad (5.10)$$

wobei w der Modenradius (5.1) an der Stelle der Blende ist. Tabelle 5 zeigt die Anteile, welche innerhalb bestimmter Radien liegen. Man sieht, dass durch eine Blende vom Radius w nur 86% der Intensität gehen. Um einen möglichst verlustfreien Durchgang zu gewährleisten, muss die Blende eine Öffnung vom 1.5- bis 2-fachen des Modenradius haben. Der Radius R_{th} entspricht dem Radius eines äquivalenten Kreises, dessen geometrische Fläche gleich der effektiven Querschnittsfläche (5.9) ist. Innerhalb dieses Radius sind etwa 63% der Gesamtintensität konzentriert. Moden höherer Ordnung haben eine etwas größere effektive Querschnittsfläche, so dass ein geringerer Anteil innerhalb eines vorgegebenen Radius liegt als bei der Grundmode.

R_{ap}	A_{inner}
$R_{1/2} = \sqrt{\ln 2/2} w \approx 0.5887 w$	50 %
$R_{\text{th}} = w/\sqrt{2} \approx 0.7071 w$	63.2 %
w	86.5 %
$R_{99\%} = \pi w/2 \approx 1.5708 w$	99.3 %
$R_{99.9\%} \approx 1.858 w$	99.9 %

Tabelle 5.1: Anteil der Intensität einer Gausschen Grundmode, der innerhalb einer konzentrischen Kreisfläche vom Radius R_{ap} liegt.

Bei Verwendung eines symmetrischen Resonators stellen Ein- und Ausgang des Undulators eine kritische Engstelle für den optischen Strahl dar. Abbildung 5.1 zeigt für verschiedene

⁴Neben diesen Gauss-Laguerre Moden, deren azimuthale Abhängigkeit durch $e^{im\Phi}$ gegeben ist, werden auch solche mit einer $\cos m\Phi$ bzw. $\sin m\Phi$ Abhängigkeit verwendet. Deren Energieverteilung variiert mit dem Azimuthalwinkel Φ und hat Knotenlinien, die von der Strahlachse radial nach außen gehen.

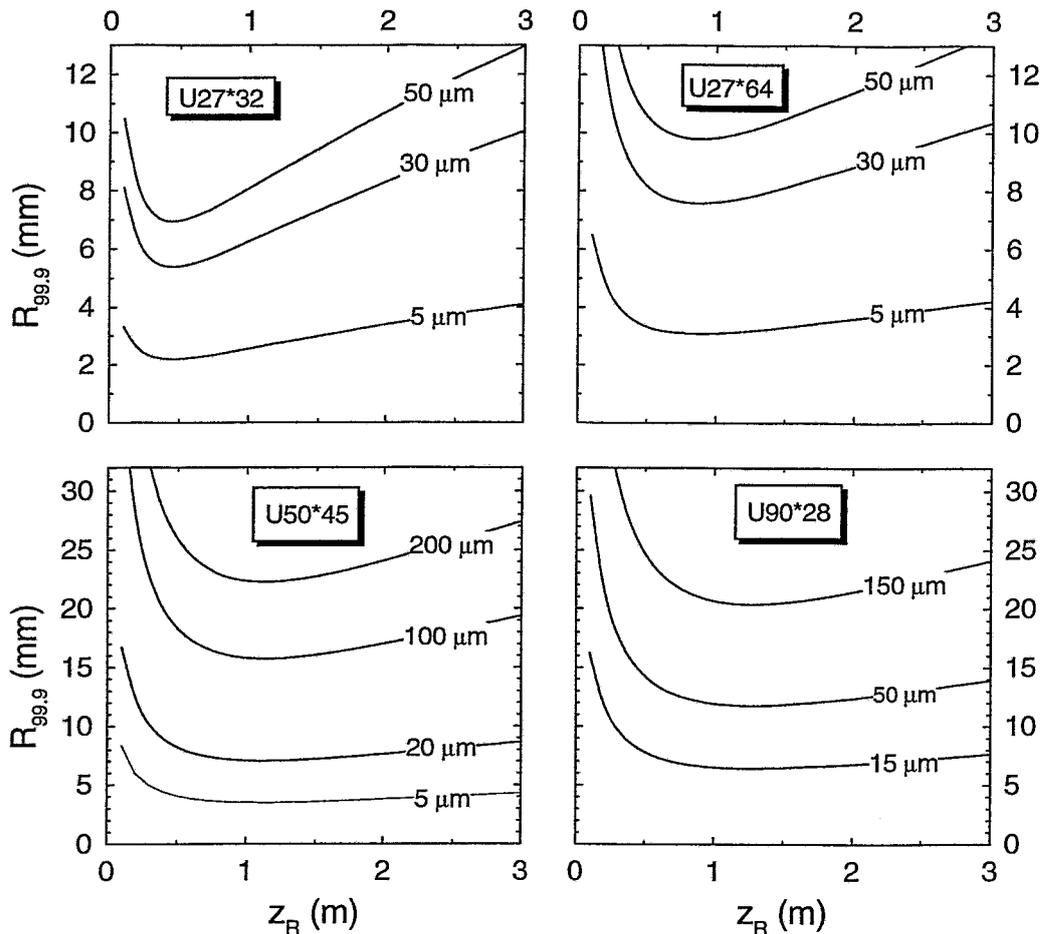


Abbildung 5.1: 99.9% Radien am jeweiligen Undulatorausgang für verschiedene Wellenlängen der Strahlung in Abhängigkeit von der gewählten Rayleighlänge z_R .

Wellenlängen die Radien, die eine (kreisförmige) Apertur am Ende des jeweiligen Undulators mindestens haben muss, damit der Verlust an optischer Energie kleiner als 0.1% ist. Lässt man einen Verlust von 1% zu, so können die Radien um einen Faktor $\sqrt{3/2} \approx 1.225$ kleiner sein. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass Rayleighlängen von 50 cm für den $U27 \times 32$ und von 1 m für die anderen Undulatoren optimale Werte bezüglich des Durchgangs durch den Undulator darstellen. Eine Rayleighlänge von nur 50 cm stellt aber hohe Anforderungen an die Stabilität des Resonators (siehe Abb. 5.2). Für den verlustlosen Transport eines optischen Strahls von 50 μm durch den $U27 \times 32$ Undulator ist eine lichte Weite von mindestens 14 mm, für den längeren $U27 \times 64$ sind 20 mm notwendig. Beschränkt man sich auf Strahlung bis zu 30 μm , so sind 11 mm bzw. 15 mm ausreichend. Fügt man in den $U50 \times 45$ Undulator ein Strahlrohr ein, so muss das mindestens einen Durchmesser von 45 mm (!) haben, um Strahlung bis zu 200 μm unbeeinflusst passieren zu lassen, was aber den Undulatorparameter K_{rms} auf Werte unter 0.3 beschränken und zu einer Kleinsignal-Verstärkung (siehe Abb. 6.3) unter 10% führen würde. Verwendet man ein Strahlrohr mit der lichten Weite von 12 mm, das einen Undulatorparameter bis zum Wert 2 gestattet, so werden bereits Wellen ab 15 μm beschnitten. Hier ist also die Verwendung eines ungehinderten Durchgangs bis zu Wellenlängen von 150 μm ausreichend.

Beschränkt man sich bei der Beschreibung des FEL auf eindimensionale Modelle, so können

longitudinale und transversale Abhängigkeiten nur in der pauschalen Form von Mittelwerten berücksichtigt werden. Für eine Gaussche Grundmode (5.8) mit der Taille in Undulatormitte erhält man die über die Undulatorlänge L_U gemittelte effektive Querschnittsfläche

$$\bar{\Sigma}_{\text{opt}} = \frac{2}{L_U} \int_0^{L_U/2} dz \Sigma_{\text{opt}}(z) = \frac{\pi}{2} w_0^2 \left[1 + \frac{L_U^2}{12z_R^2} \right] = \frac{\lambda}{2} z_R \left[1 + \frac{L_U^2}{12z_R^2} \right]. \quad (5.11)$$

Diese ist minimal, wenn man die Rayleighlänge

$$z_R^{\text{minQ}} = \frac{L_U}{\sqrt{12}} \approx \frac{L_U}{3.5} \quad (5.12)$$

wählt. Eine solche im Verhältnis zur Resonatorlänge L_R kleine Rayleighlänge entspricht einem Resonatorparameter g (5.2), dessen Betrag nahe bei Eins liegt ($g \approx -1 + (2z_R/L_R)^4$). So ein Resonator ist äußerst empfindlich gegenüber Verkipfung der Spiegel und stellt hohe Ansprüche bzgl. seiner Stabilisierung.

Zur quantitativen Beschreibung der Stabilität eines Resonators dient der Toleranzwinkel [7]

$$\alpha_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi L_R}} (1-g)^{1/4} (1+g)^{3/4}, \quad (5.13)$$

der eine Obergrenze für eine erlaubte Verkipfung der Spiegel darstellt. Diese muss von der Halterung der Spiegel gewährleistet werden⁵. Abb. 5.2 zeigt α_{max} in Abhängigkeit von der Rayleighlänge für eine Auswahl von Wellenlängen im betrachteten Gebiet. Mit einer Rayleighlänge

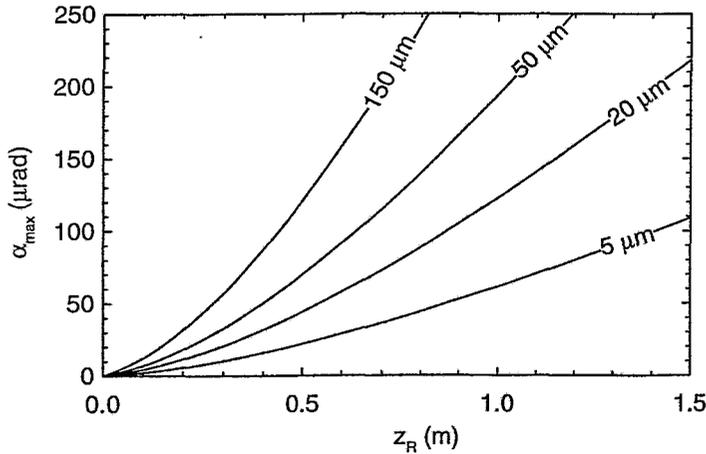


Abbildung 5.2: Toleranzwinkel α_{max} (5.13) für den ELBE Resonator in Abhängigkeit von der Rayleighlänge z_R für Strahlung unterschiedlicher Wellenlänge

nach Gl. (5.12) beträgt der Toleranzwinkel für den U27×32 Undulator für die kürzeste Wellenlänge weniger als 10 μrad, für U27×64 22 μrad. Am stabilsten ist U90×28 mit einem Toleranzwinkel von über 50 μrad bei der minimalen Wellenlänge von 15 μm.

Die Anforderungen an die Stabilität des Resonators können gemindert werden, wenn man zu einer größeren Rayleighlänge

$$z_R^{\text{minE}} = \frac{L_U}{2} \quad (5.14)$$

übergeht, bei der die transversale Ausdehnung des Strahles an den Undulatorenenden minimiert wird. Dabei wird der Toleranzwinkel in etwa verdoppelt.

Für eine solche Wahl sprechen zwei weitere Gründe: erstens wirkt das Undulatorenende mit dem eventuell vorhandenen Strahlrohr als Blende, die die Strahlung stärker beschneidet als die im

⁵Nach Aussage von S. Benson vom Jefferson Laboratory (Newport News, USA) ist es ausreichend, etwa ein Drittel des Toleranzwinkels α_{max} einzuhalten.

Strahlengang vorhandenen Dipol- und Quadupollinsen zur Führung des Elektronenstrahls. Eine Minimierung des Strahlquerschnittes an dieser Stelle vermindert somit die Verluste. Außerdem zeigen die Simulationsrechnungen im Kapitel 7, dass das Ende des Undulators den größten Beitrag zur Verstärkung liefert. Eine minimale Ausdehnung an dieser Stelle bedeutet maximale Verstärkung.

6 Arbeitsregime des FEL und ihre Charakteristika

Die Wechselwirkung zwischen Elektronenpuls und elektromagnetischer Welle kann in Abhängigkeit von den Eigenschaften des Elektronenstrahls, des Undulators und der Welle qualitative und quantitativ höchst unterschiedlich sein. Zur Beschreibung dieser Wechselwirkung hat man deshalb verschiedene sog. Arbeitsregime eingeführt. Während des Durchlaufens des Undulators bzw. beim Hochfahren der Intensität der elektromagnetischen Welle können verschiedene Regime nacheinander durchlaufen werden. In welchem Teil des Undulator welches Regime und wie lange es gültig ist, hängt entscheidend von den Parametern des Elektronenstrahls, des Undulators und der Intensität der Welle ab.

Ein wesentlicher Parameter, der den Energieaustausch zwischen einem einzelnen Elektron und der elektromagnetischen Welle steuert, ist die Phasendifferenz θ zwischen der transversalen Oszillation der Elektronenbahn und der Phase der elektromagnetischen Welle. Beim Eintritt in den Undulator sind die Elektronen gleichmäßig auf alle Phasenlagen der elektromagnetischen Welle verteilt⁶. Infolge des Energieaustausches zwischen den Elektronen und dem elektromagnetischen Feld wird ein Teil der Elektronen beschleunigt, ein anderer gebremst. Obwohl der Netto-Energieübertrag auf das Feld gering ist, in manchen Fällen sogar negativ (Laserlethargie), ist dies eine wichtige Phase für den weiteren Verstärkungsprozess. Hier erhält der Elektronenpuls eine longitudinale Struktur (Mikrobunching) in der Größenskala der Wellenlänge der elektromagnetischen Welle. Die Elektronen eines Pulses werden so positioniert, dass sie in ihrer transversalen Oszillation annähernd die gleiche Phasenlage zur elektromagnetischen Welle haben. Das führt dazu, dass sie kohärent – das heißt mit der gleichen Phase – strahlen und ebenso kohärent mit der Welle wechselwirken. Bei geeigneter Wahl der Parameter ergibt sich ein beschleunigter Transfer von Energie auf das elektromagnetische Feld. Im Resonanzfall wächst die Intensität der Strahlung exponentiell. Ist ein bestimmter Teil der kinetischen Energie der Elektronen in optische Energie umgewandelt, kommen sie in eine für einen Energietransfer ungünstige Phasenlage und der Transfer endet (Sättigung). Ab jetzt pendelt ein Teil der Energie zwischen Elektronen und elektromagnetischem Feld hin und her. Durch die z -abhängige Guoy Phase (5.6) werden die Vorgänge im Undulator bei Anwesenheit eines optischen Resonators mit einer Rayleighlänge in der Größenordnung der Undulatorlänge etwas modifiziert. Die Untersuchung dieses Effektes bleibt einer weiteren Publikation vorbehalten.

Erste Rechnungen und praktische Erfahrungen mit vergleichbaren FELs haben gezeigt, dass bei den geplanten Undulatoren für ELBE das exponentielle Wachstum der Strahlung erst in der Nähe des Undulatorextrahlers einsetzt. Um trotzdem eine hohe optische Feldstärke zu erreichen, ist es notwendig, das erzeugte elektromagnetische Feld mit Hilfe eines Resonators viele Male mit einem neuen Elektronenpuls in Wechselwirkung zu bringen. Dabei wächst die Feldstärke nach jedem Umlauf um einige Prozent. Andererseits verliert der optische Strahl durch Beugung, unvollständige Reflexion an den Spiegeln, unerwünschte Reflexion bzw. Absorption an anderen Bauteilen oder durch bewusste Auskopplung einen Teil seiner Energie. Halten sich Gewinn und Verlust die Waage, ist ein stabiler Zustand erreicht, der wegen des quasi-kontinuierlichen Betriebes eines supraleitenden Beschleunigers für eine beliebig lange Zeit aufrecht erhalten werden kann.

⁶Wir setzen voraus, dass die Länge des Elektronenpulses deutlich größer als die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle und der Strahl nicht vorbehandelt (gebuncht) ist.

Zur Beschreibung der verschiedenen Arbeitsregime eines FEL wurden recht unterschiedliche Modelle entwickelt. Neben universell anwendbaren Modellen, die auf einer numerischen Lösung der Bewegungsgleichung der Elektronen und der Maxwell-Gleichung für das elektromagnetische Feld beruhen, gibt es einfachere Modelle, die auf ein bestimmtes Regime beschränkt sind. Letztere haben den Vorteil, dass sie einfache Lösungen oft in algebraischer Form liefern und so die Abhängigkeiten von den Ausgangsparametern einfacher studiert werden können. Modelle zur Beschreibung der unterschiedlichen Regime unterscheiden sich in den Näherungen, die bei der Beschreibung der Vorgänge im Undulator gemacht wurden. Zwei Größen bestimmen im Wesentlichen, in welchem Regime der FEL arbeitet. Es sind dies die Intensität I des elektromagnetischen Feldes bzw. der dazugehörige Betrag der Feldstärke \mathcal{E} auf der einen Seite und der Zuwachs (gain, Gewinn) an Intensität während eines Durchlaufes durch den Undulator auf der anderen. Zur Charakterisierung des Zuwachses dient der relative Gewinn an Intensität

$$G = \frac{I_1 - I_0}{I_0} = \frac{\mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_0^2}{\mathcal{E}_0^2}, \quad (6.1)$$

wobei $I_{0,1}$ und $\mathcal{E}_{0,1}$ die Intensität bzw. Feldstärke der elektromagnetischen Strahlung am Anfang (Index 0) bzw. am Ende (Index 1) des Undulators bezeichnen. Der Gewinn kann zwischen einigen Prozenten (*Low-Gain Regime*) und einer Zahl, die viel größer als Eins ist, variieren (*High-Gain Regime*).

Beträgt der Gewinn nur einige Prozent, so kann man die Änderung der optischen Feldstärke während eines Durchlaufes bei der Berechnung der Einwirkung der Welle auf die Elektronen vernachlässigen. Ist außerdem das Feld nicht zu stark, so dass kein Mikrobunching eintritt (*Weak Field*), so ist das Feld am Undulatorausgang proportional zu dem am Eingang. Dieser Fall wird von der Kleinsignal-Verstärkung des Low-Gain Regimes beschrieben. Um den für unsere FEL wichtigen Übergang vom Low- zum High-Gain Regime besser beschreiben zu können, wird noch ein Medium-Gain Regime eingeführt, in dem eine gegenüber dem Low-Gain Regime modifizierte Beschreibung gültig ist.

Mit Hilfe eines Resonators kann man trotz eines geringen Gewinns für einen einmaligen Durchlauf so hohen Feldstärken (*Strong Field*) erreichen, so dass das Mikrobunching noch vor Ende des Undulators auftritt. Dadurch wechselt der FEL nach einer gewissen Anzahl von Umläufen des optischen Strahls in das Regime des exponentiellen Anstiegs und später eventuell in das der Sättigung. Ein Modell, welches einen solchen FEL beschreibt, muss über die Kleinsignal-Verstärkung hinausgehen und fähig sein, das exponentielle Wachstum und die Sättigungsphase zu beschreiben. Ist die Kleinsignal-Verstärkung größer als Eins, beginnt das exponentielle Wachstum bereits beim ersten Durchlauf des optischen Strahls durch den Undulator. In diesem Falle ist die nach der üblichen Formel berechnete Kleinsignal-Verstärkung lediglich ein Hinweis darauf, dass die Verstärkung groß ist. Quantitative Schlüsse können damit nicht gezogen werden.

Zur quantitativen Einteilung in die verschiedenen Arbeitsregime werden in der Literatur unterschiedliche Parameter benutzt. Eine wichtige Rolle spielt der Gewinnfaktor für das Low-Gain Weak-Field Regime [3]

$$g_0 = \frac{4\pi K_{\text{rms}}^2 \lambda_U^2 I_P N_U^3 B_n^2}{\gamma^3 \bar{\Sigma}_{\text{opt}} I_A} \approx 0.9837 \cdot 10^{-2} K_{\text{rms}}^2 \left(\frac{N_U}{E_e [\text{MeV}]} \right)^3 \frac{(\lambda_U [\text{cm}])^2}{\bar{\Sigma}_{\text{opt}} [\text{mm}^2]} I_P [\text{A}] B_n^2 \quad (6.2)$$

mit dem über den Undulator gemittelten Querschnitt $\bar{\Sigma}_{\text{opt}}$ (5.11) des optischen Strahles und dem Abschwächungsfaktor $B_n \equiv B_n(\Theta = 0)$ (4.11). Letzterer resultiert aus der Mittelung über die Oszillationen in der longitudinalen Elektronenbewegung, welche in einem planaren Undulator auftreten [3].

