

WISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE BERICHTE

FZR-374

April 2003

ISSN 1437-322X



Archiv-Ex.:

Dietrich Hoppe

**Untersuchungen zur strukturellen
Modellverbesserung durch Symbiosen
zwischen Modellen**

Herausgeber:
Forschungszentrum Rossendorf e.V.
Postfach 51 01 19
D-01314 Dresden
Telefon +49 351 26 00
Telefax +49 351 2 69 04 61
<http://www.fz-rossendorf.de/>

Als Manuskript gedruckt
Alle Rechte beim Herausgeber

FORSCHUNGSZENTRUM ROSSENDORF



WISSENSCHAFTLICH-TECHNISCHE BERICHTE

FZR-374

April 2003

Dietrich Hoppe

**Untersuchungen zur strukturellen
Modellverbesserung durch Symbiosen
zwischen Modellen**

Das diesem Bericht zugrundeliegende Vorhaben wurde mit Mitteln der DFG unter dem Förderkennzeichen WE 2249/1-1 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt der Arbeit liegt allein beim Autor.

Kurzfassung

Im Zuge von Modellbildungen ist es nicht immer möglich, das zu beschreibende Objekt sofort oder direkt durch ein einzelnes Modell vollständig zu erfassen. Vielmehr wird es zunächst mehrere untergeordnete Modelle geben, die jeweils nur verschiedene eingeschränkte Sichten auf das Objekt repräsentieren. Im Beitrag wird untersucht, wie solche Modelle zu einer Modellsymbiose verbunden werden können und wie mit deren Hilfe dann nach einem verbesserten Einzelmodell des zu beschreibenden Objektes gesucht werden kann.

Inhalt

	Seite
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Konkretisierende Vorbetrachtungen	1
2 Modelle als Merkmalsmengen	2
3 Zur Vorhersagefähigkeit von Modellen	4
4 Modelle im Merkmalsraum	5
5 Maßnahmen zur Erschließung des Merkmalraumes	7
5.1 Variation von Modellen	7
5.2 Möglichkeiten des Zusammenwirkens von Modellen	8
6 Zur Auswahl von Symbiosepartnern für eine Modellsymbiose	11
7 Lokalisierung, Unschärfe und Vorhersagefähigkeit von Modellen	13
7.1 Modellierung auf der Grundlage der Fourier-Transformation	14
7.2 Modellierung auf der Grundlage der Haar-Wavelet-Transformation	18
7.3 Zusammenhang zwischen Modellunschärfe und Vorhersagefähigkeit	22
7.4 Beziehung zwischen stochastischen Abhängigkeiten des Originals und der Vorhersagefähigkeit eines Modells	24
8 Über die Gewinnung eines verbesserten Einzelmodells aus einer Modellsymbiose ..	27
9 Anwendungsbeispiele	30
9.1 Exponentialfunktion mit Rechteck-Modellen	30
9.2 Regelung des Kalt-Heiß-Wasseranteils in einer Dusche	37
9.3 System aus parallelen Übertragungsgliedern	42
9.4 Überdeckung von Flächen	49
10 Symmetrien in einer Symbiose zwischen Original und Modell	52
11 Zusammenfassung	56
Literatur	57

1 Einleitung

1.1 Motivation

Vorbereitend sei auf die bekannte Erscheinung verwiesen, dass unterschiedliche Fachgebiete zur gleichen Sache unterschiedliche Auffassungen entwickeln und dabei jeweils theoretisch-methodisch sehr fundiert vorgehen können, sie aber nachher oft kaum fähig sind, die verschiedenen Auffassungen zu einer für alle Beteiligten vorteilhaften gemeinsamen Auffassung weiterzuentwickeln. Desgleichen lässt sich zwischen einzelnen Personen finden. Wie sich zeigen lässt, ist diese Erscheinung auch sonst weit verbreitet. Sie hat im Rahmen der Modellbildung offensichtlich grundlegende Bedeutung.

Dass die Erarbeitung einer gemeinsamen Auffassung praktisch bisweilen eine erhebliche Schwierigkeit darstellt, weist indirekt darauf hin, dass es dafür noch keine ausreichend effizienten theoretischen Konzepte gibt. Die vorliegende Arbeit unternimmt den Versuch, zur Behandlung der genannten Problematik einen im wesentlichen regelungstechnisch orientierten, dabei aber weitgehend allgemein bleibenden methodischen Zugang zu finden.

1.2 Konkretisierende Vorbetrachtungen

Unter der Modellierung eines Objektes wird im weiteren verstanden, dass ein zu beschreibendes Objekt auf der Grundlage von Analogien durch verschiedene andere Objekte dargestellt wird, welche beispielsweise übersichtlicher oder leichter handhabbar sind als das zu beschreibende Objekt. Da eine Modellierung im allgemeinen ziel- oder zweckorientiert ist, sind nicht alle bestehenden Analogien auch von Bedeutung für die Modellierung; die notwendige Abgrenzung erfordert einen gewissen Modellierungsrahmen. Zur Unterscheidung der verschiedenen Objekte werden fortan das zu beschreibende Objekt als originales Objekt oder kurz Original und dessen analoge Objekte als Modelle bezeichnet. Die Modelle können realer oder ideeller (z.B. mathematischer) Natur sein. Sie können auf unterschiedlichsten Wegen gefunden werden, z.B. indem das Original nach ausgewählten Referenzobjekten klassifiziert wird, wobei in diesem Fall die Auswahl der Referenzobjekte gleichzeitig den Modellierungsrahmen festlegt. Die Herkunft der Modelle ist aber im weiteren von untergeordnetem Interesse; sie seien vorgegeben.

Praktisch wird meistens nicht immer sofort ein Modell gefunden, welches den festgelegten Modellierungsrahmen vollständig oder wenigstens annähernd ausfüllt. Dies liegt insbesondere an einem Mangel an A-priori-Information über das Original.¹ Statt eines vollständigen oder umfassenden Modells kann zunächst nur von mehreren unterschiedlichen Modellen ausgegangen werden, welche verschiedene eingeschränkte Sichten auf das Original repräsentieren und die bestenfalls in ihrer Gesamtheit den Modellierungsrahmen des Originals auszufüllen vermögen. Wenigstens kann dabei aber unterstellt werden, dass die Gesamtheit der vorgegebenen Modelle mehr Information über das Original repräsentiert als jedes dieser Modelle für sich allein. Deshalb liegt es nahe, die über verschiedene Modelle verteilte und allesamt das Original betreffende Information in einem einzigen Modell zusammenzuführen und damit ein verbessertes Modell des Originals zu erreichen, d.h. ein Modell mit einem verringerten Fehler gegenüber dem Original. Praktisch wird es allerdings schwierig sein, ein solches Modell unmittelbar zu bestimmen. Deswegen wird für die Suche nach einem besseren Modell als Zwischenschritt vorgesehen, die vorgegebenen Modelle in eine für die Beschreibung des Originals vorteilhafte Verbindung miteinander zu bringen. Wenngleich ein solches Verbindungs- bzw. Verbundmodell nur von außen wie ein selbständiges Modell erscheint, kann es trotzdem eine bessere Beschreibung des Originals darstellen, als dies jedes am Verbund-

¹ Zum einen muss eine gewisse Mindestinformation über das Original bekannt sein, denn ohne A-priori-Information wäre eine Modellbildung unmöglich. Demgegenüber wäre eine Modellbildung nutzlos oder überflüssig, wenn die A-priori-Information über das Original bereits vollständig wäre, vgl. [Wo89]. Also kann bei realen Modellbildungsproblemen stets davon ausgegangen werden, dass eine gewisse A-priori-Information zwar vorhanden aber (meistens sehr) unvollständig ist.

modell beteiligte Modell einzeln ist. Verständlicherweise sollten die Vorteile der Einzelmodelle innerhalb des Verbundmodells erhalten bleiben. Diesen Vorteilen braucht das Verbundmodell dann lediglich seine spezifischen, aus der Verschiedenheit der Einzelmodelle resultierenden Vorteile hinzuzufügen. Die Beibehaltung der Vorteile der Einzelmodelle ist allerdings nur dann sichergestellt, wenn die Einzelmodelle innerhalb des Verbundmodells eigenständig bleiben bzw. sich nicht gegenseitig verändern.² Für ein so charakterisiertes Verbundmodell wird die Bezeichnung Modellsymbiose eingeführt. Ähnlich einer biologischen Symbiose, in welcher eigenständig bleibende Individuen zum gegenseitigen Vorteil zusammenwirken, sollen also eigenständig bleibende Modelle innerhalb einer Modellsymbiose eine verbesserte Beschreibung des Originals erreichen. Als mögliche Formen von Modellverbindungen, in denen die Modelle eigenständig bleiben, werden in diesem Beitrag die Parallelschaltung der Modelle und die zeitliche Umschaltung zwischen den Modellen näher betrachtet.