Es zeigt sich, dass der Gewinnfaktor g_0 auch im High-Gain Regime ein wichtiges Charakteristikum ist, da er in enger Relation zur sog. *Gainlänge* l_{gain} (6.34) steht, die ihrerseits ein geeigneter Parameter zur Beschreibung dieses Regimes ist. (Siehe Unterkapitel 6.3.) Alternativ zum Gewinnfaktor g_0 und zur elektrischen rms Feldstärke \mathcal{E} der elektromagnetischen Welle

werden in der Literatur noch der von Colson eingeführte dimensionslose Strom [10]

$$j = 2\pi g_0 \quad (6.3)$$

sowie die ebenfalls dimensionslose (komplexe) Feldamplitude

$$a = \frac{4\pi N_U K_{\text{rms}} B_n L_U}{\gamma^2 m c^2} e \mathcal{E} e^{i\Psi} \quad (6.4)$$

mit dem Betrag

$$|a| \approx 6.421 \frac{N_U K_{\text{rms}} |B_n| L_U [\text{m}]}{E_e [\text{MeV}^2]} \mathcal{E} \left[\frac{\text{MV}}{\text{m}} \right] \quad (6.5)$$

und der Phase Ψ der elektromagnetischen Welle zur Charakterisierung des Arbeitsregimes eines FEL benutzt [10]. Tabelle 6.1 gibt eine grobe Zuordnung dieser Parameter zu den verschiedenen Arbeitsregimen [11]. Danach muss ein Undulator etwa 3 Mal länger als die Gainlänge sein, um im High-Gain Regime zu arbeiten.

	g_0 (6.2)	j (6.3)	L_U/l_{gain} (6.36)	$ a $ (6.4)
Low Gain	< 0.3	< 2	< 1	
Medium Gain	0.3 ... 10	2 ... 60	1 ... 3	
High Gain	> 10	> 60	> 3	
Weak Field				< π
Strong Field				> π

Tabelle 6.1: Parameter zur Charakterisierung eines FEL.

Mit den Parametern aus Tabelle 2.1-2.3 arbeiten die ELBE FEL im unteren Gebiet des Medium-Gain Regimes, während der FEL am S-DALINAC [12] dem Low-Gain Regime zuzuschreiben ist. Auf der anderen Seite arbeitet der von der Los Angeles Universität und dem Kurchatov Institut entwickelte Undulator mit dem Elektronenstrahl vom AFEL Linac am LANL in Los Alamos [13] mit einer single-pass Verstärkung von 10^5 eindeutig im High-Gain Regime. Die Grenzfeldstärke, die das Weak- vom Strong-Field Regime trennt, liegt bei den ELBE FEL in der Größenordnung von einigen MV/m bzw. bei einer Intensität von einigen kW/mm². Diese wird nach 100–300 Umläufen des Strahls durch den Resonator erreicht.

In den anschließenden Unterkapiteln werden die für die einzelnen Regime abgeleiteten algebraischen Näherungsausdrücke vorgestellt und auf die FEL von ELBE angewendet. Im Kapitel 7 werden diese Näherungen dann mit den aus der numerischen Behandlung der FEL Gleichungen gefundenen Lösungen verglichen und somit ihre Anwendbarkeit für die ELBE FEL getestet.

6.1 Low-Gain Regime

Die entscheidende Größe, welche das Low-Gain Regime beschreibt, ist die Kleinsignal-Verstärkung. Man erhält sie aus den FEL Gleichungen in eindimensionaler Näherung (7.5-7.7), wenn man die Änderung des elektromagnetischen Feldes während eines Durchlaufes vernachlässigt ($d(\mathcal{E}e^{i\Psi})/dz \equiv 0$), nur kleine Abweichungen ν_n (4.3) der Elektronenenergie γ von der Resonanzenergie γ_n betrachtet und sich auf kleine Änderungen der Phase θ beschränkt. Außerdem setzt man voraus, dass alle N_e Elektronen eines Pulses gleichförmig über die Phasen θ verteilt sind und somit inkohärent mit der elektromagnetischen Welle wechselwirken [14]. Damit erhält man das 1. Madeyschen Gesetz, nach dem die Kleinsignal-Verstärkung $G_0(\nu_n)$ für einen monoenergetischen Strahl proportional zur Ableitung $g_1(\nu_n)$ der die Linienform der spontanen Emission bestimmenden Funktion (4.2) nach der Energieverstimmung ν_n ist. Der Proportionalitätsfaktor ist der in Gl. (6.2) definierte Gewinnfaktor g_0

$$G_0(\nu) = n g_0 g_1(\nu) \quad (6.6)$$

mit

$$g_1(\nu) = \frac{2\pi}{\nu^3} [2(1 - \cos \nu) - \nu \sin \nu]. \quad (6.7)$$

Da neben ν auch g_0 über den Abschwächungsfaktor \mathcal{B}_n von n abhängt, verzichten wir ab sofort ganz auf den Index n und setzen voraus, dass im konkreten Fall die Ordnung der Harmonischen vorher festgelegt und die betreffenden Größen dafür richtig bestimmt wurden. In den meisten Fällen wird es sich dabei um die 1. Harmonische handeln. Gl. (6.6) beschreibt die bekannte Gainkurve [14], welche antisymmetrisch bezüglich der Energieverstimmung ist und bei $\nu = 0$ den Wert Null hat. Die maximale Verstärkung G_0^{\max} erhält man bei der Wellenlänge (3.2), welche einer Verstimmung

$$\nu_{\text{opt}} \approx 2.606 \quad (6.8)$$

entspricht, zu [15, 16]

$$G_0^{\max} \approx 0.270 n \pi g_0 \approx 0.8482 n g_0 \approx \frac{n}{300} K_{\text{rms}}^2 \left(\frac{N_U}{E_e [\text{MeV}]} \right)^3 \frac{(\lambda_U [\text{cm}])^2}{\Sigma_{\text{opt}} [\text{mm}^2]} \frac{Q [\text{pC}]}{\sigma_t [\text{ps}]} \mathcal{B}_n^2. \quad (6.9)$$

Die Größe G_0 ist wie in Gl. (6.1) als der relative Gewinn an elektromagnetischer Energie definiert, wobei der Index 0 nur als Hinweis dafür dient, dass bei der Berechnung des Gewinns die für schwache Felder und kleine Gewinnfaktoren üblichen Näherungen benutzt wurden [14].

Die Ausdrücke (6.6, 6.9) berücksichtigen keine Pulslängeneffekte und keine Abweichungen der Elektronen von der Undulatorachse (transversale Emittanz) bzw. von der nominalen Energie E_e . Zu deren Berücksichtigung wurden Korrekturfaktoren eingeführt, die hier mit η_{sl} und η_{em} bezeichnet werden. Mit ihrer Hilfe werden der Emittanz-korrigierte Gewinnfaktor

$$g_{\text{ss}} = \eta_{\text{em}} n g_0 \quad (6.10)$$

und die korrigierte Kleinsignal-Verstärkung

$$G_{\text{ss}} = \eta_{\text{sl}} g_{\text{ss}} g_1(\nu) \quad (6.11)$$

definiert.

Die endlichen Längen von optischen und Elektronenpuls und ihre damit verbundene unvollständige Überlappung im Undulator wird durch den Slippage-Korrekturfaktor η_{sl} beschrieben. Er hängt von der Abweichung δL_R der Resonatorlänge (Desynchronisation) vom Wert $L_R = c/(2f_{\text{micro}})$ ab. Es hat sich nämlich gezeigt, dass es günstiger ist, den Resonator um einen Betrag in der Größenordnung der optischen Wellenlänge kürzer zu machen. Da der Lichtpuls etwas länger als der Elektronenpuls ist, ist die Überlappung beider Pulse dennoch gewährleistet. Der Laserpuls läuft wegen seiner größeren Geschwindigkeit im Undulator nach vorn aus dem Elektronenpuls heraus und hat dadurch eine asymmetrische Form mit einer geringeren Stärke am Anfang und einer größeren am Ende. Eine Verkürzung der Resonatorlänge bewirkt nun, dass das "dicke Ende" des Laserpulses auf den Elektronenpuls trifft und dieser sich wegen seiner etwas größeren Geschwindigkeit langsam durch den Elektronenpuls hindurchschiebt. Das sichert eine insgesamt optimale Überlappung. Numerisch wird die Überlappung der beiden Pulse durch einen Überlappungs- oder Slippagefaktor [16]

$$\eta_{\text{sl}} = \frac{\theta_{\text{DSyn}}}{\theta_s} \left(1 - \ln \left[\frac{\theta_{\text{DSyn}}}{\theta_s} \left(1 + \frac{\mu_c}{3} \right) \right] \right) \quad (6.12)$$

mit der empirisch ermittelten Konstanten

$$\theta_s = 0.456, \quad (6.13)$$

dem Slippage-Parameter

$$\mu_c = \frac{N_U n \lambda}{\sigma_z} \quad (6.14)$$

und dem Desynchronisationsparameter

$$\theta_{\text{DSyn}} = \frac{4 \delta L_R}{N_U \lambda \eta_{\text{em}} G_0} \quad (6.15)$$

beschrieben. Abb. 6.1 illustriert die Abhängigkeit des Slippagefaktors (6.12) vom Desynchroni-

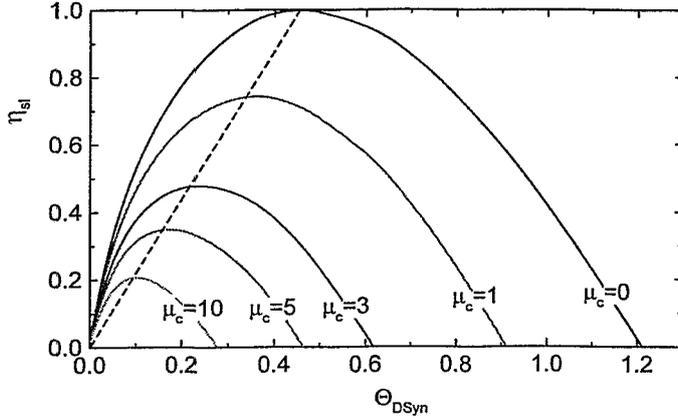


Abbildung 6.1: Slippagefaktor η_{sl} (6.12) in Abhängigkeit vom Desynchronisationsparameter θ_{DSyn} (6.15) für verschiedene Werte des Slippage-Parameters μ_c (6.14). Die gestrichelte Linie verbindet die Punkte optimaler Desynchronisation.

sationsparameter θ_{DSyn} (6.15). Der Slippagefaktor besitzt ein Maximum

$$\eta_{\text{sl}}^{\text{max}} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_c}{3}} \quad (6.16)$$

bei der optimalen Desynchronisation (gestrichelte Linie in Abb.6.1)

$$\delta L_R^{\text{opt}} = \frac{\theta_s \eta_{\text{em}} G_0 N_U \lambda}{4 \left(1 + \frac{\mu_c}{3}\right)}. \quad (6.17)$$

Der maximale Slippagefaktor (6.16) verringert sich mit wachsendem Slippage-Parameter μ_c . Er reduziert die Verstärkung merklich, wenn die Pulslänge σ_z kleiner als die Slippage-Länge $n N_U \lambda$ ist. Letztere bezeichnet die Distanz um die der optische Puls wegen seiner größeren Geschwindigkeit dem Elektronenpuls im Undulator vorausläuft

Die Empfindlichkeit der Verstärkung gegenüber einer Änderung der Resonatorlänge hängt ebenfalls von der Slippage-Länge ab. Reduziert man z. B. den Desynchronisationsparameter θ_{DSyn} auf die Hälfte des Optimalwertes, was einer Verringerung der Desynchronisation δL_R auf die Hälfte ihres optimalen Wertes (6.17) entspricht, so verringert sich der Slippagefaktor auf etwa die Hälfte seines jeweiligen Maximalwertes. Die gleiche Reduktion erhält man bei einer Vergrößerung der Desynchronisation auf das $1\frac{1}{2}$ -fache des Optimalwertes.

Abb. 6.2 zeigt die nach Gl. (6.17) bestimmte optimale Desynchronisation berechnet mit den Parametern aus den Tabellen 2.1-2.3 und der Kleinsignal-Verstärkung aus Abb. 6.3. Sie liegt in der Größenordnung der Wellenlänge der erzeugten Strahlung und variiert zwischen 0 und 100 μm . Die Größe der Desynchronisation des Resonators muss der jeweiligen Verstärkung angepasst werden. Verlängert man z. B. bei konstanter Gesamtladung die Länge des Elektronenpulses, so verringern sich Peakstrom und Slippage-Parameter, was sich in entgegengesetzter Weise auf die Kleinsignal-Verstärkung auswirkt. Ingesamt überwiegt der reduzierende Effekt des verringerten Peakstromes, so dass auch der optimalen Werte (6.17) der Desynchronisation kleiner ausfällt. Bei Pulsen, die um einen Faktor 3 länger sind, beträgt die Reduktion etwa einen Faktor 2.

Der Reduktionsfaktor η_{em} in der korrigierten Kleinsignal-Verstärkung (6.11) berücksichtigt die endliche Energieschärfe (σ_e) und die transversale Emittanz (ϵ_n) des Elektronenstrahls. Hier sind zwei Ansätze verbreitet: die Formeln von Dattoli et al. [18, 19, 20], wie sie in den Rechnungen von FELIX [21, 22] benutzt werden, und der verbesserte Korrekturfaktor, wie er im MATHCAT

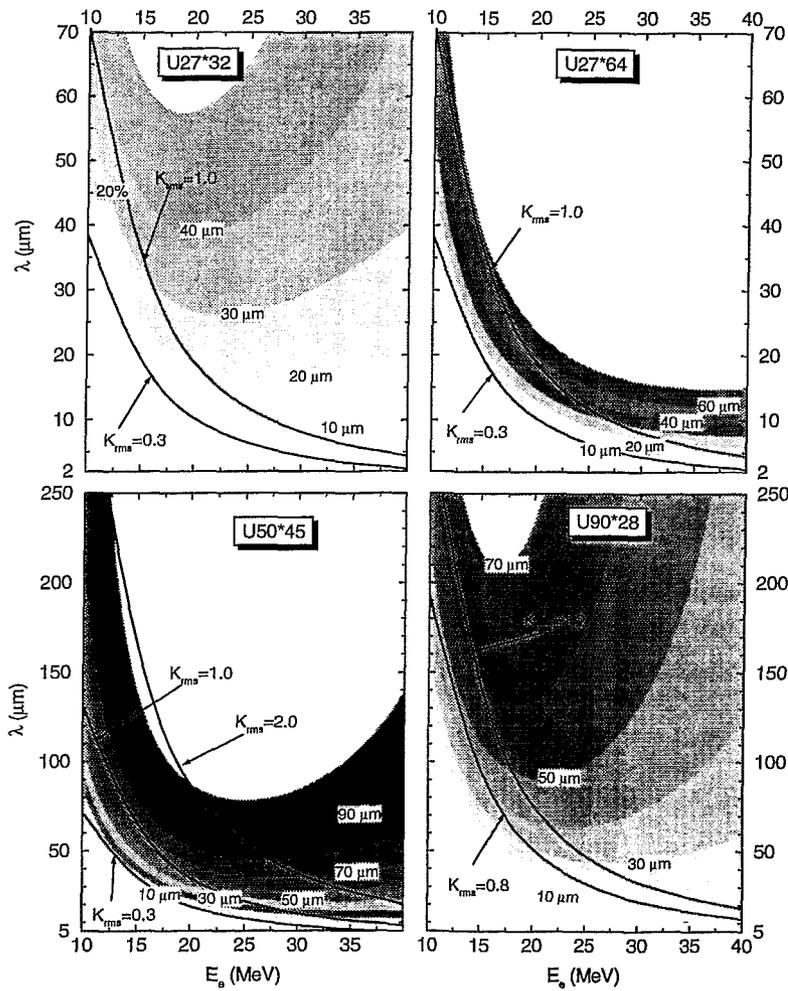


Abbildung 6.2:
 Optimale Desynchronisation δL_R^{opt} (6.17)
 in Abhängigkeit von
 Elektronenenergie E_e
 und Wellenlänge λ der
 erzeugten Strahlung für die 4
 betrachteten Undulatoren
 berechnet mit der Kleinsignal-
 Verstärkung von
 Abb. 6.3.

worksheet von Nguyen et al. [23] mit den Erweiterungen von Benson [24, 25] verwendet wird. Im ersten Falle besteht η_{em} aus dem Produkt

$$\eta_{em} = \eta_E \eta_x \eta_y \quad (6.18)$$

mit jeweils einem Korrekturfaktor für die Energieunschärfe

$$\eta_E = \left(1 + 1.7(n\mu_E)^2\right)^{-1} \quad \text{mit} \quad \mu_E = 4N_U \frac{\sigma_E}{E_e} \quad (6.19)$$

und für die transversale Emittanz

$$\eta_{x,y} = \left(1 + (n\mu_{x,y})^2\right)^{-1} \quad \text{mit} \quad \mu_y = 2N_U k_U \epsilon_n \frac{K_{rms}}{1 + K_{rms}^2} \quad \text{und} \quad \mu_x = \frac{\mu_y}{\sqrt{2}} \quad (6.20)$$

jeweils für die Undulatorebene (y) und die Wiggelebene (x). Die Korrekturfaktoren (6.20) wurden für einen in der Taille runden Strahl abgeleitet. Die Strahlbreite in y -Richtung wurde mit $\sigma_y = \sqrt{\lambda_U \epsilon_n / (4\pi K_{rms})}$ so gewählt, dass die aus der Emittanz resultierende inhomogenen Linienverbreiterung der spontanen Strahlung minimal ist. Ein Strahl, dessen Einhüllende trotz der Betatronschwingungen in y -Richtung einen konstanten Radius hat ('matched beam'), ist um einen Faktor $\sqrt{2}$ dicker, und das dazugehörige μ_y ist etwa 1.5 mal größer als der nach Gl. (6.20) berechnete Wert. Während die Slippage-Korrektur (6.12) für alle Harmonischen gleich ist, wachsen die Korrekturen für Energieunschärfe (6.19) und Emittanz (6.20) mit der Ordnung n der Strahlung.

In Refs. [24, 25] wird der alternative Korrekturfaktor

$$\eta_{\text{em}} = \frac{2\pi}{0.8482} \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha(1-\alpha) e^{-\frac{\alpha^2 \sigma_I^2}{2}} \sin\left(\alpha\nu - \frac{\arctan(a_x \alpha) + \arctan(a_y \alpha)}{2}\right)}{\sqrt[4]{[1+(a_x \alpha)^2][1+(a_y \alpha)^2]}} \quad (6.21)$$

mit

$$\sigma_I = 4n\pi N_U \frac{\sigma_E}{E_e} \quad a_{x,y} = \frac{2\pi \epsilon_n L_U}{\beta_{x_0,y_0} \gamma \lambda} \quad (6.22)$$

verwendet, der gleichzeitig den Einfluss von endlicher Energieschärfe und transversaler Emittanz berücksichtigt. Die Größe β_{x_0,y_0} ist der Wert der Betafunktion in der Taille des Elektronenstrahls. Die Betafunktion beschreibt die Einhüllende des Strahls gemäß $\sigma_x(z) = \sqrt{\beta_x(z) \epsilon_n / \gamma}$. Die Betafunktion für die x - und y -Richtung werden durch die elektronenoptischen Elemente vor und im Undulator bestimmt. Haben wir einen in y -Richtung angepassten Strahl, so muss gelten [26, 27]

$$\beta_y(z) \equiv \beta_{y_0} = \frac{\gamma \lambda_U}{2\pi K_{\text{rms}}}, \quad (6.23)$$

was durch eine entsprechende Quadrupollinse vor dem Eingang in den Undulator realisiert werden muss. Die Ausdehnung des Strahls in y -Richtung hat damit den konstanten Wert $\sigma_y = \sqrt{\beta_{y_0} \epsilon_n / \gamma} = \sqrt{\epsilon_n / (k_U K_{\text{rms}})}$. In x -Richtung üben die Undulatormagnete keine fokussierende Wirkung aus. Wir nehmen an, dass der Strahl durch einen Quadrupol auf die Mitte des Undulators fokussiert wird. Er wird durch eine z -abhängige Betafunktion

$$\beta_x(z) = \beta_{x_0} \sqrt{1 + z^2 / \beta_{x_0}^2}, \quad (6.24)$$

beschrieben. Die Größe β_{x_0} ist frei wählbar. Will man im Fokus einen runden Strahl haben, so muss man

$$\beta_{x_0} = \beta_{y_0} \quad (6.25)$$

wählen.

Der z -abhängige effektive Querschnitt des Elektronenstrahls ist gegeben durch

$$\Sigma_e(z) = 2\pi \sigma_x(z) \sigma_y(z) = 2\pi \epsilon_n \sqrt{\beta_x(z) \beta_y(z)} = 2\pi \epsilon_n \sqrt{\beta_{x_0} \beta_{y_0} (1 + z^2 / \beta_{y_0}^2)}, \quad (6.26)$$

wobei wir angenommen haben, dass sie Elektronen gaussförmig über den Strahlquerschnitt verteilt sind. Die optimale Verstimmung, bei der der Lasergewinn maximal ist, unterscheidet sich für einen Strahl mit endlicher emittanz etwas vom Wert (6.8) und ist gegeben durch

$$\nu_{\text{opt}}^{\text{corr}} \approx 2.606 e^{-0.526 \sigma_I} + 1.07 \sigma_I + \left(2 + \frac{\sigma_I}{5}\right) \left(\frac{a_x}{a_x + 3} + \frac{a_y}{a_y + 3}\right). \quad (6.27)$$

Bei der Berechnung des effektiven Querschnittes $\bar{\Sigma}_{\text{opt}}$ des optischen Strahles im Ansatz von Benson wird seine lokale Überlappung mit dem Elektronenstrahl berücksichtigt (lokaler Fillingfaktor), und der gemittelte Strahlquerschnitt (5.11) wird ersetzt durch

$$\bar{\Sigma}_{\text{opt}} = \left[1 + \frac{1}{7} \left(\frac{L_U}{2z_R}\right)^2\right] \frac{1}{\frac{2}{L_U} \int_0^{L_U/2} dz [\Sigma_e(z) + \Sigma_{\text{opt}}(z)]^{-1}} \quad (6.28)$$

mit den z -abhängigen Querschnitten (6.26) und (5.9) von Elektronen- und optischen Strahl. Der Faktor vor dem Integral beschreibt die reduzierende Wirkung der Guoy-Phase (5.6) auf den Lasergewinn. Im Kapitel 7 wird die Gültigkeit der Korrekturfaktoren für einen Strahl endlicher Energieschärfe aber verschwindender transversaler Emittanz für die FEL von ELBE mit Hilfe von Simulationsrechnungen getestet.