Als Grundlage zur Betrachtung der verschiedenen Modelle werden Merkmale gewählt. Die Merkmale gelten dabei als Koeffizienten, welche interessierende Eigenschaften oder Bedeutungen des Originals widerspiegeln. Merkmale zeichnen sich dadurch aus, dass sie die betreffenden Eigenschaften einerseits rein qualitativ ausdrücken können, wobei die Modelle als Merkmalsmengen erscheinen, und andererseits quantitativ, wobei die Modelle in einem Merkmalsraum positioniert sind.

An einem Verbundmodell oder einer Modellsymbiose werden im weiteren diejenigen Merkmale als wesentlich angesehen, welche die Einzelmodelle sowohl mit dem Original als auch untereinander gemeinsam haben. Diese Merkmale werden fortan relevante Merkmale genannt. Neben diesen Merkmalen werden von der Modellsymbiose aber auch alle irrelevanten Merkmale der Einzelmodelle übernommen. Wie sich zeigen lässt, ist im Verbindungsmodell sogar mit einem Übermaß an irrelevanten Merkmalen zu rechnen. Dies kann sich dann praktisch in einer gewissen Schwerfälligkeit der Modellsymbiose äußern, einer vergleichsweise schlechten Handhabbarkeit usw. Deshalb sollte letztlich angestrebt werden, die Modellsymbiose durch ein verbessertes Einzelmodell des Originals zu ersetzen.

Zur Bewertung der Ähnlichkeit, welche das jeweilige Modell innerhalb des gültigen Modellierungsrahmens mit dem Original aufweist, sei ein Güte- bzw. Fehlerkriterium vorhanden. Anhand der vorgegebenen Modelle sollen möglichst viele Merkmale des Originals möglichst genau bestimmt werden, so dass die mit Hilfe dieser Merkmale durchzuführende Suche nach einem verbesserten Einzelmodell des Originals von so wenig wie möglich Mehrdeutigkeiten erschwert wird. Für die Bestimmung oder Vorhersage von Merkmalen, welche von einem verbesserten Modell erwartet werden, wird im vorliegenden Beitrag eine allgemeingültige Methode gesucht. In diesem Zusammenhang werden auch solche Probleme wie die Bestimmung relevanter Merkmale, die Bedeutung der Unschärfe von Merkmalen oder die Bedeutung bestimmter Symmetrien von Merkmalen erörtert. Die Anwendung der gefundenen Methode wird an mehreren Beispielen verdeutlicht.

2 Modelle als Merkmalsmengen

Die Gemeinsamkeit eines Modells mit seinem Original oder von Modellen untereinander äußert sich in gemeinsamen Merkmalen dieser Objekte. Zunächst werden die Merkmale nur qualitativ bzw. binär betrachtet, d.h. ohne Berücksichtigung des Merkmalswertes wird nur zwischen dem Vorhandensein und dem Nichtvorhandensein eines Merkmals unterschieden. Damit erscheinen die Modelle in Form von Merkmalsmengen.

Die Schnittmenge eines Modells mit seinem Original ist immer eine echte Teilmenge des Modells. Das Modell hat deshalb (neben möglicherweise relevanten) immer auch irrelevante

² Wenn die Einzelmodelle durch ihre Verbindung gar ihre Eigenschaft verlieren würden, Modell des Originals zu sein, könnte im allgemeinen auch von der Verbindung nicht mehr erwartet werden, dass sie noch zur Beschreibung des Originals fähig ist.

Merkmale.³ Weil das Original nur mittelbar durch seine Modelle bekannt ist, kann nicht garantiert bzw. nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit angegeben werden, ob ein Merkmal aus einer Schnittmenge von Modellen gleichzeitig ein Merkmal des Originals und folglich auch relevant ist.⁴ Im allgemeinen überwiegt die Menge der irrelevanten Merkmale eines Modells bei weitem gegenüber der Menge seiner relevanten Merkmale, insbesondere bei realen (nicht ideellen) Modellen.⁵ Entsprechend klein ist die Wahrscheinlichkeit der Relevanz eines Modellmerkmals.

Eine erhöhte Wahrscheinlichkeit der Merkmalsrelevanz besteht in den Überschneidungen von Merkmalsmengen. Gegeben seien die (auf Merkmalsmengen reduzierten) Modelle M_1, M_2, M_3, \dots . Ein Merkmal aus der Merkmalsmenge M_1 sei mit der Wahrscheinlichkeit $P(M_1)$ relevant. Wenn nun das gleiche Merkmal auch zur Schnittmenge $M_1 \cap M_2$ gehört, dann kann es mit einer größeren Wahrscheinlichkeit $P(M_1 \cap M_2)$ relevant sein usw. Allgemein gilt

$$P(M_1) \leq P(M_1 \cap M_2) \leq P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) \leq \dots < 1. \quad (2.1)$$

Zur Verdeutlichung von (2.1) wird das Bild 2-1 betrachtet. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass der Modellierungsrahmen nicht durch vorliegende Schnittmengen bestimmt wird, sondern vorgegeben ist und den gesamten Bildinhalt von Bild 2-1 einschließt.

Das Bild 2-1a) zeigt die gemeinsame Schnittmenge zwischen dem Original und seinen drei Modellen M_1, M_2 und M_3 . Merkmale aus dieser Schnittmenge sind garantiert, d.h. mit der Wahrscheinlichkeit 1 relevant. Weil jedoch ein Original voraussetzungsgemäß nicht durch eine eigenständige Merkmalsmenge bekannt ist, sondern nur mittelbar durch seine Modelle, können garantiert relevante Merkmale auch nicht als solche nachgewiesen werden.

Die nur zwischen den drei Modellen bestehende ist im Bild 2-1b) dargestellt. Aus den Anzahlen der eingezeichneten Merkmale geht hervor, dass die Wahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit) der Relevanz eines einzelnen Merkmals hierbei nur noch $P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) = \frac{4}{8} = 0,5$ ist. Schließlich werden von den drei vorgegebenen Modellen nur je zwei Modelle miteinander überschritten und die dabei entstehenden drei Schnittmengen vereinigt, Bild 2-1c). In dieser Vereinigungsmenge ist die Wahrscheinlichkeit der Merkmalsrelevanz nur noch $P((M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \cup (M_2 \cap M_3)) = \frac{5}{12} = 0,42$. Über die Relevanz der disjunkten, d.h. außerhalb der jeweils gewählten Schnittmengen befindlichen Merkmale kann nichts ausgesagt werden; sie werden als irrelevant angenommen.

³ Die Existenz irrelevanter Merkmale ist indirekt bereits dadurch begründet, dass das Original und sein Modell voneinander unterscheidbar sind. Gäbe es nämlich ausschließlich übereinstimmende Merkmale, wären Original und Modell identisch und damit nicht mehr voneinander unterscheidbar.

⁴ Beispiel: Ein Fußball sei das Original und ein Apfel und eine Birne zwei seiner Modelle. Ein Merkmal von Apfel und Birne ist es, ein Kerngehäuse zu besitzen. Dieses Merkmal ist irrelevant, denn es kommt nicht gleichzeitig im Original nicht vor. Eine relevantes Merkmal ist hingegen die (mehr oder weniger) runde Form, denn sie ist bei allen drei Objekten vorhanden.

⁵ Apfel und Fußball als reale Objekte haben zwar verschiedene gemeinsame Merkmale, diese Gemeinsamkeit beschränkt sich aber – vereinfacht gesehen – auf einen endlichen Bereich innerhalb eines insgesamt unbegrenzten Betrachtungsmaßstabes. Um auch relevant zu sein, muss der Bereich der Gemeinsamkeiten zusätzlich zu dem (durch die anderen Modelle bestimmten) Modellierungsrahmen gehören. So haben ein Fußball und ein Apfel z.B. auch das gemeinsame Merkmal, eine durchgehend konvexe (nach außen gewölbte) Oberfläche zu besitzen. Bei einer Birne ist dies nicht der Fall, denn ihre Oberfläche ist teilweise konkav. Das betreffende Merkmal befindet sich somit nicht im Modellierungsrahmen und ist deshalb auch nicht relevant.