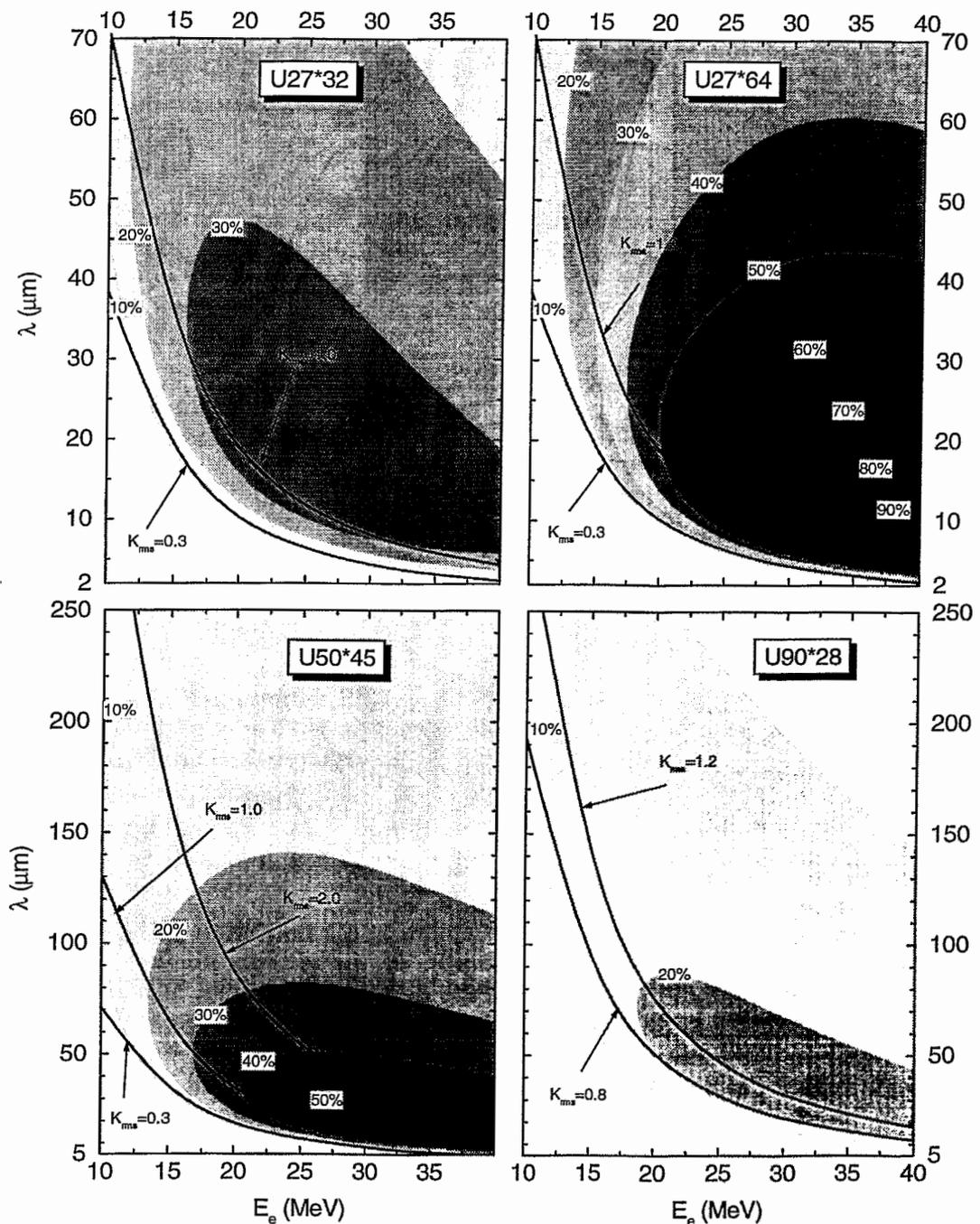


Abbildung 6.3: Korrigierte Kleinsignal-Verstärkung (6.11) bei optimaler Desynchronisation (6.17) und Energieverstimmung (6.8) für die 4 untersuchten Undulatoren in Abhängigkeit von Elektronenenergie E_e und Wellenlänge λ der erzeugten Strahlung berechnet mit den Korrekturtermen von Benson [24, 25].

Die Abbildungen 6.3 und 6.4 zeigen die nach der letzteren Methode berechnete korrigierte Kleinsignal-Verstärkung (6.11) für die 1. und 3. Harmonischen und die 4 untersuchten Undulatorvarianten. Die Ergebnisse sind um 10-30% kleiner als die mit Hilfe des Korrekturfaktors (6.18) berechneten Werte. Neben Gleichung (3.1) für die Resonanzwellenlänge stellt die Kleinsignal-Verstärkung eine mögliche Begrenzung für die Wellenlänge der zu erzeugenden Laserstrahlung

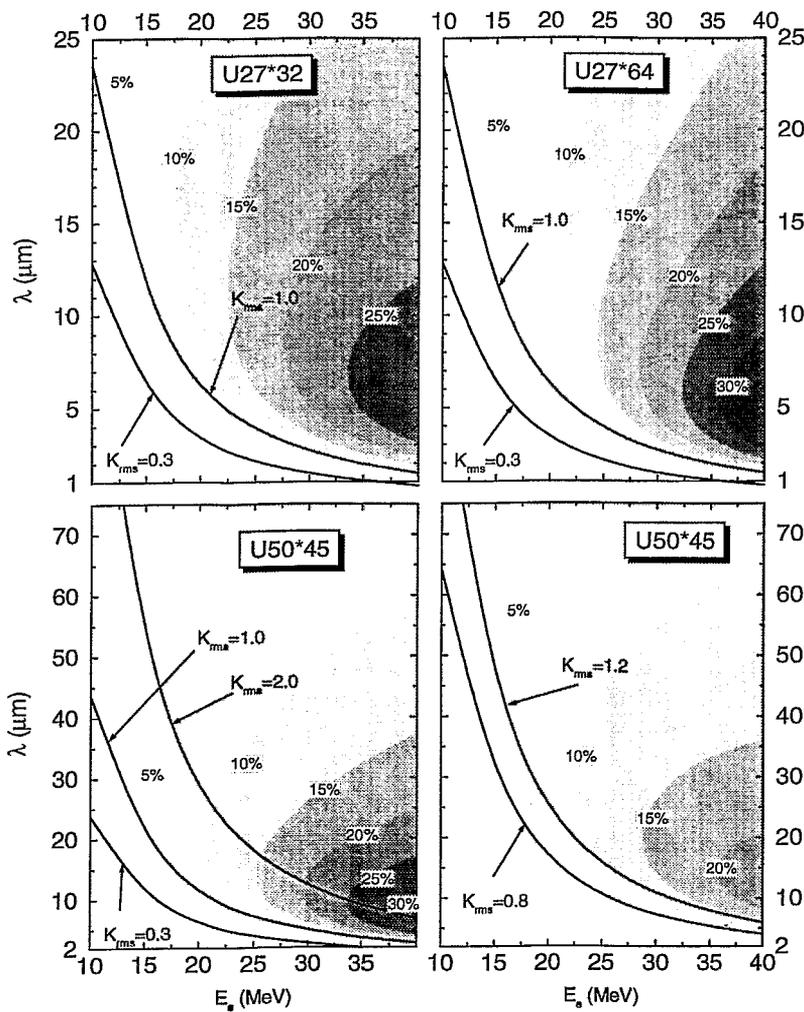


Abbildung 6.4: Dasselbe wie in Abb. 6.3 für die 3. Harmonische.

dar, da bei Werten unterhalb von etwa 10% die auftretenden Verluste kaum kompensiert werden können und der Laser somit gar nicht anläuft.

6.2 Medium-Gain Regime

Ist der Gewinnfaktor g_0 (6.2) größer als etwa 20% so ist Gl. (6.6) durch die Potenzreihe

$$G_{\text{med}}(\nu) = \eta_{\text{sl}} \left(g_{\text{ss}} g_1(\nu) + g_{\text{ss}}^2 g_2(\nu) + g_{\text{ss}}^3 g_3(\nu) \right) \quad (6.29)$$

mit der Funktion g_1 (6.7) und den weiteren Funktionen

$$g_2(\nu) = \frac{\pi^2}{3\nu^6} \left[84(1 - \cos \nu) - 60\nu \sin \nu + \nu^2(3 + 15 \cos \nu + \nu \sin \nu) \right] \quad (6.30)$$

$$g_3(\nu) = \frac{\pi^3}{60\nu^9} \left[11520(1 - \cos \nu) - 9000\nu \sin \nu + 360\nu^2 + 2880\nu^2 \cos \nu + 480\nu^3 \sin \nu - 20\nu^4(1 + 2 \cos \nu) - \nu^5 \sin \nu \right] \quad (6.31)$$

zu ersetzen [16]. Abb. 6.5 zeigt die Beiträge von g_1 , g_2 und g_3 für eine Verstärkung $g_0 = 200\%$. Im Gegensatz zur Gainkurve (6.6), die antisymmetrisch ist, enthält (6.29) mit g_2 eine bzgl. ν symmetrische Komponente, die dafür sorgt, dass auch bei verschwindender Energieverstimmung ein endlicher Gewinn vorhanden ist. Als Obergrenze für die Anwendbarkeit von Gl. (6.29) wurde

$g_0 = 10$ angegeben [16]. Im Unterkapitel 7.1 wird die Gültigkeit von Gl. (6.29) für ELBE durch Vergleich mit Ergebnissen von Simulationsrechnungen getestet.

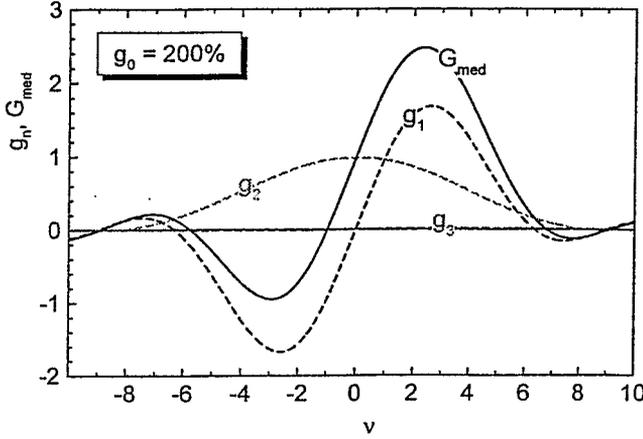


Abbildung 6.5: Beiträge (gestrichelte Linien) von g_1 (6.7), g_2 (6.30) und g_3 (6.31) zur Gewinnkurve G_{med} (6.29) im Medium-Gain Regime bei einem Gewinnfaktor $g_0 = 200\%$.

Das Maximum der Gainkurve verschiebt sich im Medium-Gain Regime ein wenig zu einer etwas geringeren Verstimmung ν . Ihr Maximalwert ist gegeben durch

$$G_{\text{med}}^{\text{max}} = \eta_{\text{sl}} \left(0.849 g_{\text{ss}} + 0.1916 g_{\text{ss}}^2 + 0.00188 g_{\text{ss}}^3 \right) \quad (6.32)$$

mit dem in Gl. (6.10) definierten Gewinnfaktor g_{ss} . Da dieser für ELBE stets weit unter 200% liegt, ist der letzte Term in Gl. (6.32) vernachlässigbar. Die Gültigkeit der Näherungsausdrücke (6.29) und (6.32) wird im Unterkapitel 7.2 mittels Simulationsrechnungen getestet. Für Gewinnfaktoren $g_{\text{ss}} \ll 1$ geht G_{med} in G_{ss} über, so dass die Ausdrücke (6.29, 6.32) für beide Regime verwendet werden können.

6.3 High-Gain Regime

Im High-Gain Regime dominiert das Mikrobunching und die Elektronen eines Pulses wirken fast im gesamten Undulator kohärent auf das elektromagnetische Feld ein. Dadurch ist der Energietransfer auf das Feld um Größenordnungen stärker als im Low-Gain Regime und die Amplitude der elektromagnetischen Welle verändert sich beim Lauf durch den Undulator ebenfalls um Größenordnungen. Sie kann deshalb weder als konstant noch als kleine Störung angesehen werden. Der sich wechselseitig beschleunigende Prozess des Mikrobunching und der Verstärkung der elektromagnetischen Welle führt zu einem exponentiellen Wachstum des Feldes, was solange andauert, bis alle Elektronen eines Pulses annähernd die gleiche Phasenlage zur Welle haben. Das ist theoretisch dann der Fall, wenn der Puls in einzelne Scheiben zerfallen ist, die sich im Abstand der optischen Wellenlänge durch den Undulator bewegen. In der Praxis wird dieser Zustand durch die Coulomb-Abstoßung verhindert und das exponentielle Wachstum endet bereits vorher.

Obwohl keiner der Undulatoren von ELBE das High-Gain Regime erreichen wird, so ist es doch nützlich, sich mit den Grundbegriffen dieses Regimes vertraut zu machen. Zum einen stehen die im High-Gain Regime eingeführten Parameter in enger Beziehung zu Parametern des Low- oder Medium-Gain Regimes, zum anderen sind sie hilfreich bei einer Untersuchung der Frage, welche Veränderungen an Undulator und Elektronenquelle man mit dem Ziel einer Erhöhung des Lasergewinns in Richtung des High-Gain Regimes vornehmen müsste.

Zur Beschreibung des High-Gain Regimes ist es üblich den FEL oder Pierce Parameter

$$\rho = \frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{e K_{\text{rms}} B_n}{4k_U} \right)^2 \frac{n_e \mathcal{F}}{\epsilon_0 m c^2} \right]^{1/3} = \frac{1}{\gamma} \left[\left(\frac{K_{\text{rms}} B_n}{4\pi} \right)^2 \frac{\lambda_U^2}{2\sigma_x \sigma_y} \mathcal{F} \frac{I_p}{I_A} \right]^{1/3} \quad (6.33)$$

$$\approx 0.01838 \frac{1}{E_e[\text{MeV}]} \left[K_{\text{rms}}^2 B_n^2 \frac{(\lambda_U[\text{cm}])^2}{\Sigma_{\text{opt}}[\text{mm}^2]} \frac{Q[\text{pC}]}{\sigma_t[\text{ps}]} \right]^{1/3}$$

zu benutzen. Die Stärke des exponentiellen Wachstums wird dann durch die *Gainlänge*

$$l_{\text{gain}} = \frac{\lambda_U}{4\pi\rho} \quad (6.34)$$

beschrieben. Sie bezeichnet diejenige Strecke im Undulator, auf der unter der Bedingung eines exponentiellen Wachstums die Intensität $I(z)$ des optischen Strahles um einen Faktor $e^{\sqrt{3}} \approx 6$ wächst

$$I(z) \sim e^{\sqrt{3}z/l_{\text{gain}}}. \quad (6.35)$$

Dabei hat es sich gezeigt, dass die Elektronen etwa eine Gainlänge bis zum Eintritt in die exponentielle Wachstumsphase benötigen und nach etwa 10 Gainlängen in die Sättigung kommen. Wichtig für die Charakterisierung eines FEL ist das Verhältnis der Gainlänge zur Gesamtlänge L_U des Undulators. Dieses steht in enger Relation zum Gewinnfaktor (6.2) des Low-Gain Regimes

$$\left(\frac{L_U}{l_{\text{gain}}} \right)^3 = (4\pi N_U \rho)^3 = \pi g_0 = \frac{j}{2}. \quad (6.36)$$

Tabelle 6.2 zeigt den Variationsbereich von FEL Parameter (6.33) und Gainlänge (6.34) für die an ELBE vorgesehenen Undulatoren.

Undulator	ρ	l_{gain} [m]	L_U/l_{gain}
U27×32	0.002...0.004	1.3...0.5	0.7...1.8
U27×64	0.001...0.004	1.6...0.6	1.1...2.8
U50×45	0.002...0.004	2.6...0.9	0.9...2.5
U90×28	0.003...0.005	2.5...1.4	1.0...1.8

Tabelle 6.2: FEL Parameter ρ (6.33) und Gainlänge l_{gain} (6.34) für die ELBE FEL. Die Variation von ρ und l_{gain} entspricht den in den Tabellen 2.1 und 2.2 angegebenen minimalen und maximalen Werten von Elektronenenergie E_e und Undulatorparameter K_{rms} .

Ein geeignetes Maß zur Bestimmung, in welchem Regime ein FEL arbeitet, ist das Verhältnis L_U/l_{gain} . Ist es kleiner oder in der Nähe von Eins, so arbeitet der FEL im Low-Gain Regime und er wird durch die Kleinsignal-Verstärkung hinreichend gut beschrieben. Ist das Verhältnis größer als etwa Zwei, so wächst zumindest im letzten Abschnitt des Undulators die optische Feldstärke exponentiell und damit stärker als nach der Kleinsignal-Verstärkung vorhergesagt. Nach Tabelle 6.2 können der U27×64 und der U50×45 Undulator die Phase des exponentiellen Wachstums erreichen, und man muss von der Beschreibung durch die Kleinsignal-Verstärkung (6.9) zur Verstärkung (6.32) des Medium-Gain Regimes übergehen. Das wirkliche High-Gain Regime, in dem die Gleichungen des Medium-Gain Regimes versagen, beginnt bei $L_U/l_{\text{gain}} \lesssim 3$. Für eine quantitative Beschreibung des High-Gain Regime unter realistischen Umständen verwendet man in der Regel Simulationsrechnungen oder löst die Vlassov-Gleichungen näherungsweise [28].

6.4 Sättigung der Intensität des optischen Feldes

Bei einem FEL mit einem optischen Resonator, der den Strahl viele Male in den Undulator zurück reflektiert, kann die Intensität des elektromagnetischen Feldes auch bei einer relativ geringen Verstärkung nach hinreichend vielen Umläufen sehr große Werte erreichen. Damit ist die Möglichkeit eines Übergangs vom Weak- zum Strong-Field Regime gegeben. Letzteres wird durch eine gegenüber der Kleinsignal-Verstärkung G_0 gemäß

$$G(I) = G_0 \eta_{\text{sat}}(I) \quad (6.37)$$

reduzierten Verstärkung charakterisiert. Der Korrekturfaktor η_{sat} (Sättigungsfunktion) hängt von der Intensität I der Strahlung im Undulator ab und kann für eine nicht zu große Kleinsignal-Verstärkung durch die Funktion

$$\eta_{\text{sat}} = \frac{1 - e^{-\beta_{\text{sat}} I/I_{\text{sat}}}}{\beta_{\text{sat}} I/I_{\text{sat}}} \quad \text{mit} \quad \beta_{\text{sat}} = 1.0145 \pi/2 \quad (6.38)$$

mit der Sättigungsintensität

$$\begin{aligned} I_{\text{sat}} &= \frac{m^2 c^4}{8\pi\alpha\hbar} \left(\frac{\gamma}{N_U}\right)^4 \frac{1}{(\lambda_U K_{\text{rms}} n B_n)^2} \\ &\approx 50.82 \frac{\text{MW}}{\text{mm}^2} \left(\frac{E_e[\text{MeV}]}{N_U}\right)^4 \frac{1}{(\lambda_U[\text{cm}] K_{\text{rms}} n B_n)^2} \end{aligned} \quad (6.39)$$

beschrieben werden [3, 30]. Die Sättigungsintensität bezeichnet denjenigen Wert der Intensität, bei dem die Sättigungsfunktion (6.38) vom Wert 1 bei $I = 0$ auf $1/2$ gesunken ist. Die Sätti-

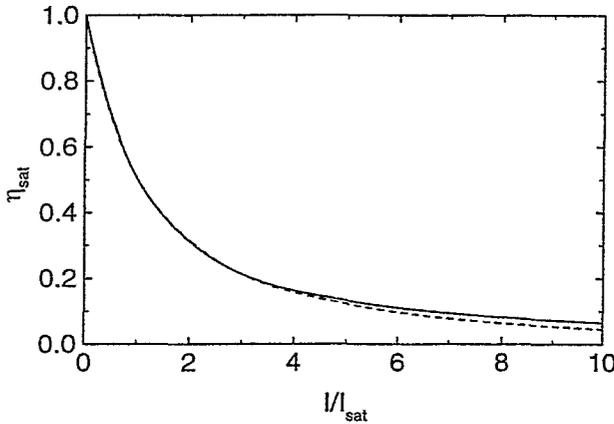


Abbildung 6.6: Sättigungsfunktionen (6.38) (durchgezogene Linie) bzw. (6.40) (gestrichelte Linie) in Abhängigkeit vom Verhältnis der Intensität I des optischen Strahles zur Sättigungsintensität I_{sat} (6.39).

gungsintensitäten für die 4 Undulatoren von ELBE können für die 1. und 3. Harmonische den Abbn. 6.7 und 6.8 entnommen werden.