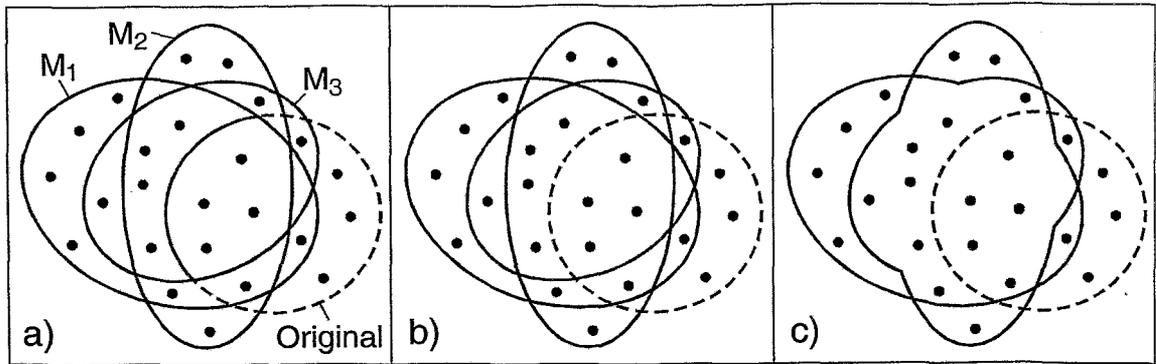


Bild 2-1: Original, drei Modelle M_1 , M_2 , M_3 , verschiedene Schnittmengen (grau) und Merkmale (•)
a) Gemeinsame Schnittmenge zwischen Original und allen drei Modellen,
b) Schnittmenge zwischen allen drei Modellen
c) Vereinigung der Schnittmengen je zweier Modelle

Bei abnehmender Anzahl der sich jeweils direkt bzw. primär überschneidenden Modelle wächst also die Vereinigungsmenge der primären Schnittmengen und damit die Anzahl derjenigen Merkmale, welche mit einer Wahrscheinlichkeit größer Null als relevant gelten, nämlich von b) nach c) von 8 auf 12 Merkmale. Trotz abnehmender Wahrscheinlichkeit der Relevanz des einzelnen Merkmals nimmt dabei auch die Anzahl der tatsächlich relevanten Merkmale zu, nämlich von b) nach c) von 4 auf 5 Merkmale. Dies lässt allgemein die Schlussfolgerung zu, dass die vereinigte Schnittmenge dann die meisten tatsächlich relevanten Merkmalen enthält, wenn sich primär nur jeweils zwei Modelle überschneiden. Dies ist von praktischer Bedeutung, falls insgesamt nur mit wenigen relevanten Merkmalen gerechnet werden kann, z.B. wenn unter widrigen Umständen nur schlechte Modelle verfügbar sind. Hinsichtlich einer zielgerichteten Suche nach einem verbesserten Modell sind hingegen hohe Wahrscheinlichkeiten für die Merkmalsrelevanz wünschenswert und deshalb primär entsprechende Mehrfachüberschneidungen von Modellen erforderlich. Bei schlechten Modellen kann dies jedoch bedeuten, dass in der resultierenden Schnittmenge überhaupt keine relevanten Merkmale enthalten sind. Der somit erforderliche Kompromiss muss für jedes praktische Modellierungsproblem separat gefunden werden.

3 Zur Vorhersagefähigkeit von Modellen

Überschneidungen von Modellen erfassen nicht notwendig sämtliche relevanten Merkmale, welche in den Merkmalsmengen der vorgegebenen Modelle enthalten sind. Disjunkte, d.h. zu keiner Schnittmenge gehörende Modellmerkmale bleiben dabei nämlich unberücksichtigt. Dies betrifft im Bild 2-1c) zwei der insgesamt zehn relevanten, also auch zum Original gehörenden Merkmale. Auf solche Merkmale kann im Interesse einer möglichst genauen Modellierung des Originals bzw. einer möglichst weitgehenden Modellverbesserung nicht verzichtet werden.

Um auch die disjunkten Merkmale zu erfassen, werden mögliche Abhängigkeiten berücksichtigt, die innerhalb eines Objektes und damit auch zwischen dessen Merkmalen vorkommen können. Von den bekannten oder wahrscheinlich relevanten Merkmalen ausgehend soll über diese Abhängigkeiten auf noch unbekannte Merkmale des Originals geschlossen werden können.

Prinzipiell können gegenseitige Abhängigkeiten von Merkmalen durch selbständige Merkmale ausgedrückt werden. Diese Möglichkeit wird hier nicht weiter berücksichtigt, denn sie ist praktisch nicht immer gegeben. Statt dessen sollen die zwischen Merkmalen bestehenden Abhängigkeiten durch Unschärfen der Merkmale ausgedrückt werden, d.h. die zu den Merk-

malen gehörenden realen Eigenschaften der Modelle gelten als nicht scharf lokalisiert.⁶ Im Bild 3-1 wird schematisch versucht, Unschärfen von Merkmalen mit der Mengendarstellung der Merkmale in Verbindung zu bringen. Im Bild 3-1 links befinden sich die Merkmalsmengen eines Originals (gestrichelt) und dreier vorgegebener Modelle (durchgehende Linien) sowie Überschneidungen jeweils zweier Modelle (grau). In den Überschneidungen befinden sich fünf relevante Merkmale. Die Unschärfen bzw. die unscharfen Lokalisierungen der Merkmale sind durch gepunktete Kreislinien angedeutet, welche die eingezeichneten Merkmale umgeben. Die Radien dieser Kreise deuten die Reichweiten der Unschärfen an. Die Unschärfen vergrößern die von den Modellen erfassten Gebiete und folglich auch deren Überschneidungen; die hinzukommenden Gebiete von Überschneidungen je zweier Modelle sind im Bild 3-1 rechts grau markiert.

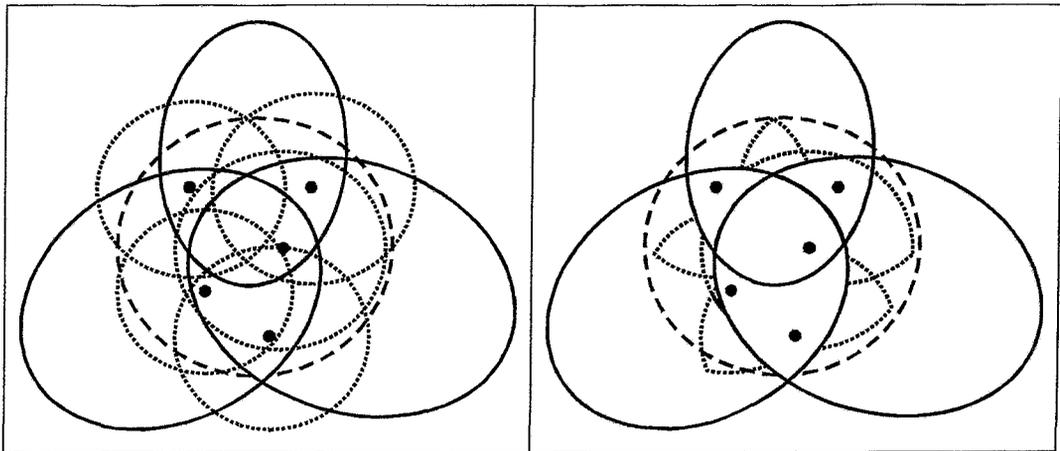


Bild 3-1: Zur Wirkung von Unschärfen, Erläuterung im Text

Die Gesamtheit der im Bild 3-1 grau markierten Flächen hat sich durch die Unschärfen vergrößert und erfasst dadurch einen größeren Teil des Originals. Somit ist es möglich, zusätzliche relevante Merkmale zu erfassen bzw. bisher noch unbekannte Merkmale des Originals vorherzusagen. Die Problematik der Vorhersagefähigkeit von Modellen wird im Abschnitt 7 auch noch aus der Sicht verschiedener Integraltransformationen betrachtet.

4 Modelle im Merkmalsraum

Anhand gemeinsamer Merkmale der vorgegebenen Modelle ist es möglich, diese Modelle zu einem umfassenderen Modell zu verbinden. Für diesen Zweck gibt es eine algebraische Methode [Ho99], [Ho02]. Voraussetzung ist dann jedoch, dass die gemeinsamen Merkmale auch reale Gemeinsamkeiten zwischen den betreffenden Modellen, d.h. zwischen den als Modelle geltenden Objekten widerspiegeln. Nur dann können die Überschneidungen von Merkmalsmengen vorgegebener Modelle auch praktisch als Verknüpfungen dieser Modelle realisiert werden. Diese Voraussetzung ist dann erfüllt, wenn die Modelle tatsächlich Teile eines Ganzen, d.h. eines Gesamtobjektes beschreiben und dabei alle von derselben Blickrichtung auf das Original aus gebildet worden sind. Letzteres kann z.B. bedeuten, dass ausschließlich Übertragungsglieder als Modelle gelten und diese nur für bestimmte Arten von Ein-/Ausgangsgrößen betrachtet werden dürfen. Diese Übertragungsglieder können dann anhand ihrer Ein-/Ausgangsgrößen zu einer Schaltung zusammengesetzt werden. Allgemein brauchen gemeinsame Merkmale noch keine reale Zusammengehörigkeit der betreffenden Modelle widerzuspiegeln. So kann z.B. ein originales Schwingungsglied einmal

⁶ Das Merkmal „Rundheit“ bei Apfel, Birne und Fußball ist insofern unscharf, als es an eine bestimmte geometrische Form wie z.B. die Kugelform, nicht streng gebunden ist.

aus mechanischer Sicht durch ein Feder-Masse-System und einmal aus elektrischer Sicht durch ein RC-Netzwerk modelliert werden. Beide Modelle haben die Merkmale Frequenz und Phase, trotzdem besteht keine Möglichkeit, die Modelle vermittels dieser Merkmale direkt miteinander zu verbinden.