Alternativ zu (6.38) wird in der Literatur [24] für die Sättigungsfunktion auch die Näherung

$$\eta_{\text{sat}} = \left[1 + \frac{I}{I_{\text{sat}}} - \alpha_{\text{sat}} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \left(1 - \frac{I}{I_{\text{sat}}}\right)\right]^{-1} \quad \text{mit} \quad \alpha_{\text{sat}} = 0.140 \quad (6.40)$$

verwendet Beide Ausdrücke unterscheiden sich um weniger als 0.02 voneinander (Abb 6.6).

Die Sättigungsintensität (6.39) wächst mit der Elektronenenergie und sinkt mit wachsender Länge des Undulators. So ist die theoretisch erreichbare maximale optische Intensität beim $U27 \times 32$ trotz einer geringeren Kleinsignal-Verstärkung (vergleiche Abb. 6.3) größer als bei der Variante mit 64 Perioden (Siehe Kapitel 8). Im folgenden Kapitel wird die Beschreibung der Sättigung der Laserverstärkung durch Gln. (6.37-6.40) anhand von Simulationsrechnung auf ihre Eignung für die ELBE FEL getestet.

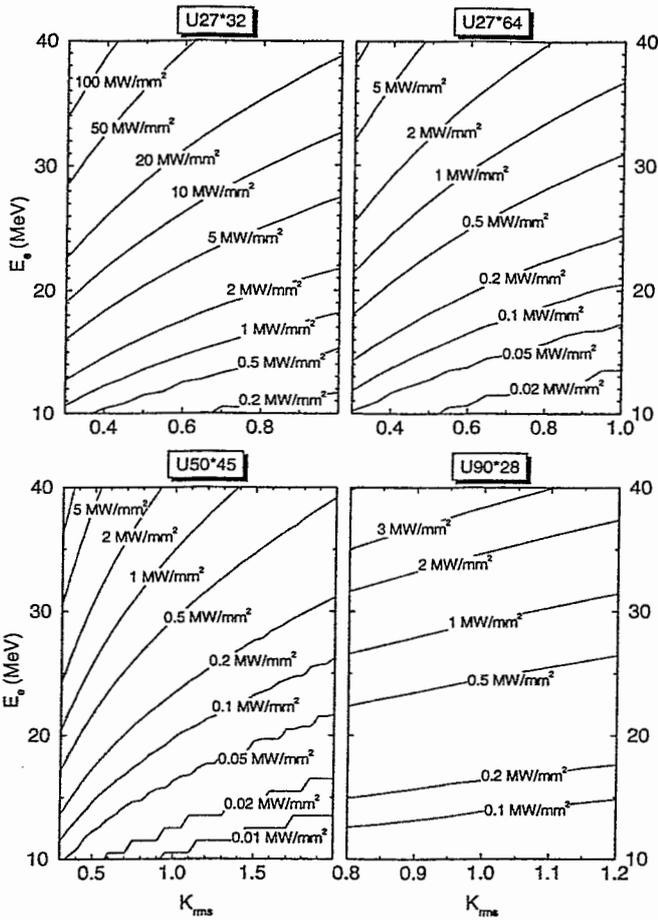
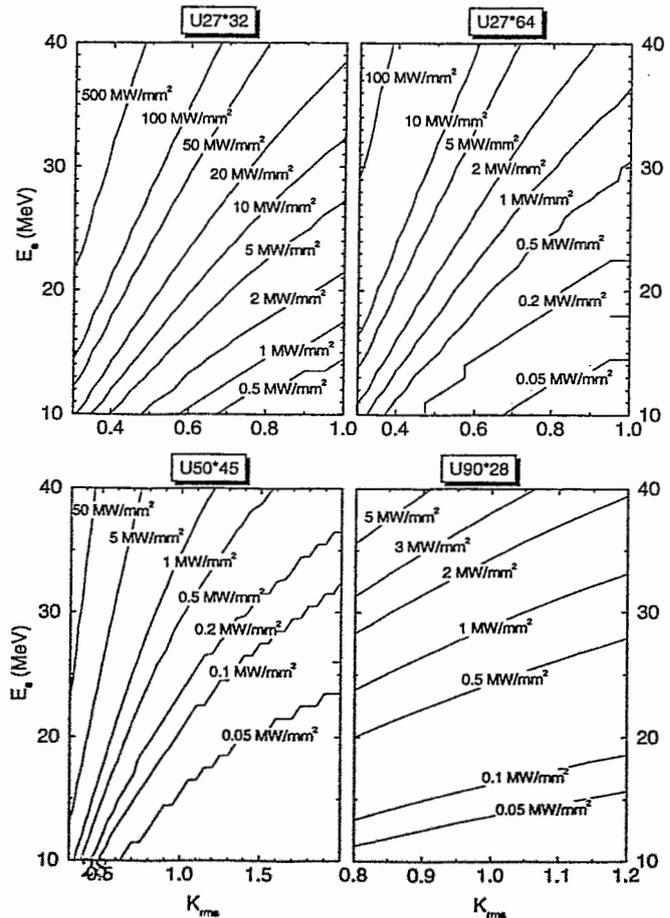


Abbildung 6.7: Sättigungsintensität I_{sat} (6.39) in Abhängigkeit von Elektronenenergie E_e und Undulatorparameter K_{rms} für die untersuchten Undulatoren. (Der z. T. stufenförmige Verlauf der Kurven ist ein Artefakt des verwendeten Zeichenprogrammes.)

Abbildung 6.8: Dasselbe wie in Abb. 6.7 für die 3. Harmonische.



7 Eindimensionale Simulationsrechnungen

In diesem Kapitel testen wir alle diejenigen im vorhergehenden Kapitel vorgestellten und angewendeten Näherungsausdrücke auf der Grundlage physikalischer Grundgleichungen, die im Rahmen eines eindimensionalen Modells beschrieben werden können. Im Einzelnen handelt es sich dabei um die Gleichungen (6.6, 6.11) bzw. (6.29) für den Zuwachs an elektromagnetischer Intensität bei einem Durchlauf durch den Undulator in Abhängigkeit von der Energieverstärkung, um die Abhängigkeit dieses Zuwachses von der Energieunschärfe des Elektronenstrahls, wie sie durch die Gln. (6.18-6.24) beschrieben wird, und um das Sättigungsverhalten, modelliert durch Gln. (6.37-6.40). Nicht untersucht werden können im Rahmen eindimensionaler Modelle die Einflüsse transversaler Eigenschaften wie transversale Emittanz und Strahlprofil. Ebenfalls ungeprüft bleiben die Ansätze (6.12-6.16) zur Beschreibung der Slippage-Korrektur zur Verstärkung des FEL, da das verwendete Modell von einem unendlich langen Elektronenstrahl ausgeht.

Mit dem Ziel, die o. g. Näherungsausdrücke zu testen, berechnen wir mittels numerischer Verfahren die Intensität des elektromagnetischen Feldes und die Bahn einzelner Elektronen, wie sie sich aus der Wechselwirkung mit dem Magnetfeld des Undulators und der elektromagnetischen Welle ergeben. Dabei beschränken wir uns hier auf einen einzelnen Durchlauf (*single pass*) durch den Undulator unter der Annahme eines bestimmten Anfangswertes \mathcal{E}_0 der Stärke des elektromagnetischen Feldes am Undulatoreingang. Die wiederholte Wechselwirkung eines optischen Pulses mit einem Elektronenpuls wird im anschließenden Kapitel behandelt. Für den Zusammenhang zwischen (rms) Feldstärke \mathcal{E} und Intensität I der elektromagnetischen Welle verwenden wir den Ausdruck für eine ebene Welle im Vakuum

$$I = \epsilon_0 c \mathcal{E}^2 \approx 2.654 \left(\mathcal{E} \left[\frac{\text{MV}}{\text{m}} \right] \right)^2 \frac{\text{kW}}{\text{mm}^2}. \quad (7.1)$$

Die Intensität ist eine über die Wellenlänge gemittelte Energiestromdichte, die für eine ebene Welle in jedem Raumpunkt den gleichen Wert hat. Um die Gesamtleistung eines transversal begrenzten Strahls zu bestimmen, multiplizieren wir die Intensität mit der effektiven Querschnittsfläche (5.9). Die Gesamtenergie eines Pulses erhalten wir durch Multiplikation mit der Pulsdauer $\sqrt{2\pi} \sigma_t$.

Die Grundlage für die hier durchgeführten Rechnung bildet die Bewegungsgleichung für geladene Teilchen (Lorentz Gleichung) und elektromagnetische Felder (Maxwell Gleichungen). Wegen der großen Anzahl miteinander und mit der Welle wechselwirkender Elektronen ($\approx 10^9$) in einem Puls würde ihre explizite Beschreibung auf eine unbeherrschbar große Anzahl gekoppelter Differentialgleichungen führen. Als realistische Alternative bietet sich die Beschreibung der Elektronen eines Pulses durch eine Verteilungsfunktion an, für die dann die entsprechende kinetische Gleichung (Vlassow-Gleichung) gelöst werden muss [28]. Da die kinetischen Gleichungen auch nur mit zum Teil recht groben Näherungen gelöst werden können, bevorzugen wir die *Methode der Pseudo- oder Test-Teilchen*, bei der die Menge der Elektronen durch eine wesentlich geringere Zahl von Test-Teilchen ersetzt wird, die den gesamten Puls im statistischen Sinne representieren und deren gekoppelte Bewegungsgleichungen in beliebiger Genauigkeit gelöst werden können. Eine solche Rechnung wird auch als *Simulationsrechnung* bezeichnet.

Die Anzahl der Test-Teilchen, die für eine representative Beschreibung eines Elektronenpulses notwendig ist, hängt wesentlich von den Details ab, die man durch die Menge der Test-Teilchen representiert haben will oder muss. Im einfachsten Falle eines monoenergetischen Strahls ohne Emittanz und ohne longitudinale und transversale Abhängigkeiten genügen einige 100 Test-Teilchen, die gleichmäßig über eine Wellenlänge des elektromagnetischen Feldes verteilt sind. Um eine bestimmte Energie- oder Winkelverteilung bzw. eine bestimmte Form des Elektronenpulses zu beschreiben, ist eine wesentlich größere Anzahl von Test-Teilchen nötig.

Inhalt einer Simulationsrechnung ist die selbstkonsistente Lösung der Bewegungsgleichungen für eine geeignete Anzahl N_e von Test-Elektronen im Feld von Undulator und elektromagneti-

scher Welle bei gleichzeitiger Bindung des elektromagnetischen Feldes an den vom Elektronenstrahl erzeugten Strom mit Hilfe der Maxwell Gleichungen. Dabei gehen wir über die bei der Ableitung der Kleinsignal-Verstärkung gemachten Annahme eines konstanten elektromagnetischen Feldes hinaus und betrachten dessen Veränderung während des Durchlaufes der Elektronen durch den Undulator. Damit ist diese Methode zur Beschreibung aller hier vorgestellten Arbeitsregime geeignet. Ansonsten werden im Rahmen einer eindimensionalen Beschreibung jede transversale Abhängigkeit von Elektronenstrahl und optischer Welle sowie deren endliche Länge vernachlässigt⁷. Eine ausführliche Ableitung der folgenden Gleichungen kann in Referenz [14] gefunden werden.

Da die Lorentzkraft zwischen dem Elektron und der Welle nur von der relativen Phase zwischen transversaler Elektronenoszillation und Schwingung des elektromagnetischen Feldes abhängt wird als dynamische Variable des j -ten Elektrons die Phase

$$\theta_j = (k + nk_U)z_j - \omega t \quad (j = 1 \dots N_e) \quad (7.2)$$

eingeführt. Hierbei ist z_j die z -Koordinate (siehe Anhang A.2) des Elektrons und n die Ordnung derjenigen Harmonischen der elektromagnetischen Welle, mit der das Elektron wechselwirkt⁸. Die Variable θ_j ist periodisch mit dem Interval $(0, 2\pi)$ und definiert die z -Koordinate des Elektrons nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches der Länge $\Delta z = (1/\lambda + n/\lambda_U) \approx \lambda$. Wir benutzen das Interval $-\pi/2 \leq \theta_j < 3/2\pi$.

Als zu θ_j konjugierte Variable dient der Lorentzfaktor γ_j der Energie E_j dieses Elektrons. Für eine intensive Wechselwirkung mit einer elektromagnetischen Welle mit der Wellenlänge λ muss die Elektronenenergie in der Nähe einer der Resonanzenergien

$$E_n = \gamma_n mc^2 \quad \text{mit} \quad \gamma_n^2 = \frac{1 + K_{\text{rms}}^2 \lambda_U}{2n \lambda} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (7.3)$$

liegen.

Das elektromagnetische Feld wird in eindimensionaler Näherung durch eine sich in z -Richtung ausbreitende (sowohl transversal als auch longitudinal unendlich ausgedehnte) ebene Welle beschrieben, die linear in x -Richtung polarisiert und durch ihre rms Amplitude \mathcal{E} und ihre Phasenverschiebung Ψ eindeutig charakterisiert ist. Wir verwenden eine Welle mit dem elektrischen Feldvektor⁹

$$\mathcal{E}(z, t) = \mathcal{E} \cos(kz - \omega t + \Psi) \mathbf{e}_x \quad (7.4)$$

mit den Einheitsvektor \mathbf{e}_x in x -Richtung. Sowohl die Amplitude \mathcal{E} als auch die Phase Ψ können im Verlaufe der Ausbreitung der Welle in z -Richtung variieren. Über eine Wellenlänge der Strahlung sollen die Variationen aber vernachlässigbar sein (Näherung durch ebene Wellen mit schwach veränderlicher Amplitude und Phase).

Die Bewegungsgleichung der N_e Elektronen eines Pulses, die sich im Feld der elektromagnetischen Welle bewegen, kann in Form von $2N_e$ paarweise gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung geschrieben werden. Ausgedrückt durch die Variablen θ_j, γ_j lauten sie für $j = 1 \dots N_e$

$$\frac{d\theta_j}{dz} = n \left(1 - \frac{\gamma_n^2}{\gamma_j^2} \right) k_U + \frac{e\mathcal{E} K_{\text{rms}} B_n}{\gamma_j^2 mc^2} \sin(\theta_j + \Psi), \quad (7.5)$$

$$\frac{d\gamma_j}{dz} = \frac{e\mathcal{E} K_{\text{rms}} B_n}{\gamma_j mc^2} \cos(\theta_j + \Psi) - \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 mc^2 k} \left[i \langle e^{-i\theta_j} \rangle e^{i\theta_j} + \text{c.c.} \right], \quad (7.6)$$

⁷Unterschiedliche transversalen Ausdehnungen von Elektronenstrahl und optischer Welle werden durch den Fillingfaktor (7.8) in pauschaler Weise berücksichtigt.

⁸Wir setzen voraus, dass nur eine Harmonische, in der Regel die 1., in einer Stärke vorhanden ist, die Einfluss auf die Elektronenbahn hat.

⁹Eine Reihe von Publikationen verwendet den Ansatz $\mathcal{E}(z, t) \sim \sin(kx - \omega t + \Psi)$ für die elektromagnetische Welle. Ein solcher Ansatz liefert FEL Gleichungen, bei denen Ψ durch $\Psi + \pi/2$ zu ersetzen ist.

wobei c.c. das komplex konjugierte des vorhergehenden Ausdrucks bedeutet. Im Unterschied zu Referenz [14] haben wir die Zeitkoordinate t in den Bewegungsgleichungen durch die entsprechende z -Koordinate des Elektronenpulses gemäß $z = \beta ct$ ersetzt, wobei βc die longitudinale Geschwindigkeit der Elektronen ist und die Näherung $\beta = 1$ gemacht wurde. Der Abschwächungsfaktor B_n (4.11) ist ein Spezifikum des planaren Undulators und resultiert aus der Mittelung über dessen Oszillationen in der longitudinalen Geschwindigkeit der Elektronen. Bei der Ableitung von Gl. (7.5-7.6) wurden Terme höherer Ordnung in $1/\gamma^2$ und $e\mathcal{E} \lambda_U/(2\pi mc^2)$ vernachlässigt. Der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (7.5) resultiert vom Einfluss der elektromagnetischen Welle auf die Bahn der Elektronen. In Gl. (7.6) beschreibt der zweite Term den Raumladungseffekt in einem Elektronenpuls, dessen Dichteverteilung durch die elektromagnetische Welle strukturiert worden ist (Mikrobunching). Die jeweils zweiten Terme in den Gleichungen (7.5, 7.6) sind i. allg. klein und stellen nur eine Korrektur zu den ersten dar.

Das elektromagnetische Feld wird durch die Maxwellgleichung mit dem Strom der Elektronen als Quellterm beschrieben. Nimmt man an, dass sich Amplitude \mathcal{E} und Phase Ψ über eine Wellenlänge λ nur wenig ändern und dass ihre Variation in transversaler Richtung viel geringer als in longitudinaler Richtung ist (paraxiale Näherung) so lautet die Maxwellgleichung

$$\frac{d}{dz} (\mathcal{E} e^{i\Psi}) = -\frac{eK_{\text{rms}} n_e B_n \mathcal{F}}{2\epsilon_0} \left\langle \frac{e^{-i\theta_j}}{\gamma_j} \right\rangle - i \frac{e^2 n_e}{2n \epsilon_0 mc^2 k} \left\langle \frac{1}{\gamma_j} \right\rangle \mathcal{E} e^{i\Psi} \quad (7.7)$$

wobei $\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \dots$ den Mittelwert über alle N_e Test-Elektronen eines Pulses bedeutet. Auch hier ist der zweite Term auf der rechten Seite für nicht zu starke elektromagnetische Felder klein gegenüber dem ersten. Der Fillingfaktor

$$\mathcal{F} = \begin{cases} \Sigma_e / \bar{\Sigma}_{\text{opt}} & \text{für } \Sigma_e \leq \bar{\Sigma}_{\text{opt}} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.8)$$

auf der rechten Seite von Gl. (7.7) normiert die Elektronendichte auf die gleiche Querschnittsfläche wie den optischen Strahl und berücksichtigt die Tatsache, dass nur Elektronen innerhalb des optischen Strahles mit diesem wechselwirken können. Σ_e bezeichnet den mittleren Querschnitt des Elektronenstrahls im Undulator. Die Gleichungen (7.5-7.7) stellen ein gekoppeltes System von Differentialgleichungen 1. Ordnung für die $2N_e + 2$ Funktionen $\theta_i(z)$, $\gamma_i(z)$ sowie $\mathcal{E}(z)$ und $\Psi(z)$ dar.