Um die verschiedenen vorgegebenen Modelle eines Originals bei Nichterfüllung der genannten Voraussetzung wenigstens lose miteinander in eine Verbindung bringen zu können, werden die Merkmale fortan nicht mehr nur qualitativ betrachtet, d.h. nicht nur nach ihrem Vorhandensein oder Nichtvorhandensein, sondern auch quantitativ, also nach ihrem Wert. Dazu werden die Modelle in einem Merkmalsraum dargestellt, vorzugsweise in einem Raum von relevanten Merkmalen. Die Qualitäten der Merkmale bestimmen dabei die Basisrichtungen und damit auch die Dimension des Raumes, während die Quantitäten der Merkmale die unterschiedlichen Positionen der Modelle im Raum festlegen, s. Bild 4-1.

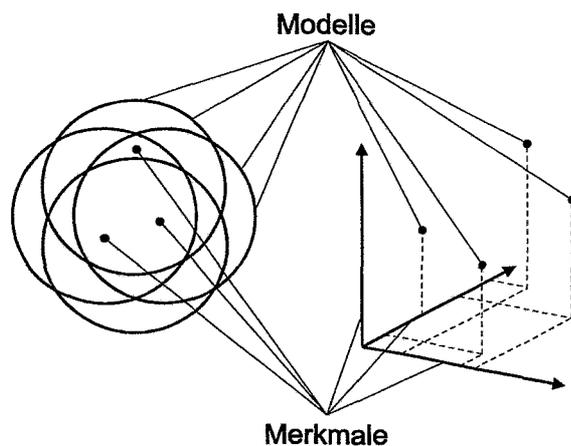


Bild 4-1: Vier Modelle mit drei Merkmalen, links durch rein qualitativ Merkmalsmengen dargestellt und rechts in einem Merkmalsraum, in dem sich die Modelle in denjenigen Positionen befinden, welche durch die Werte der Merkmale bestimmt sind

Im Raum (oder Teilraum) der relevanten Merkmale befindet sich voraussetzungsgemäß auch das Original, jedoch in einer vorerst noch nicht bekannten Position. Diese Position soll bestimmt werden, um dann anhand der betreffenden Merkmale ein verbessertes Modell des Originals suchen zu können.

Zu jedem Modell gehört ein Fehlerwert, welcher den Unterschied zwischen Modell und Original ausdrückt. Die Fehlerwerte werden den jeweiligen Modellpositionen im Merkmalraum zugeordnet. Dann soll versucht werden, diese einzelnen Modellfehler-Stützstellen durch eine kontinuierliche Fehlerfunktion zu verbinden. Falls diese Funktion ein genügend dominantes Minimum aufweist, wenigstens in einem Teilraum, so kann in den Koordinaten dieses Minimums das Original vermutet werden.

Die Anzahl der vorgegebenen Modelle ist eventuell zu klein, um anhand der Modellpositionen im Merkmalsraum die benötigte Fehlerfunktion mit ausreichender Genauigkeit formulieren zu können. Dann kann mit verschiedenen Maßnahmen versucht werden, anhand der vorhandenen Modelle zusätzliche Positionen im Merkmalsraum zu erschließen.

5 Maßnahmen zur Erschließung des Merkmalraumes

5.1 Variation von Modellen

Zur Position jedes vorgegebenen Modells im Merkmalsraum gehört ein einzelner Fehlerwert. Zusätzliche Fehlerwerte an anderen Positionen können ggf. dadurch gewonnen werden, dass die Modelle variiert werden, z.B. in ihren Parametern. Im allgemeinen wird dies aufgrund irgendwelcher Einschränkungen oder vielleicht wegen Nichtlinearitäten nur innerhalb eng begrenzter Gebiete möglich sein. In diesen Gebieten können an und für sich beliebig viele, unter praktischen Bedingungen allerdings nur endlich viele neue Stützstellen bestimmt werden. Die erreichbare Stützstellendichte erlaubt es aber eventuell, Gradienten anzugeben und daraus die Richtung zum Original abzulesen. Zur Verdeutlichung werden drei Modelle in einem zweidimensionalen Merkmalsraum betrachtet. In die erreichbaren Umgebungen dieser Modelle wird der zugehörige Modellfehler mit Hilfe von Niveaulinien eingetragen, Bild 5.1-1.

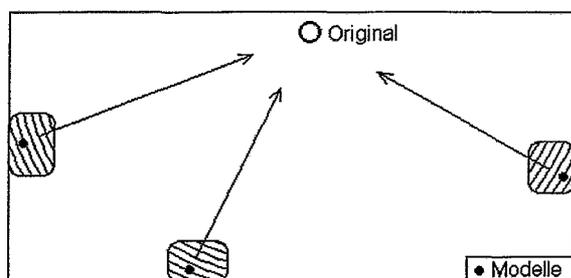


Bild 5.1-1: Durch die Variation dreier Modelle erreichbare Umgebungen im Merkmalsraum. Innerhalb dieser Gebiete ist der Modellfehler mittels Niveaulinien eingetragen. Aus den Niveaulinien lassen sich Richtungen bestimmen, in denen das (unbekannte) Original vermutet wird.

Ähnlich wie im Bild 5.1-1 ist die praktische Reichweite der Modellvariationen im allgemeinen zu eng begrenzt, um mit ihnen die Zwischenräume zwischen den Modellen zu überbrücken oder gar das Original zu erreichen. Ein Modell kann in seinem Variationsgebiet bestenfalls an die Stelle des minimalen Fehlers gebracht werden. Wenn sich das Original so wie im Bild 5.1-1 fernab der Variationsgebiete der Modelle befindet, dann lässt sich aus den Normalen der Niveaulinien zumindest auf die Richtungen schließen, in denen sich das Minimum der Fehlerfunktion und damit das Original vermutlich befindet. Die Genauigkeit einer solchen Positionsschätzung hängt wesentlich davon ab, wie die Modelle im Merkmalsraum relativ zum Original platziert sind, mit welcher Stützstellendichte die Variationsgebiete der Modelle erschlossen sind oder in welcher Genauigkeit der Modellfehler in den einzelnen Punkten bekannt ist. Hinzukommen kann, dass die Orientierung der Niveaulinien aufgrund nichtlinearer Abhängigkeiten der Modellfehler beeinträchtigt ist, so dass die Normalenrichtungen der Niveaulinien nicht zum Original zeigen und deswegen die geschätzte Position des Originals systematisch verfälscht ist. Die Variation der Modelle ist somit für die Erschließung des Merkmalraumes nicht immer ausreichend.

5.2 Möglichkeiten des Zusammenwirkens von Modellen

Zur Erschließung von Positionen im Merkmalsraum, welche sich zwischen den vorgegebenen Modellen sowie zwischen deren Variationsbereichen befinden, soll durch ein geeignetes Zusammenwirken unterschiedlicher Modelle ein Verbindungs- bzw. Verbundmodell hergestellt werden. Dabei besteht die Bedingung, dass die Modelle ihre Eigenständigkeit behalten, d.h. sie sollen sich hinsichtlich ihrer Beziehung zum Original nicht oder nur unwesentlich gegenseitig beeinflussen oder verändern. Anderenfalls muss - insbesondere bei vorhandener Nichtlinearität - damit gerechnet werden, dass die betreffenden Objekte ihre Eigenschaft verlieren, Modelle des Originals zu sein.

Ausgehend von dieser Bedingung wird für das Zusammenwirken von Modellen prinzipiell vorgesehen, dass die Modelle

- anteilig nebeneinander (Parallelität der Modelle bei zusätzlicher Wichtung),
- zeitlich getrennt bzw. nacheinander (Umschaltung zwischen den Modellen) und
- in Reihenschaltung (nur bei linearen Modellen)

wirksam sind. Nur im Falle der Parallelität ist ihre Eigenständigkeit vollkommen sichergestellt, denn erst ihre Wirkungen treffen (gewichtet) zusammen. Im Falle des zeitlichen Wechsels der Modelle kann eine Beeinflussung des jeweils nachfolgenden Modells vorkommen. Diese Erscheinung ist aber um so geringer, je größer die zeitlichen Abstände zwischen den Umschaltungen sind. Bei der Reihenschaltung ist Beeinflussung des Nachfolgers noch stärker ausgeprägt. Die Reihenschaltung ist deshalb nur bei linearen, z.B. als lineare Übertragungsglieder wirkenden Modellen angebracht. Im weiteren werden nur die beiden erstgenannten Möglichkeiten verwendet.

Ebenso wie jedes beteiligte Einzelmodell ist auch deren Zusammenwirken ein Modell des Originals. Gleichermaßen kann diesem Verbundmodell eine Position im Merkmalsraum zugeordnet werden. Allerdings ist die Komplexität des Verbundmodells entsprechend hoch, weswegen es u.a. in seiner Handhabung schwerfälliger als ein Einzelmodell ist. Das Verbundmodell sollte deshalb noch nicht als das gesuchte bessere Modell des Originals angesehen werden.