In einer eindimensionalen Simulationsrechnung werden zu Beginn die Anfangsverteilung $\{\theta_i, \gamma_i\}$ der Elektronen im Phasenraum gemäß den Anfangsbedingungen des Elektronenstrahls festgelegt. Für die Energieverteilung $\{\gamma_i\}$ verwenden wir eine gaussförmige Zufallsverteilung um den Mittelwert $\gamma = E_e/mc^2$ mit der rms Breite σ_E . Bereits bei einigen hundert Test-Teilchen sind die Mittelwerte und die Feldstärke am Undulatorende praktisch unabhängig von statistischen Fluktuationen in der Energieverteilung. Anders verhält es sich mit der Phasenverteilung $\{\theta_i\}$. Hier ist es entscheidend, ob die Verteilung bereits am Anfang eine geringe Inhomogenität aufweist. Als Maß für die Inhomogenität dient der Betrag des Bunchingfaktors

$$B = \left\langle e^{-i\theta_i} \right\rangle, \quad (7.9)$$

der für einen gleichförmig über die Phase verteilten Strahl gleich Null und für einen auf einen einzigen Winkel θ verteilten Strahl ($\theta_i = \theta, \forall i$) gleich Eins ist. Rechnungen zeigen, dass die Ergebnisse für einen Strahl mit einem Anfangswert von $|B| \approx 10^{-3}$ sich stark (z. T. um Faktoren) von den Ergebnissen mit einem Anfangswert $|B| = 0$ unterscheiden. Dies beweist die entscheidende Bedeutung des Bunchingfaktors für die Verstärkung im FEL. Selbst mit 10000 zufällig verteilten Test-Teilchen erhält man beim Auswürfeln mit Hilfe eines Zufallsgenerators im Mittel einen Bunchingfaktor der Größenordnung 10^{-3} . Wesentlich kleinere Bunchingfaktoren erhält man nur mit einer um viele Größenordnungen höheren Anzahl von Test-Teilchen. Um dies zu vermeiden,

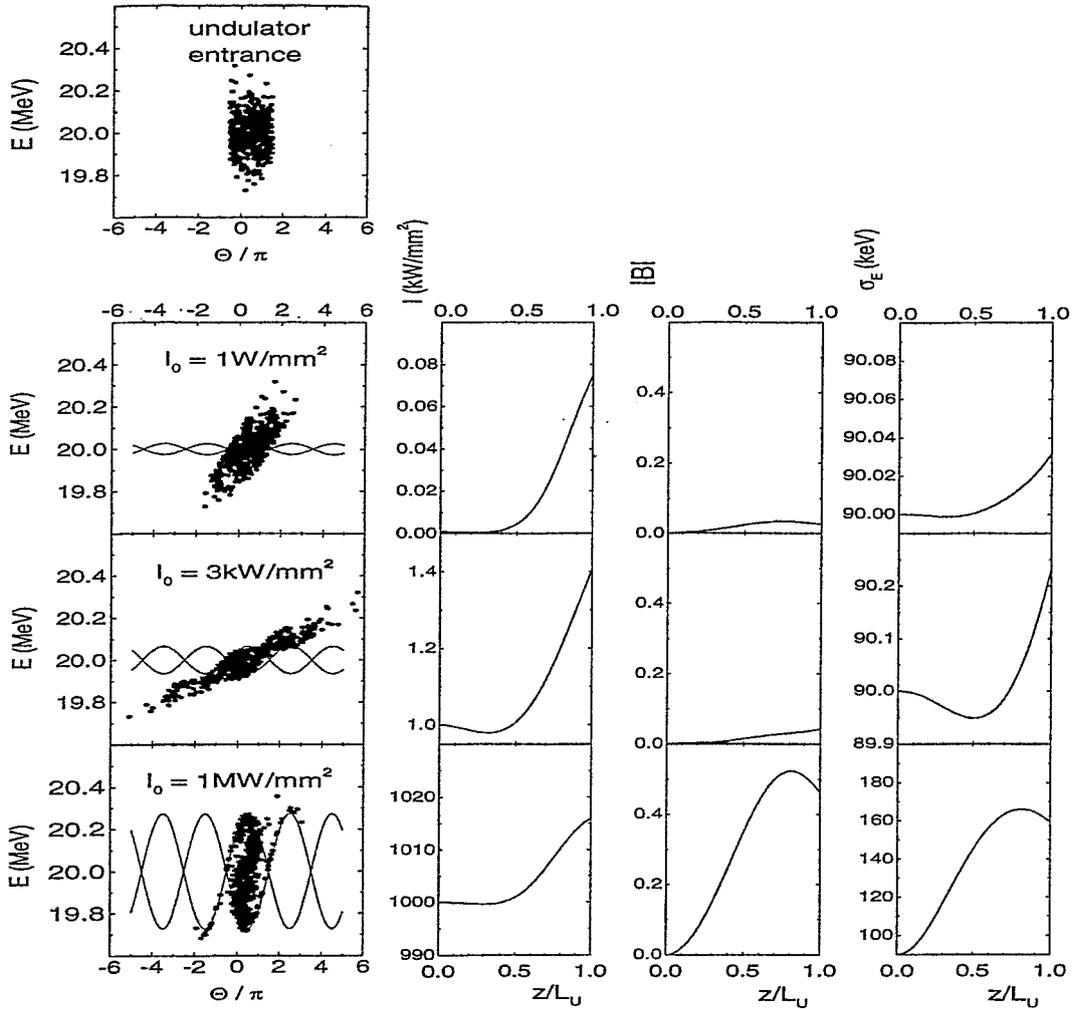


Abbildung 7.1: Phasenraum von 500 Test-Elektronen (links oben) mit einer mittleren Energie von 20 MeV und einer Unschärfe von 90 keV beim Eintritt in den Undulator.

Die linke Spalte zeigt den Phasenraum beim Austritt aus dem Undulators nach der Wechselwirkung mit einem optischen Strahl unterschiedlicher Anfangsintensität I_0 und einer Wellenlänge, die exakt der Resonanzwellenlänge λ_1 (3.1) entspricht. Die Kurven in der linken Spalte zeigen die Trennlinie (Separatrix) zwischen freier und gebundener Bewegung im Phasenraum am Ende des Undulators.

Auf der rechten Seite sind die Entwicklung der optischen Intensität I , des Bunchingfaktors B und der Energieunschärfe σ_E in Abhängigkeit von der im Undulator durchlaufenen Strecke z dargestellt. Die Parameter entsprechen denen des U27×32 Undulator (2.1 – 2.3).

starten wir mit einer gleichabständigen Verteilung in der Phase ($\theta_i = -\pi/2 + (i-1)2\pi/N_e$), die wegen der endlichen Zahlendarstellung im Computer einen Bunchingfaktor $|B| \approx 10^{-9}$ liefert. Damit repräsentiert die gleichabständige Verteilung von etwa 10^4 Test-Teilchen einen realistischen Elektronenstrahl besser als eine zufallsverteilte.

Abb. 7.1 zeigt das Ergebnis einer typischen Simulationsrechnung. Um eine übersichtliche Darstellung zu erhalten, wurde hier die Anzahl der Test-Elektronen auf 500 reduziert. Links oben ist die Phasenraumverteilung beim Eintritt in den Undulator dargestellt. Die Bilder darunter zeigen die Phasenraumverteilung am Ende des Undulators nachdem die Elektronen in Wechsel-

wirkung mit einem elektromagnetischen Feld unterschiedlicher Intensität gestanden haben. Trifft der Elektronenpuls auf ein relativ schwaches Feld ($I=1\text{ W/mm}^2$), so wird seine Verteilung im Wesentlichen nur geschert: schnellere Teilchen gewinnen Vorsprung, langsamere bleiben zurück. Die Bindung der Teilchen innerhalb der Separatrix, bei der sie um einen festen Phasenpunkt (Mittelpunkt der Separatrix) rotieren, spielt praktisch noch keine Rolle. Ihr Durchmesser ist so klein, so dass sich nur wenige Teilchen in ihrem Inneren befinden. Obwohl der Energieaustausch zwischen Elektronen und Feld gering ist, ist die relative Zunahme des elektromagnetischen Feldes hier groß, da von einem niedrigen Anfangswert ausgegangen wird. Der Bunchingfaktor B sowie die Energieunschärfe der Elektronen wachsen nur wenig. Bei einer mittleren optischen Intensität ($\approx 3\text{ kW/mm}^2$) ist ein beträchtlicher Teil der Elektronen auf gebundenen Bahnen innerhalb der Separatrix eingefangen. Intensität, Bunchingfaktor und Energieunschärfe wachsen bis zum Ende des Undulators. Der relative Zuwachs an optischer Intensität ist aber geringer als im ersten Falle. Bei sehr großen Feldstärken ($I=1\text{ MW/mm}^2$) sind praktisch alle Elektronen vom Feld eingefangen und rotieren im Phasenraum mit dem Ergebnis, dass ihre Energie periodisch zu- und abnimmt. Gleiches tun der Bunchingfaktor und die Energieunschärfe.

Betrachten wir jetzt die Entwicklung der verschiedenen Parameter beim Durchlaufen des Undulators. Generell tut sich im ersten Drittel nur wenig. Diese Strecke dient dazu, die einzelnen Elektronen eines Pulses in eine für einen späteren Energietransfer günstige Phasenlage zur elektromagnetischen Welle zu bringen. Dazu müssen etwa gleich viele Elektronen beschleunigt wie abgebremst werden, so dass hier der Bunchingfaktor B wächst ohne dass Energie auf das optische Feld übertragen wird. Hat der Bunchingfaktor einen von Null verschiedenen Wert ($|B| \approx 10^{-2}$) erreicht, so setzt ein intensiver Energietransfer zugunsten des elektromagnetischen Feldes ein. Dieser Transfer ist verbunden mit einer Vergrößerung der Energieunschärfe des Elektronenpulses (rechte Spalte von Abb. 7.1) in Übereinstimmung mit dem 2. Madey'schen Gesetz. Erreicht die optische Intensität den für den Undulator charakteristischen Sättigungswert, so fließt ein Teil der Energie zu den Elektronen zurück. Dabei wird auch ihre Energieschärfe wieder verbessert. Ist der Undulator lang genug, so pendelt anschließend ein Teil der Energie zwischen Elektronenpuls und elektromagnetischem Feld hin und her.

Im folgenden Unterkapitel beginnen wir mit der Untersuchung eines monoenergetischen Strahles und berechnen den Gewinn an optischer Intensität während eines Durchlaufes durch den Undulator. Die transversale Variation (endliche Breite und Profil) von optischen und Elektronenstrahl können wegen der Beschränkung auf eindimensionale Modelle nur pauschal in der Form von Mittelwerten berücksichtigt werden. Diese Mittelwerte werden sowohl für die Simulationsrechnungen als auch für die Bestimmung der Kleinsignal-Verstärkung benutzt. Neben der Verstärkung bei einer geringen optischen Intensität, die mit der Kleinsignal-Verstärkung (6.9) bzw. der Verstärkung (6.29) im Medium-Gain Regime verglichen wird, werden noch das Sättigungsverhalten und die Abhängigkeit von der Energieverstimmung getestet und mit den Näherungsformeln (6.37) bzw. (6.29) verglichen. In dem darauffolgenden Unterkapitel werden Simulationsrechnungen für einen Elektronenstrahl mit endlicher Energiebreite durchgeführt. Dabei wird getestet, wie gut der Korrekturfaktor η_{em} (6.18) die Reduktion der Laserverstärkung bei wachsender Energieunschärfe beschreibt.

7.1 Monoenergetischer Elektronenstrahl

Als erstes testen wir die Gültigkeit der Sättigungsfunktion (6.38) bzw. (6.40), welche die Reduktion des Intensitätsgewinns mit wachsender Intensität des optischen Strahls beschreibt. Dazu vergleichen wir in Abb. 7.2 den aus einer Lösung der Differentialgleichungen (7.5-7.7) für einen unendlich scharfen Strahl ($\sigma_E = 0$) bestimmten Intensitätszuwachs bei optimaler Energieverstimmung (6.8) mit der unkorrigierten Verstärkung (6.32) für das Medium-Gain Regime. Der Einfluss einer endlichen Energieschärfe σ_E auf die Verstärkung wird erst im folgenden Unterkapitel untersucht.

Um den Einfluss der Pulsladung, welche im wesentlichen die Verstärkung bestimmt, untersu-

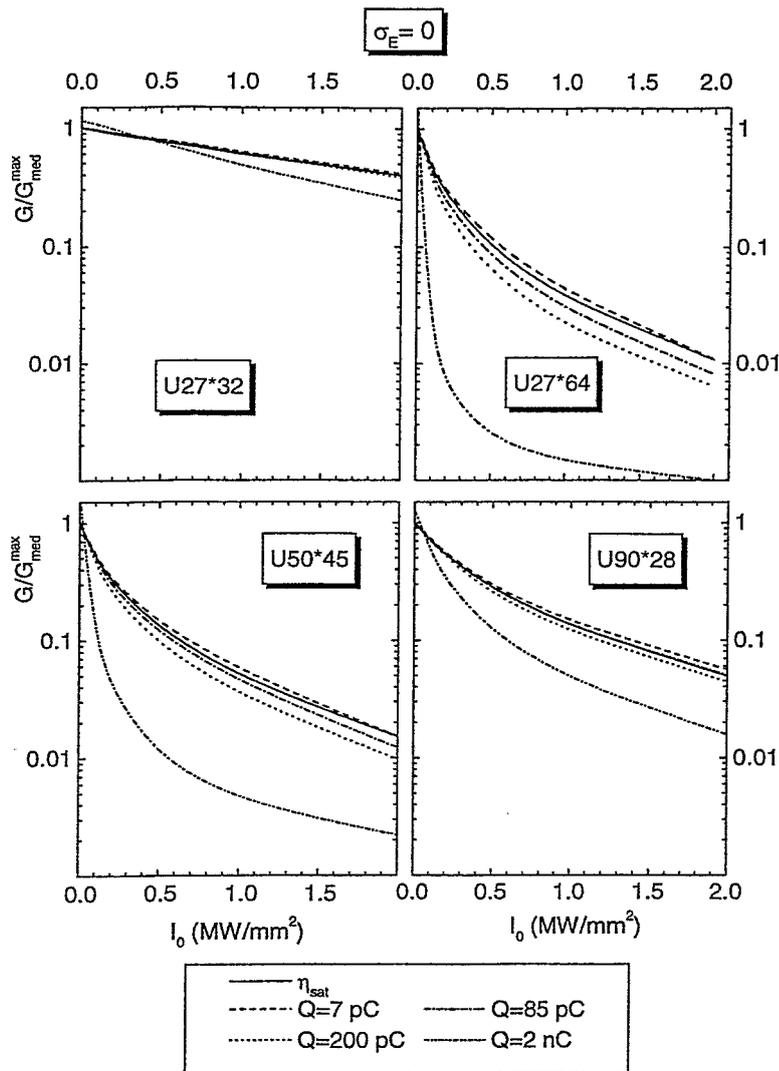


Abbildung 7.2: In einer Simulationsrechnung mit 1000 Test-Elektronen bestimmte Intensitätsverstärkung G (6.1) geteilt durch die jeweilige maximale Verstärkung $G_{\text{med}}^{\text{max}}$ im Medium-Gain Regime (6.32) in Abhängigkeit von der Intensität I_0 der elektromagnetischen Welle am Undulatoreingang für Elektronenpulse der Dauer $\sigma_t = 1.5 \text{ ps}$ und 4 Werte der Gesamtladung Q , berechnet für einen monoenergetischen Strahl ($\sigma_E = 0$) mit der Energie $E_e = 20 \text{ MeV}$ mit optimaler Verstimmung (6.8) und einem jeweiligen Undulatorparameter $K_{\text{rms}} = 1.0$. Zum Vergleich ist der Verlauf des Sättigungsparameter η_{sat} (6.40) angegeben.

chen zu können, wurden die Rechnungen zusätzlich zu den für ELBE vorgesehenen 85 pC noch für eine geringere Ladung von 7 pC, wie sie etwa der Pulsladung am S-DALINAC in Darmstadt [12] entspricht, sowie für 2 größere Ladungen durchgeführt. Die entsprechenden Gewinnfaktoren g_0 (6.2) können Tabelle 7.1 entnommen werden.

Betrachten wir zunächst die Verstärkung bei kleinen Intensitäten ($I_0 \lesssim 1 \text{ kW/mm}^2$), wie sie für den Beginn des Laseprozesses charakteristisch sind. Hier stimmt mit Ausnahme der extrem hohen Pulsladung von 2 nC, die nach Tabelle 6.1 ja auch aus dem Medium-Gain Regime herausfällt, das Ergebnis der Simulationsrechnung für alle Undulatoren mit den Vorhersagen des Medium-Gain Regimes überein. Auch die Reduktion des Gewinns infolge Sättigung (6.37) wird bei nicht zu großer Pulsladung gut durch η_{sat} reproduziert. Generell wird die Übereinstimmung mit wachsender Pulsladung und wachsender Intensität schlechter. Bei 2 nC ist die Sättigung in den Simulationsrechnungen um Größenordnungen stärker als durch die Funktion η_{sat} beschrieben. Beachtet man, dass die Intensität im Undulator wegen der Verluste nicht über einen Wert steigen kann, bei dem sich der Gewinn auf weniger als etwa 10% der Kleinsignal-Verstärkung reduziert hat, so kann man den Schluss ziehen, dass die Sättigung im Falle eines monoenergetischen Elektronenstrahls für alle Undulatoren mit der für ELBE vorgesehenen Pulsladung hinreichend gut durch die Funktion (6.40) beschrieben wird. Abb. 7.2 steht für Untersuchungen

Undulator	Gewinnfaktor g_0 bei $E_e = 20 \text{ MeV}$, $K_{\text{rms}} = 1.0$			
	$Q = 7 \text{ pC}$	$Q = 85 \text{ pC}$	$Q = 200 \text{ pC}$	$Q = 2 \text{ nC}$
U27×32	0.04	0.49	1.16	11.64
U27×64	0.26	3.18	7.49	74.91
U50×45	0.14	1.76	4.13	41.32
U90×28	0.06	0.70	1.65	16.45

Tabelle 7.1: Gewinnfaktoren g_0 (6.2) in Abhängigkeit von der Gesamtladung Q der Elektronenpulse für die verschiedenen Undulatoren bei einer Einschussenergie $E_e = 20 \text{ MeV}$ und einem Undulatorparameter $K_{\text{rms}} = 1.0$ berechnet mit den Parametern aus den Tabellen 2.1 – 2.3.

im gesamten zur Verfügung stehenden Bereich von Elektronenenergie und Undulatorparameter. Die Tendenz ist stets die gleiche: ab Pulsladungen, die einem Gewinnfaktor $g_0 \gtrsim 1$ entsprechen, gibt es sichtbare Abweichungen von der Sättigungsfunktion (6.40), die ab $g_0 \gtrsim 3$ und $I \gtrsim I_{\text{sat}}$ größer als 10% sind.

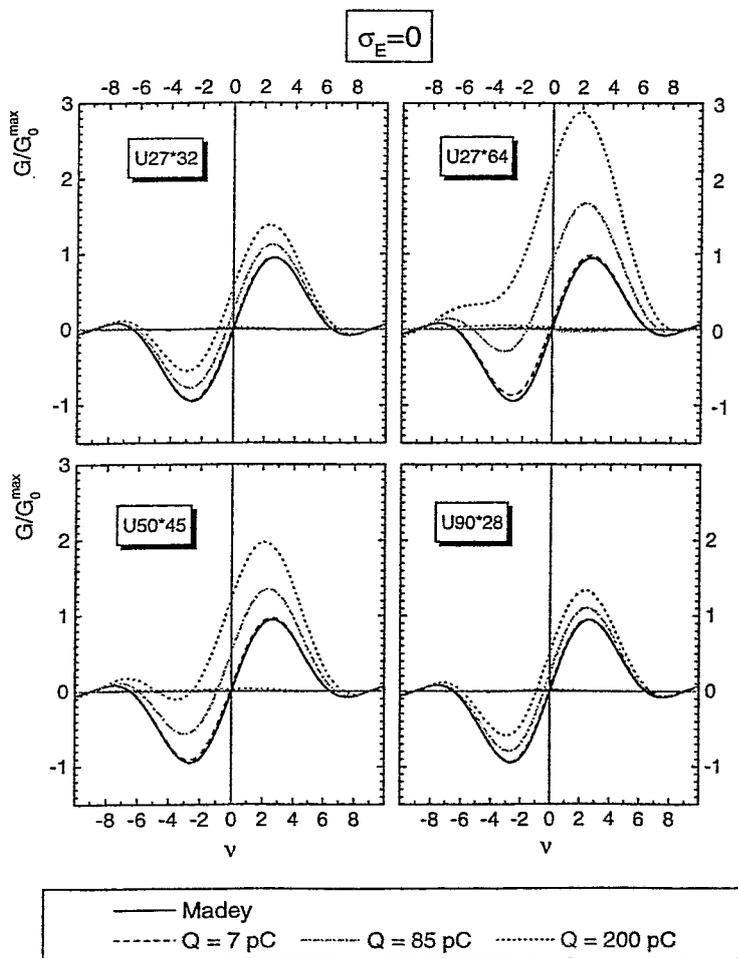


Abbildung 7.3: In einer Simulationsrechnung mit 1000 Test-Teilchen bestimmte Verstärkung G (6.1) der optischen Intensität für die 4 untersuchten Undulatoren in Einheiten der jeweiligen maximalen Kleinsignal-Verstärkung G_0^{max} (6.9) in Abhängigkeit von der Energieverstimmung ν (4.3) für 3 Werte der Gesamtladung Q des Elektronenpulses berechnet für einen monoenergetischen Strahl mit $E_e = 20 \text{ MeV}$, $K_{\text{rms}} = 1.0$ und der Pulsdauer $\sigma_t = 1.5 \text{ ps}$. Die Kurven in unmittelbarer Nähe zur Abszissenachse zeigen die Abweichungen der Gewinnkurven von der Potenzreihe (6.29) des Medium-Gain Regimes. Zusätzlich ist die Verstärkung nach dem 1. Madey'schen Gesetz angegeben.

Als nächstes vergleichen wir die Gewinnkurve, die die Abhängigkeit des Gewinns an Strahlungsintensität von der Energieverstimmung (4.3) beschreibt, mit der Vorhersage von Madey [29], nach der diese proportional zur Ableitung derjenigen Kurve (4.2) ist, die die Linienform der spontan emittierten Strahlung beschreibt. Abb. 7.3 zeigt diese Kurve, wie man sie für verschiedene Pulsladungen aus der Integration der FEL Gleichungen erhält und vergleicht sie mit

der Gewinnkurve nach Madey. Um die Auswirkungen des Mikrobunching im Medium-Gain Regime zu illustrieren, wurde die Verstärkung nicht wie in Abb. 7.2 auf den Gewinn (6.9) des Medium-Gain Regimes normiert, sondern auf die maximale Kleinsignal-Verstärkung (6.9) des Low-Gain Regimes. Die Rechnungen wurden mit einer Eingangsintensität von 1 kW/mm^2 durchgeführt, bei der nach Abb. 7.2 noch kein Sättigungseffekt eingesetzt hat. Abb. 7.3 ist wiederum stellvertretend für weitere Rechnungen bei anderen Werten von Elektronenenergie und Undulatorparameter.