Um die beim Verbundmodell auftretenden Probleme zu veranschaulichen, wird zunächst wieder die Merkmalsmengen-Darstellung der Modelle betrachtet, vgl. Bild 2-1. Die relevanten, d.h. auch im Original anzutreffenden Merkmale des Verbundmodells werden nur oder vornehmlich in Mengenüberschneidungen der Einzelmodelle nachgewiesen. Diese relevanten Merkmale gehören damit zu mehreren Einzelmodellen gleichzeitig. Dagegen sind die irrelevanten Merkmale des Verbundmodells vorwiegend nur an je einem einzigen Einzelmodell beteiligt, wobei auch nicht erkannte relevante Merkmale als irrelevant gelten. Deshalb ist damit zu rechnen, dass das Verbundmodell vergleichsweise viele irrelevante Merkmale aufweist. Der Einfachheit halber werden aber jetzt diejenigen Merkmale aus Bild 2-1 als relevant erklärt, die in wenigstens einem Modell und dem Original gleichzeitig vorkommen. Das Verbundmodell bestehe in der Vereinigungsmenge der drei Modelle. Wie im Bild 2-1 nachgeprüft werden kann, ist dann das Verhältnis der Anzahl der relevanten Merkmale zur Gesamtzahl der Merkmale jeweils

Einzelmodelle:			Verbundmodell:
M_1	M_2	M_3	$M_1 \cup M_2 \cup M_3$
$\frac{6}{16} = 0,375$	$\frac{5}{14} = 0,357$	$\frac{5}{11} = 0,455$	$\frac{7}{21} = 0,33\bar{3}$

und demnach für das Verbundmodell am kleinsten und somit ungünstigsten. Übermäßig viele irrelevante Merkmale machen das Verbundmodell entsprechend unübersichtlicher. Im Abschnitt 7 wird sich zeigen, dass die Komplexität oder die Mehrteiligkeit des Verbundmodells auch dessen Vorhersagefähigkeit beeinträchtigt. Ein Verbundmodell sollte demnach, sofern es auch einen geringeren Fehler als seine beteiligten Einzelmodelle aufweist - und es sich damit als Modellsymbiose erweist, s. Abschnitt 1 -, durch ein äquivalentes Einzelmodell ersetzt werden.

Unter der Annahme einer günstigen Auswahl der vorgegebenen Modelle werden sich deren Positionen im Merkmalraum einigermaßen ausgewogen um die gesuchte Position des Originals verteilen. Folglich wird auch die Position der Modellsymbiose zwischen oder nahe ihren beteiligten Einzelmodellen zu erwarten sein.

Genauer betrachtet wird die oben genannte zweite Möglichkeit des Zusammenwirkens der vorgegebenen Modelle, speziell die zeitäquidistante Umschaltung zwischen den Modellen M_1 , M_2 , M_3 im Bild 5.2-1. Die Umschaltung erfolgt dabei periodisch in gleichbleibender Reihenfolge und zeitäquidistant. Reale Umschaltungen können aus Kausalitätsgründen nicht sprunghaft erfolgen, sondern sind immer mit gewissen Verzögerungen verbunden, wobei diese aber eventuell sehr klein sind. Im betrachteten Beispiel werden jedem der drei Modelle eine Verzögerung 2. Ordnung und damit jeweils zwei Zustandsgrößen zugeordnet. Die Zustandsgrößen werden als Merkmale aufgefasst. Die drei gegebenen Einzelmodelle zuzüglich ihrer verzögernd wirkenden Umschaltung bilden gemeinsam ein Verbundmodell. Dieses erscheint im selben Merkmalsraum wie die drei Einzelmodelle. Aufgrund der Verzögerung beschreibt das Verbundmodell eine kontinuierliche Merkmalsbahn. Ihr Verlauf ist dadurch charakterisiert, dass sich die Position des Verbundmodells zum jeweils wirksamen Modell hin bewegt, dieses aber nicht erreicht, weil vorher zum nächsten Modell umgeschaltet wird usw. Der Vorgang beginnt im Modell M_1 und nähert sich einer stationären Merkmalsbahn (Grenzzyklus), Bild 5.2-1 links. Je kürzer die Zeitabstände zwischen Umschaltungen der Modelle sind, desto enger sind die Grenzzyklen um einen Ruhepunkt zusammengezogen, Bild 5.2-1 rechts.

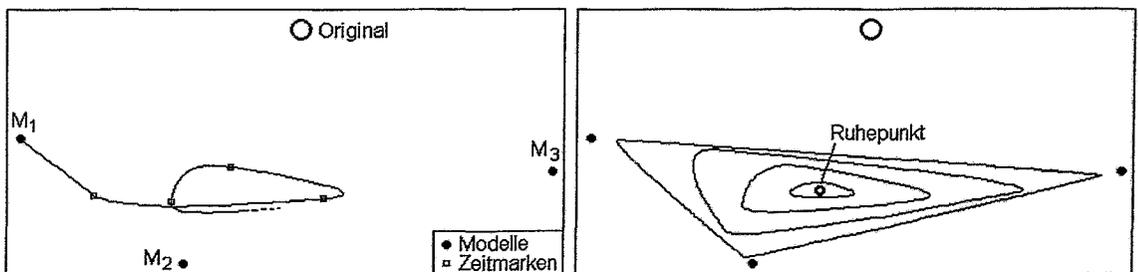


Bild 5.2-1: Verschiedene Merkmalsbahnen des Verbundmodells, links: Aus einem Einzelmodell heraus beginnender Einschwingvorgang mit Zeitmarken für die Umschaltung zwischen den Modellen, rechts: stationäre Bahnen bei unterschiedlichen Umschaltperioden

Die Position des Ruhepunktes hängt von den relativen Zeitanteilen ab, in denen die Einzelmodelle wirksam sind. Im betrachteten Beispiel liegt ein dissipatives, d.h. im Laufe der Zeit Energie verlierendes System vor. Dynamische Systeme solcher Art kommen in der Praxis häufig vor. Der Ruhepunkt wie auch die aktuelle Position des Verbundmodells können bei solchen Systemen, abgesehen von Einschwingvorgängen, nicht außerhalb der konvexen Hülle liegen, welche die Einzelmodelle umschließt. Diese Hülle ist im betrachteten Beispiel ein Dreieck. Der Modellfehler kann somit (im wesentlichen) innerhalb dieser vom Verbundmodell erreichbaren Hülle bestimmt werden. Das Bild 5.2-2 zeigt für dieses Gebiet die Niveaulinien des Modellfehlers, wobei der Fehler des Verbundmodells nur in dem grau markierten Gebiet kleiner als der kleinste Fehler der Einzelmodelle ist. Im grauen Gebiet ist das Verbundmodell also eine Modellsymbiose.

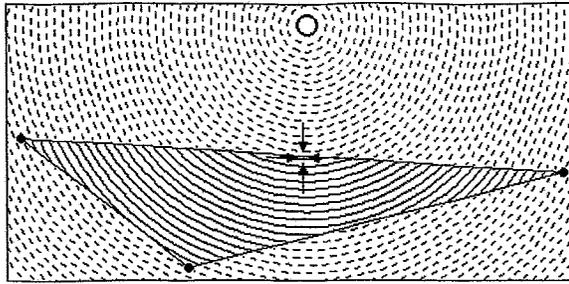


Bild 5.2-2: Vom Verbundmodell erreichbares Gebiet mit eingetragenen Niveaulinien des Modellfehlers; der Modellfehler ist hierbei einfach proportional zur Entfernung vom Original. Im grau markierten Gebiet ist das Verbundmodell besser als beste Einzelmodell. Durch Pfeile markiert ist die bestmögliche Position, welche mittels Modellumschaltung im erreichbaren Gebiet zugänglich ist. Im nicht erreichbaren Gebiet sind die Niveaulinien gestrichelt angedeutet.

Im Vergleich zu der im Bild 5.1-1 skizzierten Modellvariation ist es nach Bild 5.2-2 bei der Modellumschaltung möglich, die Fehlerfunktion über ein wesentlich größeres Gebiet zu erfassen. Entsprechend genauer kann anhand von Niveaulinien auf die Position des Originals geschlossen werden. Weil sich die bestmögliche Position des Verbundmodells bzw. das erreichbare lokale Minimum des Modellfehlers (im Bild 5.2-2 durch Pfeile markiert) genau zwischen M_1 und M_3 befindet, braucht die Modellsymbiose eigentlich nur diese beiden Modelle zu umfassen. Ein Anwendungsbeispiel zur Modellumschaltung wird im Abschnitt 9.2 behandelt.