Bei einer Ladung von 7 pC reproduziert die Simulationsrechnung die Madey-Kurve recht genau. Bei 85 pC und 200 pC ist der Gewinn merklich größer, und man erhält im Gegensatz zu Madey auch bei $\nu = 0$ eine endliche Verstärkung. Die Abweichungen von der Madeykurve entsprechen den in Abb. 6.5 illustrierten Besonderheiten des Medium-Gain Regimes und werden auch quantitativ gut von dem Polynom (6.29) beschrieben. Das sieht man daran, dass die Differenzen zwischen der Simulationsrechnung und der Vorhersage des Medium-Gain Regimes sich kaum von den Abszissenachsen in Abb. 7.3 abheben. Insgesamt wird die Gainkurve durch die Näherungsformel (6.29) des Medium-Gain Regimes im gesamten Bereich von Elektronenenergie und Undulatorparameter gut beschrieben. Ist der Gewinnfaktor g_0 kleiner als etwa 0.3 , so ist bereits die Näherung (6.6) für das Low-Gain Regime hinreichend genau.

7.2 Elektronenstrahl endlicher Energieschärfe

In diesem Unterkapitel wird der Einfluss einer endlichen Energieschärfe des Elektronenstrahls auf die Laserverstärkung untersucht und mit den Korrekturfaktoren aus Kapitel 6 verglichen. Gleichzeitig wird getestet, ob der Korrekturfaktor η_{sat} (6.38, 6.40) das Sättigungsverhalten des Lasers auch für einen Elektronenstrahl mit endlicher Energiebreite beschreibt. Da der Einfluss der transversale Emittanz des Strahls in einer eindimensionalen Simulationsrechnung nicht berücksichtigt werden kann, wird bei diesen Vergleichsrechnungen von einem Strahl verschwindender Emittanz ausgegangen. Bei der für ELBE prognostizierten Emittanz von höchstens 7 mm mrad ist ihr Einfluss auf den Gewinn ohnehin im einstelligen Prozentbereich. Lediglich beim Lasen in der 3. Harmonischen hat sie einen merklichen Einfluss auf den Gewinn.

Abb. 7.4 vergleicht die aus einer Simulationsrechnung erhaltene Reduktion des Lasergewinns mit den Korrekturfaktoren (6.18) bzw. (6.21). Gleichzeitig werden auch die beiden Varianten der Korrekturfaktoren miteinander verglichen. Die jeweilige Verstärkung bei $\sigma_E = 0$ entspricht den Werten, die der Abb. 7.2 zu Grunde liegen. Hier wird die Simulationsrechnung aber auf die Kleinsignal-Verstärkung und nicht auf die Verstärkung des Medium-Gain Regimes bezogen. Die Abbildung zeigt, dass die Reduktion des Gewinns mit wachsender Strahlenschärfe durch die Reduktionsfaktoren (6.18) bzw. (6.21) tendenziell richtig beschrieben wird. Die Unterschiede zwischen den beiden Varianten des Reduktionsfaktors sind marginal und werden erst ab einer Strahlenschärfe von etwa 50 keV sichtbar, was 0.25% der Elektronenenergie entspricht. Allerdings ist die Reduktion des Gewinns bei größeren Gewinnfaktoren in den Simulationsrechnungen merklich größer als durch die Korrekturfaktoren vorhergesagt. Der Gewinn sinkt mit wachsender Energieunschärfe von einem Wert, der für das Medium-Gain Regime erhalten wird, auf den Wert für das Low-Gain Regimes. Das einsetzende Mikrobunching, welches im Medium-Gain Regime den Gewinn gegenüber dem Low-Gain Regime steigert, wird durch eine schlechte Energieschärfe verzögert. Das wird auch aus Abb. 7.5 deutlich, wo die Entwicklung des Bunchingfaktors (7.9) für einen monoenergetischen Strahl der für einen Strahl mit 45 keV bzw. 90 keV Energiebreite gegenübergestellt wird. Aus Abbildung 7.4 ist ersichtlich, dass man den Gewinn durch eine Halbierung der Strahlenschärfe von 90 keV auf 45 keV beträchtlich steigern kann. Die Steigerung ist um so größer, je mehr Perioden der Undulator hat. Umgekehrt wird der Gewinn bei gleicher Strahlenschärfe bei Undulatoren mit vielen Perioden stärker reduziert als bei Undulatoren mit weniger Perioden.

Abb. 7.6 vergleicht die Madeykurve (Abhängigkeit des Gewinns von der Energieverstimmung) mit den aus Simulationsrechnungen bestimmten Gainkurven für einen monoenergetischen Strahl

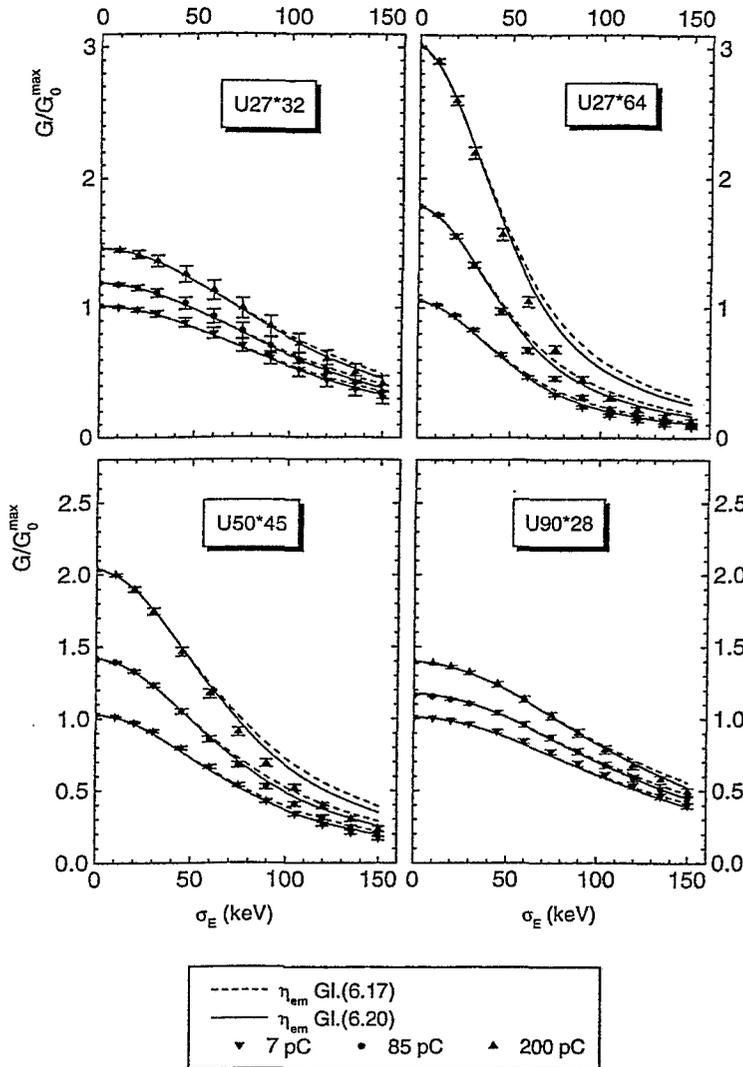


Abbildung 7.4: Verhältnis der Verstärkung G (6.1) aus einer eindimensionalen Simulationsrechnung (10000 Test-Teilchen) zur jeweiligen unkorrigierten Kleinsignal-Verstärkung (6.9) in Abhängigkeit von der Unschärfe σ_E des Elektronenstrahls für 3 verschiedene Pulsladungen Q . ($E_e = 20$ MeV, $\sigma_t = 1.5$ ps, $K_{rms} = 1.0$ Eingangintensität: $I_0 = 1$ kW/mm²) Die Linien zeigen das Verhalten der Korrekturfaktoren (6.18) (durchgezogene Linien) bzw. (6.21) (gestrichelte Linien) bei verschwindender transversaler Emittanz. Die Fehlerbalken entsprechen den statistischen Fehlern der Simulationsrechnungen.

und für einen Strahl mit der Energieunschärfe von 90 keV. Man sieht, dass eine mit dem Reduktionsfaktor η_{em} multiplizierte Gainkurve für einen monoenergetischen Strahl nur sehr grob mit der Simulationsrechnung für den Strahl mit endlicher Energieunschärfe übereinstimmt. Im Bereich des maximalen Gewinns ist die Übereinstimmung aber relativ gut. Charakteristisch ist die Verschiebung des Maximums hin zu einer größeren Verstimmung. Sie entspricht ziemlich

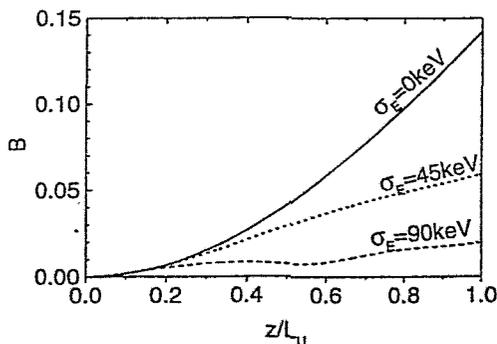


Abbildung 7.5: Bunchingfaktor B (7.9) in Abhängigkeit von der im Undulator durchlaufenen Strecke z berechnet für den U27x64 und 3 verschiedene Werte der Energieunschärfe σ_E bei 20 MeV Elektronenenergie und $K_{rms} = 1.0$. Die Anfangsintensität beträgt 1 kW/mm².

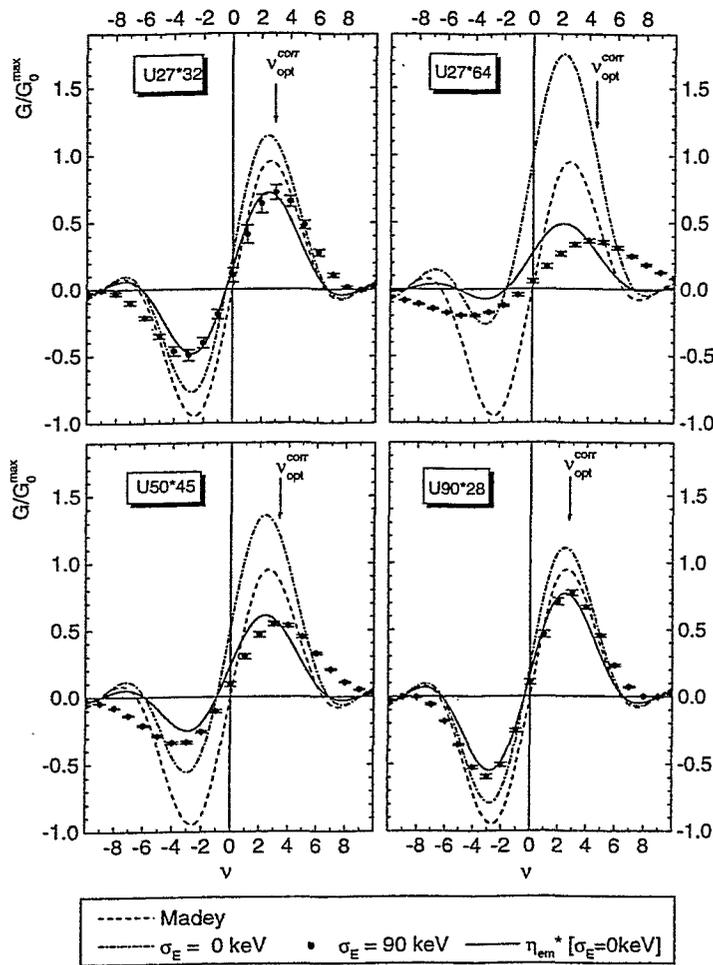


Abbildung 7.6: In einer eindimensionalen Simulationsrechnung mit 10000 Test-Teilchen bestimmte Verstärkung G (6.1) im Verhältnis zur jeweiligen maximalen Kleinsignal-Verstärkung G_0^{\max} in Abhängigkeit von der Energieverstimmung ν (4.3) für einen monoenergetischen Strahl ($\sigma_E = 0 \text{ keV}$) und für einen Strahl mit $\sigma_E = 90 \text{ keV}$. ($Q = 85 \text{ pC}$, $\sigma_t = 1.5 \text{ ps}$, $E_e = 20 \text{ MeV}$, $K_{\text{rms}} = 1.0$) Die Fehlerbalken entsprechen den statistischen Fehlern der Simulationsrechnung. Die Pfeile zeigen auf die optimale Verstimmung (6.27) für einen Strahl endlicher Energieschärfe. Zusätzlich sind noch der Gewinn nach dem 1. Madey'schen Gesetz und die mit dem jeweiligen Reduktionsfaktor η_{em} multiplizierte Gewinnkurve für den monoenergetischen Strahl angegeben.

genau den korrigierten Werten (6.27) für die optimale Verstimmung. Die Abbildung zeigt, dass der gegenüber dem Low-Gain Regime erhöhte Gewinn des Medium-Gain Regimes durch die Strahlunschärfe von 90 keV noch unter die Vorhersage der Madeykurve gedrückt wird. Untersuchungen bei anderen Elektronenenergien und Undulatorparametern innerhalb der Spannweite von Tabelle 2.1 und 2.2 ergaben ähnliche Ergebnisse. Da wir einen von der Elektronenenergie unabhängigen Betrag für die Strahlunschärfe angenommen haben, verringert sich ihr Einfluss mit steigender Energie.

Als letztes wollen wir testen, wie gut die Sättigung für einen Strahl endlicher Energieschärfe durch die Faktoren $\eta_{\text{sat}}(I)$ in Abhängigkeit von der Intensität I des optischen Strahl beschrieben wird. Dazu dient Abbildung 7.7. Bei kleinen optischen Intensitäten ist das aufgezeigte Verhältnis G/G_{med}^{\max} kleiner als Eins, d. h. die Reduktion des Gewinns ist stärker als durch den Reduktionsfaktor vorhergesagt. Dabei ist die Differenz um so größer je größer die Steigerung gegenüber dem Small-Gain Regime war. Wie oben geschildert, stört die Energieunschärfe das einsetzende Mikrobunching. Mit steigender Intensität fällt der Gewinn flacher ab als durch den Sättigungsfaktor η_{sat} vorhergesagt. Für einen unscharfen Strahl setzt das Overbunching – wie vorher das Mikrobunching – später ein als für einen Strahl aus monoenergetischen Elektronen. Jetzt führt das dazu, dass der Gewinn weniger reduziert wird. Insgesamt ist der Gewinn in den Simulationsrechnungen bei kleinen Intensitäten um 10-40% geringer als mit den Formeln aus Kapitel 6 vorhergesagt, in der Nähe der Sättigung dagegen ist der er um bis zu 30% größer. Das bedeutet, dass das Hochfahren des Lasers etwas langsamer geht als mit Hilfe der algebraischen Formeln

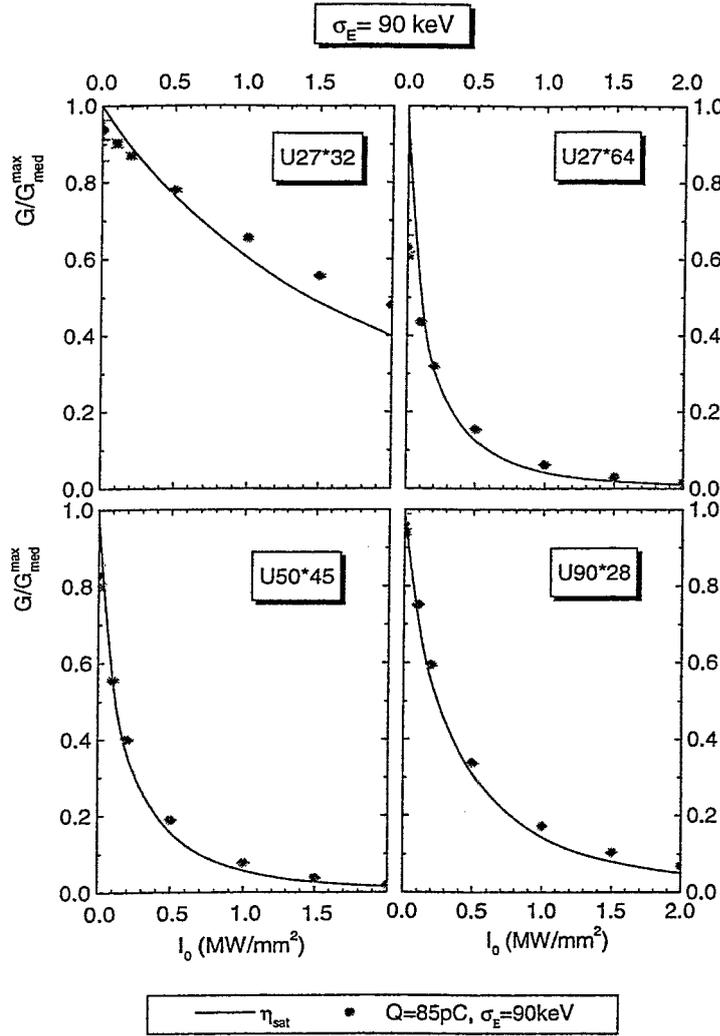


Abbildung 7.7: In einer Simulationsrechnung mit 10000 Test-Elektronen bestimmte Intensitätsverstärkung G (6.1) geteilt durch die jeweilige korrigierte maximale Verstärkung $G_{\text{med}}^{\text{max}}$ im Medium-Gain Regime (6.32) in Abhängigkeit von der Intensität I_0 der elektromagnetischen Welle am Undulatoreingang für Elektronenpulse der Dauer $\sigma_t = 1.5 \text{ ps}$ mit einer Gesamtladung $Q = 85 \text{ pC}$, berechnet für einen Elektronenstrahl mit der Energie $E_e = 20 \text{ MeV}$ und der Unschärfe $\sigma_E = 90 \text{ keV}$ bei einem jeweiligen Undulatorparameter $K_{\text{rms}} = 1.0$. Zum Vergleich ist der Verlauf des Sättigungsparameters η_{sat} (6.40) angegeben.

von Kapitel 6 prognostiziert, dafür aber eine etwas höhere Sättigungsintensität erreicht wird.

8 Zusammenwirken von Undulator und Resonator beim Aufbau des Laserfeldes

Nachdem wir uns bisher mit der Verstärkung des Laserfeldes bei einem einzelnen Durchlauf durch den Undulator beschäftigt haben, wenden wir uns nun dem Gesamtprozess zu, bei dem der optische Puls viele Male durch den Undulator läuft und dabei stets mit einem frischen Elektronenpuls wechselwirkt. Vom Einzeldurchlauf benötigen wir nur noch die Information über den Gewinn und seine Reduktion mit wachsender Intensität.

Der Vorgang des Lasens beginnt damit, dass ein Elektronenpuls in den Undulator eintritt, ohne dass gleichzeitig ein optisches Feld vorhanden ist. Wegen der Wiggelbewegung emittiert der Puls spontan elektromagnetische Wellen. Ihre Intensität kann man mit Hilfe der Gleichungen aus Kapitel 4 berechnen. Wir benutzen einen Näherungsausdruck von Nguyen et al. [23]

$$I_{\text{spon}} = \int_0^{\Theta_c} \sin \Theta \, d\Theta \int_0^{2\pi} d\Phi \int d\lambda \frac{d^2 P_{\text{opt}}}{\Sigma_{\text{opt}} \, d\lambda \, d\Omega} \approx \frac{e}{\epsilon_0} I_p \frac{N_U K_{\text{rms}}^2 n B_n^2}{\Sigma_{\text{opt}} \lambda} \frac{\chi}{2} \frac{3+3\chi+2\chi^2}{(1+\chi)^3} \quad (8.1)$$

mit

$$N_e = Q/e \quad \text{und} \quad \chi = (\gamma\Theta_c)^2, \quad (8.2)$$

der alle unter einem Kohärenzwinkel $\Theta_c = w_0/z_R$ spontan emittierte Photonen berücksichtigt. Die Integration über $d\lambda$ erfolgt über die Umgebung der Resonanzwellenlänge λ_n der n -ten Harmonischen. Der Ausdruck (8.1) gilt eigentlich nur für $K_{\text{rms}} \ll 1$. Wir verwenden ihn aber auch für größere K_{rms} , da es sich gezeigt hat, dass der Vorgang des Lasens relativ unempfindlich gegenüber dem Anfangswert der Strahlung ist. Dazu vergleichen wir in Abb. 8.1 die Entwicklung der Intensität der Strahlung für Anfangsintensitäten, die sich um einen Faktor 5 voneinander unterscheiden. Danach verschiebt eine veränderte Anfangsintensität nur den Zeitpunkt des Eintritts in die Sättigungsphase. Im untersuchten Falle werden bei einer um den Faktor 5 geringeren Anfangsintensität etwa 20 Umläufe (ca. $1.7 \mu\text{s}$) mehr benötigt, um in die Sättigung zu kommen. Eine verstärkte spontane Emission hat den gegenteiligen Effekt und beschleunigt den Eintritt in die Sättigungsphase.