Wie die gestrichelt eingezeichneten Niveaulinien im Bild 5.2-2 erkennen lassen, hat das markierte lokale Minimum des Modellfehlers noch einen relativ großen Fehlerwert. Um den Modellfehler weiter zu reduzieren, müssen offensichtlich auch Punkte außerhalb der eingezeichneten konvexen Hülle zugänglich gemacht werden. Dies ist mit Hilfe der erstgenannten Möglichkeit des Zusammenwirkens der Modelle erreichbar, also mit der gewichteten Parallelität der Modelle, insbesondere unter Verwendung eines negativen Gewichtes für das Modell M_2 . Im Bild 5.2-3 ist eine Modellsymbiose S angedeutet, an der ihre drei Einzelmodelle wie folgt beteiligt sind: $S = 0,81 \cdot M_1 - 0,29 \cdot M_2 + 0,48 \cdot M_3$.

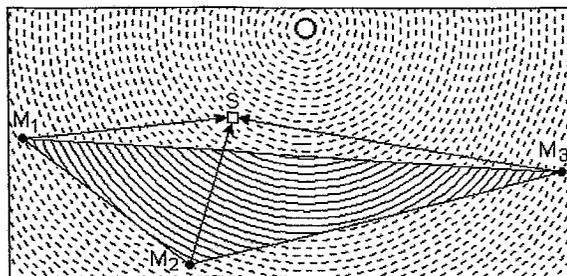


Bild 5.2-3: Eine Modellsymbiose S außerhalb der konvexen Hülle

Je weiter sich die Gruppe der vorgegebenen Modelle von Original entfernt befindet, desto unsicherer kann wegen verbliebener Ungenauigkeiten der gefundenen Fehlerfunktion die Position des Originals geschätzt bzw. vorhergesagt werden. Deshalb sollten vorzugsweise solche Modelle vorgegeben werden, die möglichst ausgewogen um das Original gruppiert sind. Ein Anwendungsbeispiel zur Parallelisierung von Modellen, wobei die Modellsymbiose analog zu Bild 5.2-3 außerhalb der konvexen Hülle erscheint, wird im Abschnitt 9.4 behandelt.

6 Zur Auswahl von Symbiosepartnern für eine Modellsymbiose

Natürliche Symbiosen entstehen üblicherweise spontan, wobei sich die Partner zufällig begegnen können. So etwas ist zwar grundsätzlich auch für eine Symbiose von Modellen denkbar, jedoch ist es praktisch und dabei insbesondere unter Zeitdruck nicht realistisch. Für Verbundmodelle, die sich als Modellsymbiosen erweisen sollen, werden deshalb die Partner weitestgehend zielgerichtet bereitzustellen sein.

Im Merkmalsraum sind die Positionen der vorgegebenen Modelle im allgemeinen ungeordnet um das Original verteilt, z.B. so wie im Bild 6-1 angedeutet. Der Modellfehler wird nachfolgend der Einfachheit halber so wie im vorigen Abschnitt proportional zur Entfernung vom Original angenommen. Um den Aufwand für die Handhabung eines Verbundmodells gering zu halten, sollte es möglichst wenige Einzelmodelle enthalten. Um das Verbundmodell mit hoher Sicherheit möglichst nahe am Original platzieren zu können, sollten von den vorgegebenen Modellen nur diejenigen mit den kleinsten Fehlern enthalten sein. Methodisch sollte der Aufbau eines Verbundmodells schrittweise erfolgen und vom besten der verfügbaren Modelle ausgehen. Dieses primäre Modell ist im betrachteten Fall am geringsten vom Original entfernt und befindet sich damit von allen Modellen auf der niedrigsten Niveaulinie der Fehlerfunktion, Bild 6-1.

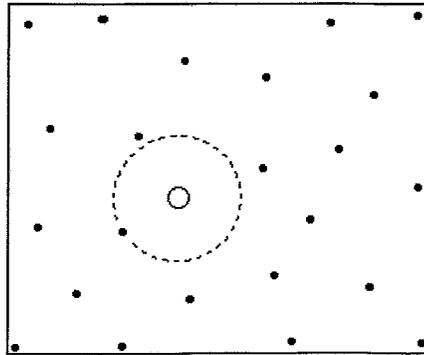


Bild 6-1: Im Merkmalsraum um das Original (○) ungeordnet verteilte Modelle (•). Das beste unter diesen Modellen und seine zugehörige kreisförmige Niveaulinie der Fehlerfunktion (gestrichelt) hat die geringste Entfernung vom Original. Kleinere Fehlerwerte werden nur im Inneren des gestrichelten Kreises erreicht.

Ein Verbundmodell wird im vorliegenden Fall nur dann als Modellsymbiose gelten, wenn es sich innerhalb des im Bild 6-1 gestrichelt markierten Kreises befindet. Die Einzelmodelle für ein Verbundmodell sollten zweckmäßigerweise aus einer konvexen Hülle ausgewählt werden, welche das Primärmodell einbezieht und nach Möglichkeit das Original umschließt. Im betrachteten Fall lassen die vorgegebenen Modelle verschiedene solche Hüllen zu. Eine denkbare Hülle über elf Einzelmodelle zeigt das Bild 6-2.

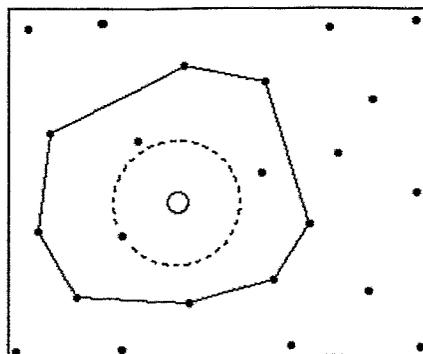


Bild 6-2: Eine konvexe Hülle, in deren Innerem (grau) ein Verbundmodell positioniert werden könnte

Eine große Anzahl einbezogener Modelle bringt entsprechend viele irrelevante Merkmale mit sich, vgl. Abschnitt 5.2. Die Hülle sollte deshalb enger als im Bild 6-2 gewählt werden. Nachfolgend wird ein Verbundmodell aus nur zwei Einzelmodellen vorgesehen. Eines davon ist das Primärmodell, weswegen nur noch ein dazu passendes Partnermodell gesucht wird. Für diese Suche wird ein eigenständiges Bewertungskriterium benötigt.

Angenommen wird, dass die Realisierung eines Verbundmodells um so aufwendiger ist, je weniger die beteiligten Einzelmodelle einander ähnlich sind. Im betrachteten Fall entspricht die Ähnlichkeit der geometrischen Nähe im Merkmalsraum. Das Verbundmodell erscheint im Merkmalsraum als selbständiges Modell. Deshalb wird vorgesehen, in dem gesuchten Bewertungskriterium die Entfernungen der Einzelmodelle zum Verbundmodell zu bewerten.

Ferner soll die mit dem Verbundmodell maximal erreichbare Fehlerrückgang gegenüber dem Primärmodell bewertet werden. Dabei wird unterstellt, dass das Verbundmodell zwar nur entlang der Verbindungslinie zwischen den zwei beteiligten Einzelmodellen verschoben werden kann, aber auf dieser Linie an die Stelle mit minimalem Modellfehler. Unter den gegebenen Bedingungen ist dies auch die Stelle mit dem geringsten Abstand vom Original. In diesem Sinne wird als Bewertungskriterium B die folgende Beziehung definiert, vgl. Bild 6-3:

$$B = \frac{r^2}{d_1 + d_2} = \text{Max!} \quad (6-1)$$

- mit r: Modellverbesserung, ausgedrückt durch den Abstand der optimalen (fehlerminimalen) Position des Verbundmodells von der Kreislinie, welche zum Fehler des Primärmodells gehört,
d₁: Entfernung des Primärmodells zum Verbundmodell,
d₂: Entfernung des Partnermodells zum Verbundmodell

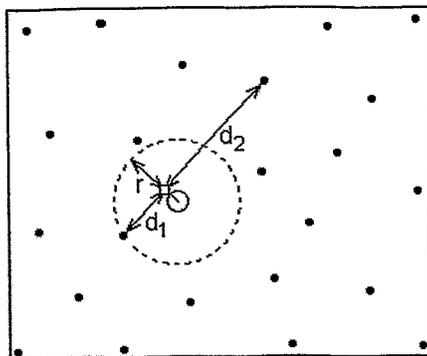


Bild 6-3: Zur Erläuterung des Bewertungskriteriums (6-1). Die Symbiose (□) befindet sich auf der Verbindungslinie zwischen dem Primär- und seinem Partnermodell an derjenigen Stelle, welche dem Original am nächsten ist.

Die Formel 6-1 braucht verständlicherweise nur außerhalb des vom Primärmodell festgelegten (in den Bildern gestrichelt dargestellten) Kreises ausgewertet zu werden. Das Bild 6-4 zeigt die Bewertungsgröße B über dem betreffenden Gebiet des Merkmalsraumes anhand von Niveaulinien.

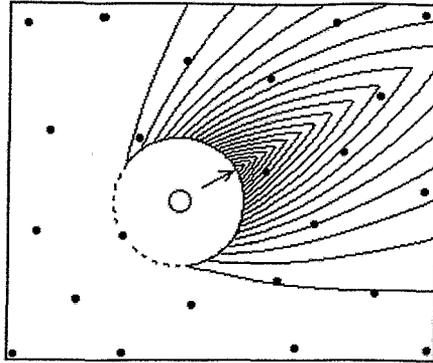


Bild 6-4: Bewertungsgröße B nach (6-1) über dem interessierenden Gebiet; das formale Maximum ist durch einen Pfeil markiert.

Aus Bild 6-4 geht hervor, dass das Partnermodell möglichst nahe der Stelle sein sollte, die sich bezüglich des Originals genau symmetrisch zum Primärmodell befindet (Pfeil). Merkmals-Symmetrien sind auch noch in anderer Hinsicht von Bedeutung, s. Abschnitt 9. An der genannten Stelle befindet sich keines der vorgegebenen Modelle, jedoch lässt sich anhand der B-Niveaulinien leicht erkennen, welches unter den vorgegebenen Modellen als Partnermodell am besten geeignet ist.

7 Lokalisierung, Unschärfe und Vorhersagefähigkeit von Modellen

Eine Modellierung des Originals ist grundsätzlich erst dann möglich, wenn dieses zuvor von seiner Umgebung abgegrenzt wurde, also ein Rahmen für die Modellierung festgelegt ist. Durch einen solchen Rahmen erhält das Original überhaupt erst seine Eigenständigkeit als Objekt; Original und Rahmen bedingen sich gegenseitig. Die isolierte Betrachtung des Originals bedeutet die Vernachlässigung seiner natürlichen Verbindungen zur Umgebung. Diese Außenverbindungen bleiben aber real erhalten. Also gehen bereits von der Benennung bzw. von der Definition des Originals Fehler für dessen Modellierung aus. Solche Abgrenzungsfehler sind zwar nicht generell vermeidbar, doch kann zumindest versucht werden, sie von vorn herein gering zu halten.

So können vorzugsweise solche Objekte betrachtet werden, die ohnehin weitgehend isoliert stehen, die also im Vergleich zu ihren internen Kopplungen nur schwache Kopplungen zur Umgebung aufweisen. Derartige Objekte sind in der Praxis verhältnismäßig leicht zu finden, denn sie sind der Wahrnehmung leicht zugänglich. Des Weiteren können Abgrenzungsfehler dadurch gering gehalten werden, dass die Betrachtung bzw. der Modellierungsrahmen nur auf die wirklich relevanten Merkmale bezogen wird. Das bedeutet, dass das betreffende Objekt nicht unnötig genau bzw. ausreichend unscharf betrachtet werden soll. Unschärfe wiederum bedeutet verwaschene Grenzen bzw. schlechtere Lokalisierung des Objektes. Somit wirkt die Unschärfe nicht nur nach außen, sondern auch in das Objekt hinein. Praktisch sollte der Abgrenzungsfehler mittels Unschärfe so weit reduziert werden, dass nicht Nutzinformation über das Objekt verloren geht.

Zwischen der Unschärfe eines Objektes und seiner Abbildung im Bereich der Merkmale besteht ein diametraler Zusammenhang. Dies gilt für das Original wie auch für seine Modelle. Ein schärferes bzw. genaueres Modell weist auch mehr Details auf und ist damit durch entsprechend mehr Merkmale charakterisiert. Eine größere Merkmalsmenge wiederum bedeutet eine schlechtere Lokalisierung bzw. höhere Unschärfe im Merkmalsbereich. Diese Unschärfe ist vergleichbar mit der schlechten Konvergenz einer Fourier-Reihe, wenn es im Originalbereich detailreiche Strukturen und darin z.B. sprunghafte Übergänge gibt, [BI98]. Schlechte Konvergenz einer Fourier-Reihe heißt, dass übermäßig viele Fourier-Koeffizienten und damit entsprechend viele Basis-Oszillationen erforderlich sind, um einzelne Stellen des Originalbereiches darzustellen. Insofern kann zwischen dem Original- und dem Merkmalsbereich ein analoger Zusammenhang gesehen werden, wie er von der Unschärferelation der

Quantentheorie beschrieben wird, oder auch im Abtasttheorem oder beim sogenannten Zeit-Bandbreite-Produkt vorkommt [GRS97].

Bei einem Modell bringt Unschärfe eine gewisse Vorhersagefähigkeit mit sich, vgl. Abschnitt 3. Sie ist zumeist eine gewünschte Eigenschaft von Modellen. Wie aus der obigen Betrachtung hervorgeht, sollte ein Modell im Interesse seiner Vorhersagefähigkeit durch möglichst wenige Merkmale charakterisiert sein.

Die Problematik der Modellunschärfe wird im weiteren am Beispiel eines schwach autokorrelierten Zufallsprozesses untersucht. Die Basisfunktionen der Fourier-Transformation werden dabei als Einzelmodelle eines zu bildenden Verbundmodells aufgefasst und deswegen Basismodelle genannt. Weiterhin gelten die Fourier-Koeffizienten als Merkmale; mit ihnen wird eine originale Funktion auf die Basismodelle abgebildet. Zu Vergleichszwecken wird außer der Fourier-Transformation auch eine Wavelet-Transformation vorgenommen. Schließlich wird mit Hilfe stochastischer Funktionen verdeutlicht, dass Vorhersagen nur unter der Bedingung möglich sind, dass es tatsächliche Zusammenhänge zwischen dem Original und seiner Umgebung gibt.

7.1 Modellierung auf der Grundlage der Fourier-Transformation

Wie oben bereits erläutert wurde, ist ein Objekt erst durch die Abgrenzung von seiner Umgebung bestimmt. Die vom originalen Objekt und seiner Umgebung gebildete Gesamtheit, d.h. die übergeordnete Realität bestehe im weiteren in einem Zufallsprozess und vorerst speziell in dessen Realisierung $f(x)$ im Bild 7.1-1; diese Zufallsfunktion wird als nach beiden Seiten beliebig ausgedehnt angenommen. Das Original ist innerhalb von $f(x)$ als begrenzter Funktionsabschnitt $f_o(x)$ im Intervall $x \in [x_1, x_2]$ (Modellierungsrahmen, hier Fensterbereich) bestimmt:

$$f_o(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in [x_1, x_2] \\ \text{unbestimmt} & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.1-1)$$

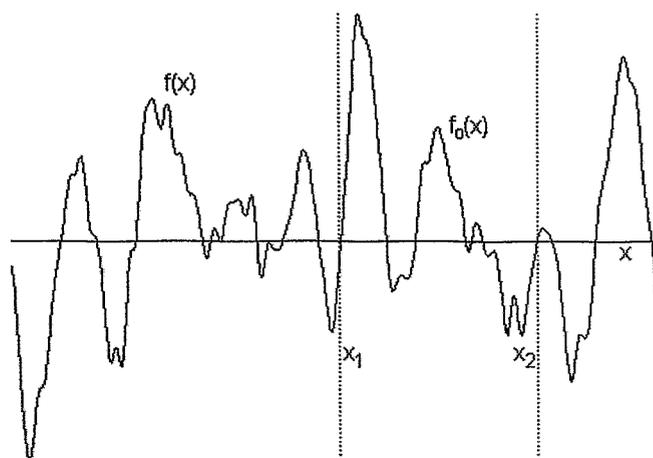


Bild 7.1-1: Ausschnitt aus der Zufallsfunktion $f(x)$, darin abgegrenzt der als Original verstandene Funktionsabschnitt $f_o(x)$ (grau unterlegt)

Damit der Modellierungsrahmen möglichst wenig Modellfehler hervorruft, wurde er zwischen Nullstellen von $f(x)$ festgelegt. Von der an sich kontinuierlichen Funktion $f(x)$ können praktisch nur endliche viele diskrete (Abtast-)Werte berücksichtigt werden; diese Stützstellen seien äquidistant.

Als vorgegebene Modelle f_m des Originals f_o gelten die sinusförmigen Basisfunktionen der Fourier-Transformation:

Im vorliegenden Fall ist mit der Verwendung der Fourier-Transformation bereits eine Vorauswahl für die Merkmale getroffen. Von den zur Fourier-Transformation gehörenden sinusförmigen Basisfunktionen werden wiederum nur ausgewählte Merkmale verwendet, nämlich die als Fourier-Koeffizienten erscheinenden komplexen Amplituden der Basisfunktionen. Diese Auswahl ist rein qualitativ. Prinzipiell wären auch andere Merkmale denkbar, z.B. solche, welche Unterschiede zwischen benachbarten Funktionswerte ausdrücken. Vorerst werden aber die Fourier-Koeffizienten als Merkmale beibehalten. Ihre Auswahl wird lediglich quantitativ weiter eingeschränkt auf Merkmale mit genügend großen Werten bzw. Beträgen. Vier solche dominanten Merkmale sind im Bild 7.1-2 bereits hervorgehoben worden ($n = 3, 7, 11, 16$). Im vorliegenden Fall gehört zu jedem Modell nur ein einziges Merkmal. Deshalb gelten jetzt auch nur noch diejenigen vier Sinusfunktionen als Modelle, welche zu den betreffenden vier dominanten Fourier-Koeffizienten gehören. Eine einzelne dominante und mit ihrem zugehörigen Fourier-Koeffizienten gewichtete Modellfunktion f_m ist im Bild 7.1-3 gemeinsam mit der Originalfunktion f_o dargestellt. Eine Analogie dieses gewichteten Einzelmodells mit dem Original besteht offensichtlich darin, dass f_m im Fensterbereich $[x_1, x_2]$ zwei Schwingungen aufweist und dabei etwa phasengleich zu den in f_o grob zu erahnenen Schwingungen ist.