Die Wechselwirkung zwischen Elektronen und Welle kann man beim ersten Durchlauf durch den Undulator vernachlässigen, da die Intensität der Welle sehr gering ist und sie sich während des Durchlaufens auch nicht stark ändert. Die Intensität I_1 der elektromagnetischen Welle nach dem ersten Durchlauf ist damit gleich der Intensität (8.1) der spontanen Strahlung

$$I_1 = I_{\text{spon}}. \quad (8.3)$$

Bei jedem weiteren Umlauf steigert sich die Intensität um einen Betrag, der durch die korrigierte Kleinsignal-Verstärkung G_{med} (6.29)¹⁰ multipliziert mit dem Sättigungsfaktor η_{sat} in der Form (6.38) oder (6.40) bestimmt wird. Da vorzugsweise die Strahlung mit der optimalen Verstimmung (6.8) verstärkt wird, kann man vom Maximalwert (6.32) der Verstärkung ausgehen. Weiterhin muss man beachten, dass nach jedem Umlauf am Undulatoreingang nur noch eine um den Verlustfaktor V und den Auskoppelfaktor A reduzierte Intensität ankommt. Für beides setzen wir einen festen Prozentsatz an. Die Möglichkeit, dass sich Verluste und ausgekoppelter Anteil im Verlaufe des Laseprozesses ändern (z. B. durch Modensprünge) bleibt hier unberücksichtigt. Ausgehend von einer Intensität I_N für den N -ten Umlauf ergibt sich nach dem $(N+1)$ -ten Umlauf die Intensität

$$I_{N+1} = [1 + \eta_{\text{sat}}(I_N) G_{\text{med}}] \times [1 - V - A] I_N + I_{\text{spon}}, \quad (8.4)$$

wobei angenommen wurde, dass sich die Intensität von Umlauf zu Umlauf nur im Prozentbereich ändert ($G_{\text{med}} \ll 1$). Die spontane Strahlung spielt bei der Zunahme der Gesamtintensität nur bei den ersten Umläufen eine Rolle. Abb. 8.1 zeigt die Entwicklung der Intensität mit und ohne gleichzeitiger Berücksichtigung von spontaner und induzierter Emission bei späteren Umläufen. Danach ist ihre Berücksichtigung äquivalent zu einer etwas (im betrachteten Fall um einen Faktor 10) größeren spontanen Emission beim ersten Durchlauf des Elektronenpulses durch den Undulator.

Die aus dem Resonator herausgeführte Intensität der optischen Strahlung beträgt jeweils

$$I_N^{\text{out}} = A I_N. \quad (8.5)$$

Abb. 8.1 zeigt einen typischen Verlauf der Entwicklung der ausgekoppelten Intensität unter verschiedenen Annahmen über die Stärke der spontanen Emission. Man sieht, dass diese weder den Anstieg noch den erreichten Sättigungswert beeinflussen, sondern lediglich den Zeitpunkt des Eintritts in die Sättigung bestimmen.

Solange sich die Intensität unterhalb der Sättigung (6.39) befindet, beschreibt die Gleichung (8.4) ein exponentielles Wachstum

$$I_N \sim e^{\zeta N} \quad \text{mit dem Exponenten} \quad \zeta = G_{\text{med}} - (1 + G_{\text{med}})(V + A). \quad (8.6)$$

¹⁰Wir verwenden die Formel für das im Medium-Gain Regime, die bei kleinen Gewinnfaktoren automatisch in die Kleinsignal-Verstärkung (6.11) im Low-Gain Regime übergeht.

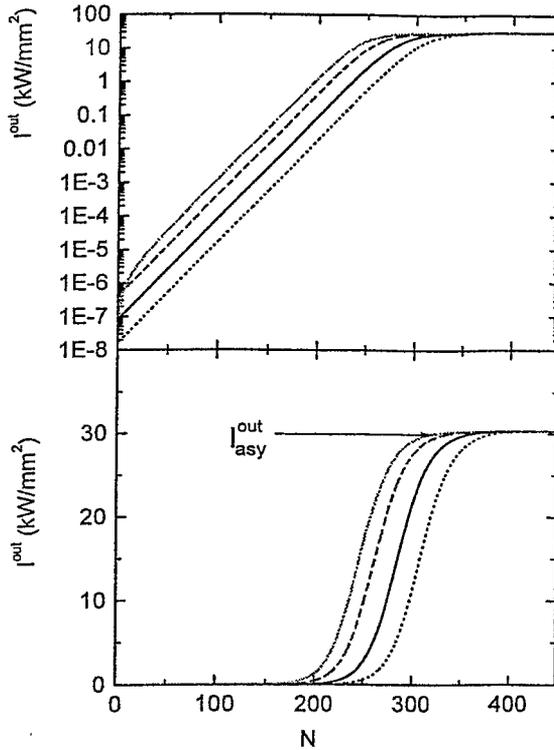


Abbildung 8.1: Entwicklung der ausgekoppelten Laserintensität I^{out} (8.5) bei einem Lasergewinn von 26% pro Umlauf, 10% Auskoppelung und 4% Verlusten in Abhängigkeit von der Anzahl N der Umläufe in linearer (unterer Teil) und logarithmischer Darstellung (oberer Teil). Die Anfangsintensität im Resonator beträgt nach Gl. (8.1) 1 mW/mm^2 (durchgezogene Linien). Zum Vergleich sind noch die Entwicklung für eine 5 mal größere (gestrichelte Linien) und eine 5 mal kleinere Anfangsintensität (punktierte Linien) angegeben. Die strich-punktierten Linien zeigen die Entwicklung für den Fall, dass die spontane Emission bei jedem Durchlauf berücksichtigt wird.

Für ein Anlaufen des Lasers muss der Exponent positiv sein, d.h.

$$G_{med} > \frac{V+A}{1-V-A} \approx V + A. \quad (8.7)$$

Damit ist der auszukoppelnde Anteil begrenzt auf

$$A < A_{max} = \frac{G_{med}}{1+G_{med}} - V \approx G_{med} - V. \quad (8.8)$$

Erreicht die Intensität I des elektromagnetischen Feldes im Undulator einen Wert in der Größenordnung der Sättigungsintensität (6.39), so verringert sich der Sättigungsfaktor η_{sat} (6.38) bzw. (6.40) und damit die Verstärkung gemäß Gl. (6.37). Das wird in Abb. 8.2 illustriert, wobei das Verhalten des U27×32 Undulators mit 32 Perioden dem des Undulators U27×64 mit 64 Perioden gegenüber gestellt wird. Die größere Kleinsignal-Verstärkung von 40.2% für den Undulator mit 64 Perioden gegenüber 29.2% für 32 Perioden bedingt ein schnelleres Hochfahren des ersten. Dagegen bewirkt die nach Gl. (6.39) um einen Faktor $2^4 = 16$ geringere Sättigungsintensität für den Undulator mit der doppelten Periodenzahl (87.7 kW/mm^2 gegenüber 1400 kW/mm^2 für 32 Perioden), dass die aktuelle Verstärkung schneller abnimmt. Im asymptotischen Bereich beträgt die Verstärkung in beiden Fällen 11.1% und kompensiert damit nach Gl. (8.4) die Verluste während eines Umlaufs durch den Resonator. Die Endintensität und damit auch ihr ausgekoppelter Anteil ist für den kürzeren Undulator aber deutlich größer.

Dem stellt Abb. 8.3 das Zeitverhalten bei einer größeren Verstärkung G_{med} aber gleicher Sättigungsintensität I_{sat} gegenüber, wie es durch eine bessere Energieschärfe des Elektronenstrahl erreicht werden kann. Hier wird der U27×64 mit einer Strahlunschärfe von 90 keV, was zu der Verstärkung von 40.2% führt, mit einem Strahl mit einer halb so großen Unschärfe und der daraus resultierenden Verstärkung von 88.6% verglichen. Die größere Verstärkung führt sowohl zu einem schnelleren Anlaufen als auch zu einer höheren Intensität im Gleichgewicht, im betrachteten Fall um einen Faktor 2.

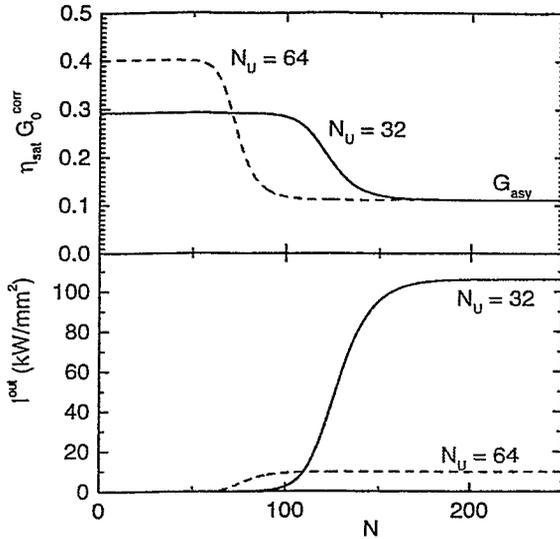


Abbildung 8.2: Laserverstärkung (oberer Teil) unter Berücksichtigung des Sättigungsfaktors η_{sat} (6.40) und ausgekoppelte Laserintensität I^{out} (8.5) (unterer Teil) in Abhängigkeit von der Anzahl N der Umläufe des Strahles im Resonator berechnet für den $U27 \times 32$ Undulator (durchgezogene Linien) bzw. den $U27 \times 64$ Undulator (gestrichelte Linien).

Verluste und ausgekoppelter Anteil wurden in beiden Fällen mit jeweils 5% angesetzt.

Ein konstanter Wert der Intensität wird erreicht, wenn in Gl. (8.4) der Faktor vor I_N den Wert Eins hat. Das ist dann der Fall, wenn die Verstärkung $\eta_{\text{sat}}(I) G_{\text{med}}$ wegen des Sättigungsfaktors $\eta_{\text{sat}}(I)$ auf den Wert

$$G_{\text{asy}} = \eta_{\text{sat}}(I_{\text{asy}}) G_{\text{med}} = \frac{V+A}{1-(V+A)} \quad (8.9)$$

gesunken ist. Dieser Wert ist unabhängig von den Eigenschaften des Undulators und des Elektronenstrahls und hängt nur von den Resonatorverlusten und dem Auskoppelfaktor ab. Verwendet man den Ansatz (6.40) für die Sättigungsfunktion, so beträgt die Intensität im Gleichgewicht

$$I_{\text{asy}} = \left[\sqrt{\frac{1-6\alpha_{\text{sat}} + \alpha_{\text{sat}}^2}{4\alpha_{\text{sat}}^2} + \frac{G_{\text{med}}}{\alpha_{\text{sat}}} \left(\frac{1}{V+A} - 1 \right)} - \frac{1-\alpha_{\text{sat}}}{2\alpha_{\text{sat}}} \right] I_{\text{sat}} \quad (8.10)$$

$$\approx \left[\sqrt{2.291 + 7.143 G_{\text{med}} \left(\frac{1}{V+A} - 1 \right)} - 3.071 \right] I_{\text{sat}}$$

Die dazugehörige ausgekoppelte Intensität erhält man durch Multiplikation mit dem Auskoppelfaktor A

$$I_{\text{asy}}^{\text{out}} = A I_{\text{asy}}. \quad (8.11)$$

Abb. 8.4 illustriert Gleichung (8.10). Sie zeigt die ausgekoppelte Intensität $I_{\text{asy}}^{\text{out}}$ (8.11) in Einheiten der Sättigungsintensität (6.39) als Funktion von Kleinsignal-Verstärkung G_{med} (6.11)

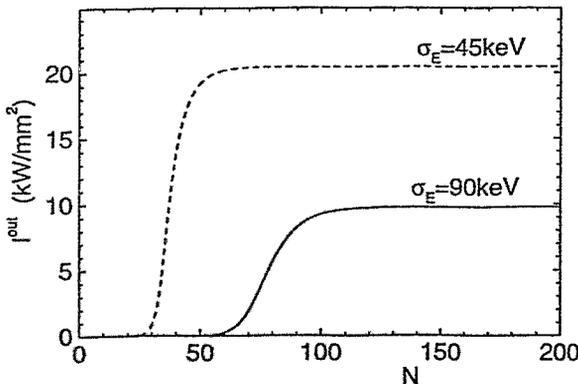


Abbildung 8.3: Entwicklung der ausgekoppelten Laserintensität I^{out} (8.5) in Abhängigkeit von der Anzahl N der Umläufe des Strahles für den $U27 \times 64$ Undulator für einen Elektronenstrahl mit der Unschärfe von 90 keV (durchgezogene Linie) bzw. 45 keV (gestrichelte Linie). Es werden 5% der Laserintensität ausgekoppelt. Die Verluste betragen ebenfalls 5%.

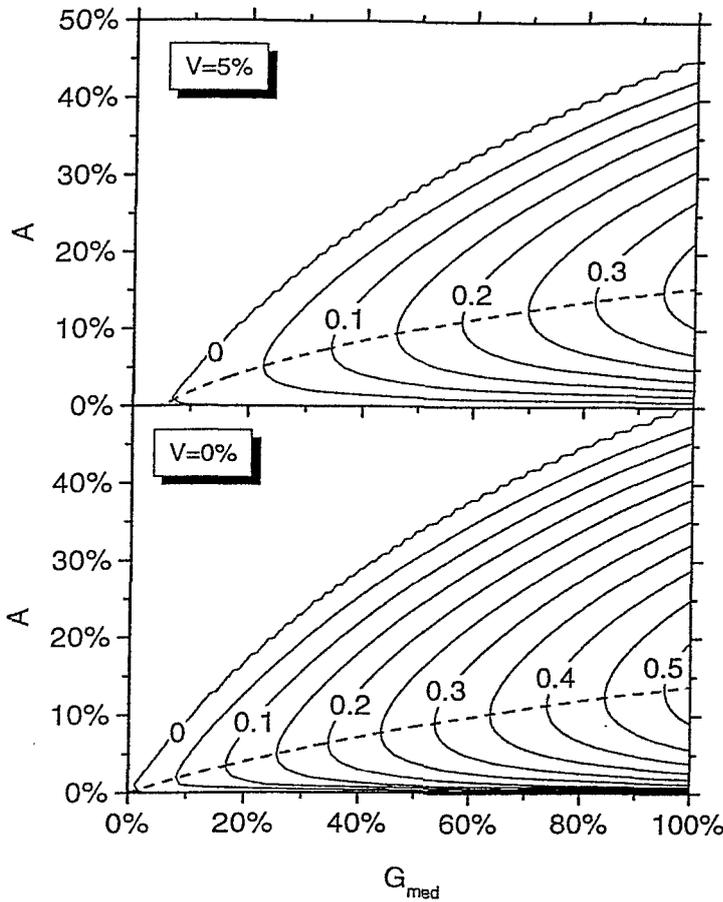


Abbildung 8.4: Ausgekoppelte Intensität I_{asy}^{out} (8.11) in Einheiten der Sättigungsintensität I_{sat} (6.39) bei optimaler Desynchronisation (6.17) in Abhängigkeit von der Kleinsignal-Verstärkung G_{med} und dem Auskoppelfaktor A ohne Resonatorverluste ($V = 0$) (unteres Bild) bzw. für 5% Verluste (oberes Bild). Die gestrichelten Linien zeigen die optimale Auskoppelung bestimmt durch Gl. (8.12), für die die ausgekoppelte Intensität bei gegebenem Verlustfaktor in Abhängigkeit von der Kleinsignal-Verstärkung maximal ist.

und Auskoppelfaktor A . Die ausgekoppelte Intensität ist gleich Null für $A = 0$ bzw. $A = A_{max}$ (8.8) und hat dazwischen ein Maximum bei der optimalen Auskoppelung A_{opt} , deren Wert allein durch die Verstärkung G_{med} und den Verlustfaktor V bestimmt wird. Die optimale Auskoppelung muss numerisch gemäß

$$\left. \frac{dI_{asy}^{out}}{dA} \right|_{A=A_{opt}} = 0 \quad (8.12)$$

bestimmt werden. Der optimale Auskoppelfaktor ist in Abb. 8.4 als gestrichelte Linie eingetragen. Er liegt für ELBE in Abhängigkeit vom Lasergewinn etwa zwischen 1% und 8%. Die dabei auszukoppelnde Intensität beträgt zwischen 5% und 30% der Sättigungsintensität (6.39).

Der optimale Auskoppelfaktor bestimmt zusammen mit der korrigierten Kleinsignal-Verstärkung G_{med} , der Sättigungsintensität I_{sat} und den Resonatorverlusten V die maximal auszukoppelnde Laserintensität. Da die ersten beiden Größen von der Elektronenenergie und dem Undulatorparameter abhängen, variiert auch die maximale Laserintensität stark mit E_e und K_{rms} wie in den Abbildungen 8.5 und 8.6) gezeigt wird. Betrachten wir zuerst den Fall des Lasens in der 1. Harmonischen. Hier steigt im Energiebereich von 15 MeV bis 40 MeV die maximal auszukoppelnde Intensität mit wachsender Elektronenenergie um 2 Größenordnungen. Geht man dagegen mit dem Undulatorparameter unter einen Wert von etwa 0.4, so wird die Intensität schnell sehr klein, praktisch unabhängig von der Elektronenenergie. Anders ist das Verhalten beim Lasen in der 3. Harmonischen (Abb. 8.6). Hier wird nur in der Nähe der Obergrenzen von Undulatorparameter und Elektronenenergie eine hinreichende Intensität des Laserstrahls erreicht. Insbesondere beim U27×32 reicht die Verstärkung nicht aus, um die angenommenen 5% Verluste pro Umlauf zu kompensieren.

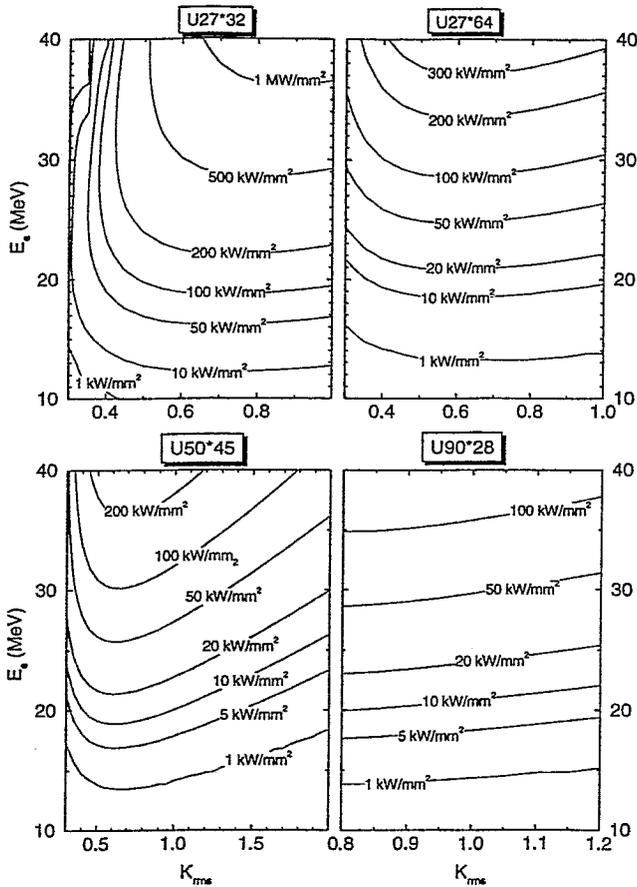
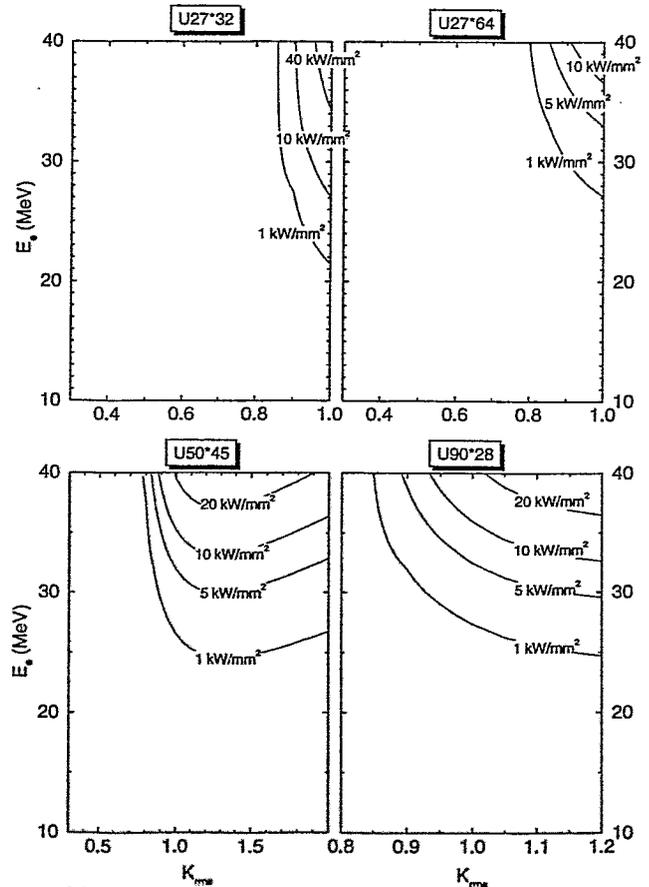


Abbildung 8.5: Ausgekoppelte Intensität I_{asy}^{out} (8.11) bei optimaler Auskoppelung A_{opt} (8.12) und einem Gesamtverlust von 5% für die für ELBE vorgesehenen Undulatoren in Abhängigkeit von Undulatorparameter K_{rms} und Elektronen-Energie E_e berechnet mit den Parametern aus Tab. 2.1 – 2.3. Die mittlere Intensität erhält man durch Multiplikation mit dem Mikro-Tastverhältnis $\sqrt{2\pi}\sigma_t f_{micro} \approx 5 \times 10^{-5}$.

Abbildung 8.6: Dasselbe wie in Abb. 8.5 für die 3. Harmonische.



Wie sich das Laserfeld inner- und außerhalb des Resonators in Abhängigkeit von der Größe des Auskoppelfaktors A zeitlich entwickelt, wird in Abb. 8.7 illustriert. Ein stabiler Wert der Intensität wird je nach Auskoppelfaktor nach 100 bis 400 Umläufen erreicht. Das Maximum an

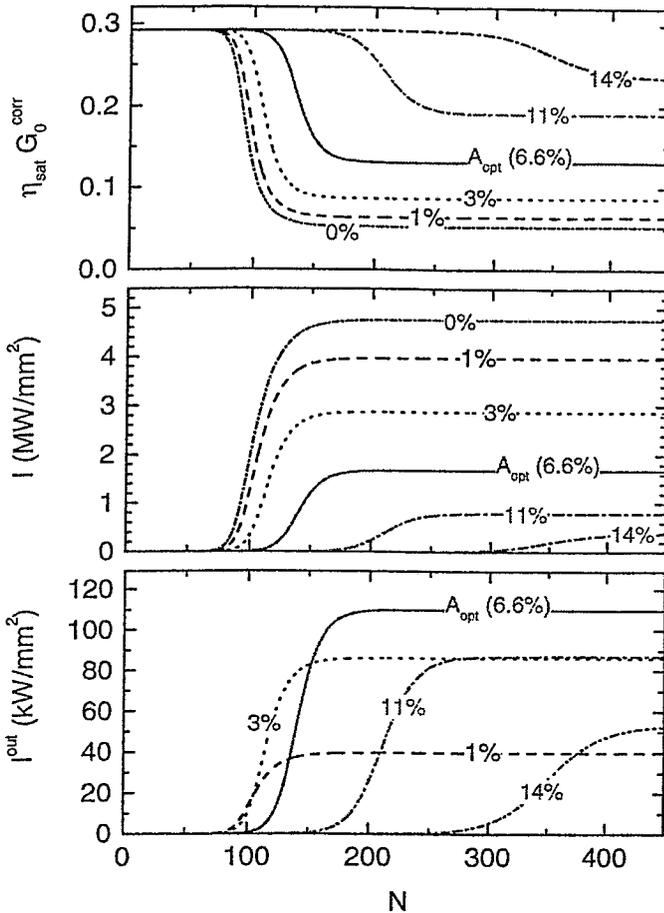


Abbildung 8.7: Entwicklung von Laserverstärkung (oberer Teil), Laserintensität im Resonator (mittlerer Teil) und ausgekoppelter Intensität (unterer Teil) in Abhängigkeit von der Anzahl N der Umläufe des Laserstrahles für verschiedene Auskoppelfaktoren von 0% bis 14%. Die Kleinsignal-Verstärkung beträgt in allen Fällen 29.2%. Die Verluste im Resonator wurden mit 5% angesetzt.

Rechnung für den $U27 \times 32$ bei 20 MeV und $K_{\text{rms}} = 1.0$.

ausgekoppelter Leistung erhält man bei dem durch Gl. (8.12) bestimmten optimalen Auskoppelfaktor A_{opt} . Er beträgt in dem betrachteten Fall 6.6%. Im Resonator ist die Intensität um so größer, je geringer die Auskoppelung ist. Sowohl für einen Auskoppelfaktor von 3% als auch von 11% erhält man annähernd die gleiche ausgekoppelte Intensität. In beiden Fällen ist sie um etwa 20% kleiner als bei der optimalen Auskoppelung. Das bedeutet, dass der Auskoppelfaktor in einem relativ großen Bereich variieren kann, ohne dass sich die ausgekoppelte Intensität allzu stark ändert. Bei einer größeren Auskoppelung wird nur der Aufbau des Feldes gegenüber dem Fall einer geringeren Auskoppelung etwas verzögert. (Die Zeit für einen einzelnen Umlauf des Laserstrahles im Resonator beträgt $t_U = 1/f_{\text{micro}} \approx 84.6$ ns.) Die relative Konstanz der ausgekoppelten Intensität ist von Bedeutung bei Verwendung eines Resonators mit Lochauskoppelung, bei dem der Auskoppelfaktor stark von der transversalen Struktur des optischen Feldes abhängt, die beim Aufbau des Laserfeldes stark variieren kann (Modensprünge). Eine drastische Reduktion der ausgekoppelten Intensität setzt erst in der Nähe von $A = 0$ bzw. von $A = A_{\text{max}}$ (8.8) ein. Bei 14% Auskoppelung ist das interne Feld zu schwach. Dagegen ist es bei 1% Auskoppelung zwar stark, es wird aber nur geringer Teil davon ausgekoppelt. Der Fall $A = 0$ stellt einen Extremfall dar, bei dem das interne Feld maximal ist, von dem man aber nichts nach außen bekommt.

9 Zusammenfassung

Ziel der Arbeit war es, die physikalischen Vorgänge in den für die Strahlungsquelle ELBE vorgesehenen Freie Elektronen Laser mit Hilfe einfacher Modelle zu erläutern und qualitativ und quantitativ zu erfassen. Durch den Vergleich häufig verwendeter Näherung in algebraischer Form mit Simulationsrechnungen für die Bewegung von Test-Elektronen durch das Undulatorfeld konnte eine gewisse Sicherheit beim Umgang mit Näherungsausdrücken für die ELBE FEL gewonnen werden. Für eine exaktere quantitative Beschreibung sind jedoch aufwendigere Modelle und die dazugehörigen umfangreichen Rechenprogramme notwendig. Diese müssen insbesondere die konkrete transversale und longitudinale Struktur der Elektronen- und der optischen Pulse berücksichtigen. Das konnte hier nur in der Form von Mittelwerten berücksichtigt werden. Hier sollte eher das qualitative Verständnis der physikalischen Vorgänge gefördert und eine quantitative Einordnung der in Rossendorf in Bau und Entwicklung befindlichen Anlage vorgenommen werden.

Trotz der Einschränkungen bezüglich der Genauigkeit der gemachten Aussagen kann man festhalten, dass die für ELBE ins Auge gefassten und in dieser Arbeit untersuchten Undulatoren Laserstrahlung von $5\ \mu\text{m}$ bis $200\ \mu\text{m}$ mit einer Intensität bis zu $100\ \text{kW}/\text{mm}^2$ im Peak bei 20 MeV Elektronenenergie und bis zu $1\ \text{MW}/\text{mm}^2$ bei 40 MeV erzeugen können. Das entspricht einer Energie von etwa $2\ \mu\text{J}$ ($20\ \mu\text{J}$) pro Laserpuls oder einer mittleren optischen Leistung von 20 W (200 W).

Mit einem Gewinnfaktor über 1.0 könnten die FEL von ELBE im sog. Medium-Gain Regime arbeiten, das sich durch ein beginnendes exponentielles Wachstum der Laserintensität während eines Durchlaufs durch den Undulator auszeichnet und somit höhere Laserintensitäten erzeugt. Die Energieunschärfe des Elektronenstrahls von ca. 90 keV verhindert aber weitgehend das dazu notwendige Mikrobunching und macht somit diesen Vorteil zunichte. Ein Lasen in der 3. Harmonischen ist, wenn überhaupt, nur in der 2. Ausbaustufe bei einer Elektronenenergie in der Nähe von 40 MeV und an der oberen Grenze des jeweiligen Undulatorparameters möglich. Bei der Arbeit in den oberen Wellenlängenbereichen der untersuchten Undulatoren mit Ausnahme des elektromagnetischen wird der optische Strahl durch das in den Undulator eingebaute Strahlrohr beschnitten, was zu größeren Verlusten führt. Deshalb ist es ratsam, einen geeigneten Wellenleiter zu verwenden, der die transversale Ausdehnung des optischen Strahles und damit auch die Lasereigenschaften stark verändert. Dazu müssen noch gesonderte Rechnungen durchgeführt werden.

Der Autor möchte sich bei den Kollegen der Abteilung KF des Institutes für Kern- und Hadronenphysik am Forschungszentrum Rossendorf für viele nützliche Diskussionen bedanken, die wesentlich zu seinem Verständnis für die anstehenden Probleme, insbesondere im Blick auf die praktische Realisierung des FEL Projekts beigetragen haben. Von besonderem Nutzen waren auch die Diskussionen mit den Mitarbeitern der Zentralabteilung Neue Beschleuniger, die ihm insbesondere einen Blick aus technischen Sicht eröffnet haben. Zu besonderem Dank ist er den Herren S. Benson von der Thomas Jefferson National Accelerator Facility in Newport News (USA) und G. P. Gallerano vom ENEA Institut in Frascati (Italien) verpflichtet, die ihre reichhaltigen Erfahrungen auf dem Gebiet der Modellierung von Freie Elektronen Lasern bereitwillig zur Verfügung stellten.

Literatur

- [1] FZR Annual Reports 1996 and 1997
- [2] *Projekt Strahlungsquelle ELBE, Maschinentechnisches Konzept (Design Report)*, Fassung vom 29.10.98, Kapitel 1, http://www.fz-rossendorf.de/FWQ/report_d.htm
- [3] Dattoli G., A. Renieri and A. Torre, *Lectures on the Free Electron Laser Theory and Related Topics* (World Scientific, Singapore, 1993)
- [4] Feldhaus J. and B. Sonntag, *Synchrotron Radiation News* 11 (1998) 14
- [5] Ciocci F., E. Fiorentino, G.P. Gallerano, A. Renieri and E. Sabia, *Nucl. Instr. and Meth. A* 250 (1986) 134
- [6] Berryman, K.W. *Design, operation and applications of far-infrared free electron lasers* Dissertation 1995, Dept. of Physics, Stanford University
- [7] Siegman A. E., *Lasers* (University Science Books, Sausalita CA, 1986)
- [8] Abramowitz M. und I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publ., New York, 1968)
- [9] Martini, F., *Free Electron Laser Handbook*, Vol. 6 eds. W.B. Colson, C. Pellegrini and A. Renieri (North-Holland, Amsterdam, 1990) Chap. 6
- [10] Colson, W.B. *Free Electron Laser Handbook*, Vol. 6 eds. W.B. Colson, C. Pellegrini and A. Renieri (North-Holland, Amsterdam, 1990) Chap. 5
- [11] Dattoli G., L. Gianessi, P.L. Ottaviani and A. Segreto, *Nucl. Instr. and Meth.* 393 (1997) 339
- [12] Richter A., *Phys. Bl.* 54 (1998) 31
- [13] Hogan M. J. et al., *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998) 4867
- [14] Murphy J.B. and C. Pellegrini, *Free Electron Laser Handbook*, Vol. 6 eds. W.B. Colson, C. Pellegrini and A. Renieri (North-Holland, Amsterdam, 1990) Chap. 2
- [15] Colson, W.B., J. C. Gallardo and P.M. Bosco, *Phys. Rev. A* 34 (1986) 4875
- [16] Dattoli, G., H. Fang, L. Gianessi, M. Richetta, A. Torre and R. Caloi, *Nucl. Instr. and Meth. A* 285 (1989) 108
- [17] Dattoli, G., M. Galli and P.L. Ottaviani, ENEA RT/INN/93/09
- [18] Dattoli G., T. Letardi, J.M.J. Madey and A. Renieri, *IEEE J. Quantum Electron.* QE-20 (1984) 637
- [19] Bizzarri, U. et al, *The Free Electron Laser: Status and Perspectives*, ENEA Rept. RT/TIB/85/49 (1985)
- [20] Bizzarri U. et al., *Revista del Nuovo Cimento* 10 (1987) 1
- [21] van Amersfoort P. W. et al., The FELIX Project Status report April 1988, Rijnhuizen Report 88-176
- [22] van Amersfoort P. W. et al., *Nucl. Instr. and Meth. A* 296 (1990) 217

- [23] Nguyen, D. C., S. M. Gierman and P. G. O'Shea,
Nucl. Instr. and Meth. A **358** (1995) ABS 67
- [24] Benson S. V., CEBAF TN #94-065
- [25] Benson S. V TJNAF TN #96-037
- [26] R. P. Walker, *Nucl. Instr. and Meth.* **214** (1983) 497
- [27] Werkhoven G. H. C., B. Faatz and T. J. Schep, *Phys. Rev.* **E 50** (1994) 4063
- [28] Saldin E. L., E. A. Schneidmiller, M. V. Yurkov, *Phys. Rep.* **260** (1995) 187
- [29] Madey J. M. J., *Nuovo Cimento* **50** (1979) 64
- [30] Dattoli G., L. Giannessi and S. Cabrini, *IEEE J. Quant. Elect.*, **QE-28** (1992) 770-772

A Anhang

A.1 Einheiten, physikalische Konstanten (MKSA) und Umrechnungsfaktoren

Elementarladung:	e	$1.602\,177 \times 10^{-19} \text{ As}$
	$e^2 = 4\pi\epsilon_0 \alpha \hbar c$	
Lichtgeschwindigkeit:	c	$2.997\,925 \times 10^8 \text{ m/s}$
Ruhemasse des Elektrons:	m	$0.510\,999 \text{ MeV}/c^2$
Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante:	α	$1/137.035\,989$
Planck'sches Wirkungsquantum	$\hbar \equiv h/2\pi$	$0.658\,212 \times 10^{-15} \text{ eV s}$ $= 1.054\,573 \times 10^{-34} \text{ Js}$
	$\hbar c$	$197.327 \times 10^{-9} \text{ eV m}$ $= 3.1615 \times 10^{-26} \text{ Jm}$
Dielektrizitätskonstante:	ϵ_0	$8.854\,188 \times 10^{-12} \text{ As/Vm}$
Permeabilität des Vakuums:	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ ($\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$)
Klassischer Elektronenradius:	$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} = \frac{\alpha\hbar}{mc}$	$2.818 \times 10^{-15} \text{ m}$
Alfvén-Strom:	$I_A = 4\pi\epsilon_0 \frac{mc^3}{e} = \frac{ec}{r_e}$	$17\,045.1 \text{ A}$

UMRECHNUNGSFAKTOREN:

$\text{eV} \rightarrow \text{J}$:	1 eV	$=$	$1.602\,177 \times 10^{-19} \text{ J}$
Feldstärke \rightarrow Intensität:	1 MV/m	$\stackrel{\Delta}{=}$	2.654 kW/mm^2

A.2 Koordinatensysteme

KARTESISCHE KOORDINATEN x, y, z :

Wir verwenden ein Koordinatensystem mit der z -Achse in Richtung der Undulatorachse gelegen in der Mitte des Undulators. Das Magnetfeld zeigt in y -Richtung, und die Elektronen oszillieren in x -Richtung.

ZYLINDERKOORDINATEN ρ, Φ, z :

ρ bezeichnet den Abstand zur Undulatorachse und Φ den Azimutalwinkel.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \Phi = \arctan(x/y)$$

KUGELKOORDINATEN r, Θ, Φ :

Θ bezeichnet den Polarwinkel relativ zur Undulatorachse.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \quad \Theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z) = \arctan(\rho/z)$$

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

Wiggelebene:	xz -Ebene,	$\Phi = 90^\circ, 270^\circ$
Undulatorebene:	yz -Ebene,	$\Phi = 0^\circ$
Undulatorachse:	z -Achse	$\Theta = 0^\circ$.

A.3 Symbole und Bezeichnungen

Parameter	Symbol	Definition
-----------	--------	------------

Elektronenstrahl (Parameter im Laborsystem)

Elektronenenergie	E_e	
Lorentzfaktor	γ	E_e/mc^2
zur Strahlung der Wellenlänge λ gehörende Resonanzenergie (n -te Harmonische)	E_n	Gl. (7.3)
zu E_n gehörender Lorentzfaktor	γ_n	
Elektronengeschwindigkeit in Einheiten von c	β	v/c
Elektronenphase relative zur ponderomotiven Welle	θ	Gl. (7.5)
Energieunschärfe (rms)	σ_E	
Normierte Emittanz (rms) (Fläche der Phasenellipse/ π)	ϵ_n	
Wiederholrate der Mikropulse	f_{micro}	
Ladung der Mikropulse	Q	$I_{\text{av}}/f_{\text{micro}}$
Dauer der Mikropulse (rms)	σ_t	
Mittlerer Strom	I_{av}	
Strahlradius (rms)	$\sigma_{(x,y)}$	
Strahlquerschnitt	Σ_e	$2\pi\sigma_x\sigma_y$
Länge des Mikropulses (rms)	σ_z	$\beta c\sigma_t$
Elektronendichte im Puls	n_e	$Q/(e\Sigma_e\sqrt{2\pi}\sigma_z)$
Peakstrom	I_p	$e\beta c\Sigma_e n_e = \beta cQ/(\sqrt{2\pi}\sigma_z)$
Peakleistung	P_e	$E_e I_p/e$
Periode einer Betatronschwingung	λ_β	Gl. (2.5)
Bunchingfaktor	B	Gl. 7.9)
Anzahl der Test-Elektronen	N_e	
Lorentzfaktor und Phase des i -ten Test-Elektrons	γ_i, θ_i	

Undulator

Undulatorperiode	λ_U	
	k_U	$2\pi/\lambda_U$
Anzahl der Perioden	N_U	
Gesamtlänge	L_U	$N_U \lambda_U$
Amplitude des Magnetfeldes auf der Achse (rms)	B_U	
Undulatorparameter (rms)	K_{rms}	Gl. (2.4)

Parameter	Symbol	Definition
-----------	--------	------------

Optischer Strahl

Wellenlänge	λ	
Wellenzahlvektor	\mathbf{k}	$ \mathbf{k} = 2\pi/\lambda$
Frequenz	ω	$2\pi c/\lambda = c \mathbf{k} $
Ordnung der Strahlung	n	
Energieverstimmung	ν, ν_n	Gl. (4.3)
optimale Energieverstimmung	ν_{opt}	Gl. (6.8)
Amplitude des elektromagnetischen Feldes (rms)	\mathcal{E}	
Intensität (Energiestromdichte)	I	$\epsilon_0 c \mathcal{E}^2$
Intensität der spontanen Strahlung	I_{spon}	Gl. (8.1)
Phasenverschiebung	Ψ	
effektiver Strahlquerschnitt	Σ_{opt}	Gl. (5.9)
über den Undulator gemittelter Strahlquerschnitt	Σ_{opt}	Gl. (5.11)
2σ Radius der Grundmode	w	Gl. (5.1)
minimaler 2σ Radius der Grundmode (in der Taille)	w_0	Gl. (5.2)
Resonanzwellenlänge (n -te Harmonische)	λ_n	Gl. (3.1)
Resonanzfrequenz des optischen Strahls (n -te Harmonische)	ω_n	$2\pi c/\lambda_n$
Polar und Azimutalwinkel des optischen Strahls relative zur Undulatorachse	Θ, Φ	
Energie	E_{opt}	
Leistung	P_{opt}	

Resonator

Länge (Abstand zwischen den beiden Spiegeln)	L_R	$c/2f_{\text{micro}}$
Desynchronisation (Abweichung der Resonatorlänge von L_R)	δL_R	
Rayleighlänge des Resonators	z_R	Gl. (5.3)
Krümmungsradien der Spiegel	$R_{1,2}$	
relative Verluste im Resonator	V	
ausgekoppelter Anteil der Intensität	A	
maximal auszukoppeln-der Anteil	A_{max}	Gl. (8.7)
Strahlungsintensität innerhalb des Resonators im Gleichgewicht	I_{asy}	
ausgekoppelte Intensität im Gleichgewicht	$I_{\text{asy}}^{\text{out}}$	AI_{asy}
Intensität der spontanen Strahlung	I_{spon}	

Parameter	Symbol	Definition
-----------	--------	------------

FEL

Fillingfaktor	\mathcal{F}	Gl. (7.8)
Abschwächungsfaktor für die n -te Harmonische	B_n	Gl. (4.11)
Gewinnfaktor	g_0	Gl. (6.2)
Emittanz-korrigierter Gewinnfaktor	g_{ss}	Gl. (6.2)
Lasergewinn (single pass)	G	Gl. (6.1)
Lasergewinn im Low-Gain Regime	G_0	Gl. (6.6)
Lasergewinn im Medium-Gain Regime	G_{med}	Gl. (6.29)
Slippage-Parameter	μ_c	Gl. (6.14)
Slippagefaktor	η_{sl}	Gl. (6.12)
Desynchronisationsparameter	θ_{DSyn}	Gl. (6.15)
Energieunschärfe Korrekturfaktor	η_E	Gl. (6.19)
Emittanz Korrekturfaktor	η_{em}	Gl. (6.18) bzw. (6.21)
FEL oder Pierce Parameter (High-Gain Regime)	ρ	Gl. (6.33)
Gainlänge	l_{gain}	Gl. (6.34)
Sättigungsfunktion	η_{sat}	Gl. (6.38) bzw. (6.40)
Sättigungsintensität des optischen Strahls	I_{sat}	Gl. (6.39)