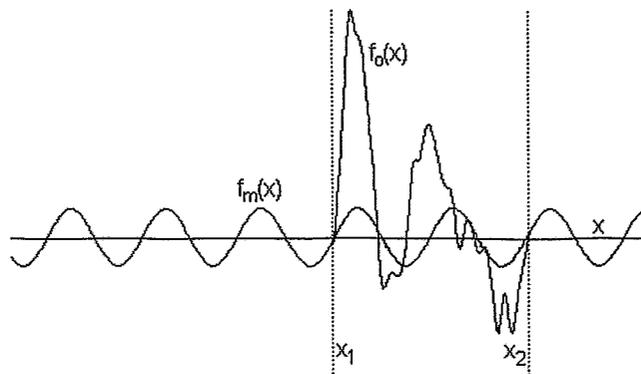


Bild 7.1-3: Eine einzelne dominante Sinus-Modellfunktion f_m des Originals f_o .

Eine Sinusfunktion ist in einer extremen Form unscharf, denn diese Modellfunktion oszilliert gleichförmig in $x \in (-\infty, \infty)$ und gibt deshalb überhaupt keine Hinweise darauf, wo das Original $f_o(x)$ auf der x -Achse, d.h. im Originalbereich lokalisiert sein könnte. Dieser maximal möglichen Unschärfe im Originalbereich steht die punktuelle und damit maximale mögliche Lokalisierung dieser Funktion im Frequenz- bzw. Merkmalsbereich gegenüber, nämlich die Lokalisierung auf einen einzigen Fourier-Koeffizienten und damit ein einziges Merkmal. Bei einer Verbreiterung des betrachteten Frequenzbandes, also bei Verwendung von Sinusfunktionen unterschiedlicher Frequenz, wird die Unschärfe im Frequenzbereich größer und deshalb im Originalbereich entsprechend (reziprok) kleiner⁷.

Die vorgegebenen Modelle sollen ein Verbundmodell bilden. Dafür wird die im Abschnitt 5.2 genannte Möglichkeit des parallelen Zusammenwirkens der Modelle gewählt. Dies bedeutet hier die gewichtete Summation der sinusförmigen Modellfunktionen. Eine Grundlage dafür bietet die zu (7.1-4) inverse Fourier-Transformation

⁷ Das Zeit-Bandbreite-Produkt bzw. das Produkt zwischen der Ausdehnung einer Funktion im Originalbereich und der Ausdehnung ihrer Abbildung im Frequenzbereich kann einen bestimmten Wert nicht unterschreiten, wobei dieser Wert vom konkreten Signalverlauf abhängt; z.B. bei einem originalen Rechteck-Impuls ist dieser Wert 2π oder bei der Gauß-Funktion $(\pi/2)^2$. Wegen formaler Ähnlichkeiten zur Quantenmechanik wird diesbezüglich auch von der (Küpfmüllerschen) Unschärferelation gesprochen [Vö82]. Zur Bandbreite Null (Delta-Impuls) gehört demnach eine unendlich ausgedehnte und somit nicht lokalisierte Originalfunktion. Umgekehrt gehört zu einem unendlich breiten Frequenzband eine punktuell lokalisierte Originalfunktion (wiederum Delta-Impuls).

$$f_o(kT_A) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{f}(n\omega_x) e^{jn\omega_x kT_A} . \quad (7.1-5)$$

Da es im vorliegenden Fall genügt, nur vier Modellfunktionen zu berücksichtigen, wird die gewichtete Summation nicht wie in (7.1-5) über alle N Stützstellen vorgenommen, sondern nur über die vier im Bild 7.1-2 hervorgehobenen Fourier-Koeffizienten ($n = 3, 7, 11, 16$). Die Überlagerung der betreffenden gewichteten Modellfunktionen ergibt das Verbundmodell $\tilde{f}_{o(4)}$ im Bild 7.1-4.

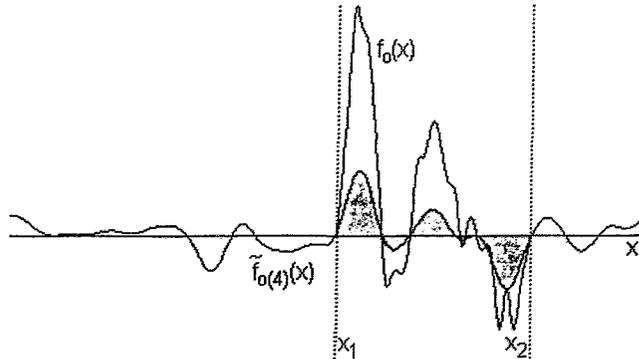


Bild 7.1-4: Inverse Fouriertransformierte über die vier im Bild 7.1-2 hervorgehobenen Koeffizienten. Die resultierende Funktion (das Verbindungsmodell) ist über die gesamte Breite dargestellt, aber im Fensterbereich dunkelgrau unterlegt. Zum Vergleich ist auch das Original dargestellt, jedoch nur im Fensterbereich und dort hellgrau unterlegt

Der im Bild 7.1-4 dargestellte Verbund aus vier Modellfunktionen $\tilde{f}_{o(4)}$ hat bereits eine deutlich größere Ähnlichkeit zum Original als das Einzelmodell im Bild 7.1-3. Weil sich die größten Funktionswerte von $\tilde{f}_{o(4)}$ innerhalb des Fensterbereiches befinden, ist sogar eine gewisse Lokalisierung erreicht, d.h. eine Vermutung über die Lage des Originals auf der x -Achse. Das Verbundmodell $\tilde{f}_{o(4)}$ kann damit ohne weiteres als Modellsymbiose eingeschätzt werden. Inwieweit diese Modellsymbiose Vorhersagen außerhalb des Fensterbereiches $[x_1, x_2]$ zulässt, wird im Abschnitt 7.3 erörtert.

Die verhältnismäßig kleinen Funktionswerte in $\tilde{f}_{o(4)}$ erklären sich daraus, dass (7.1-5) nicht nur für vier ausgewählte, sondern für insgesamt $N = 500$ Koeffizienten ausgelegt ist. Mit anderen Merkmalsgewichten, die nicht durch die inverse Fourier-Transformation bestimmt sind, wäre es zweifellos möglich, die modellierten Funktionswerte besser an $f_o(x)$ anzupassen.

Im vorliegenden Fall könnte mit Hilfe der vollständigen Basis aufgrund der Orthogonalität der Basisfunktionen die originale Funktion f_o exakt nachgebildet werden. Dahingehend kann bereits bei einer Verwendung von mehr als den bisher verwendeten vier Fourier-Koeffizienten bzw. Modellfunktionen erwartet werden, dass die Abbildungsschärfe des Verbundmodells zunimmt. So wird mit den ersten (niederfrequentesten) zwanzig Fourier-Koeffizienten aus Bild 7.1-2 gemäß (7.1-5) ein Verbundmodell gebildet, Bild 2.1.5. Dieses Verbundmodell kann ohne Zweifel ebenfalls als eine Modellsymbiose angesehen werden.

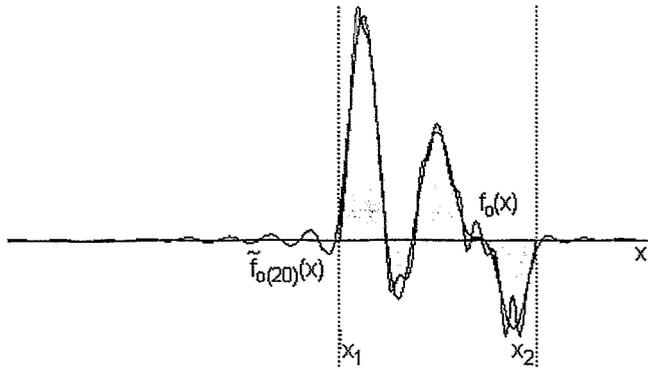


Bild 7.1-5: Inverse Fouriertransformierte über die ersten 20 Fourier-Koeffizienten

Im Vergleich zur vorherigen Modellsymbiose $\tilde{f}_{0(4)}$ besteht im Bild 7.1-5 bedeutend mehr Ähnlichkeit zwischen der Modellsymbiose $\tilde{f}_{0(20)}$ mit dem Original f_0 . Entsprechend klarer ist die abschätzbare Lokalisierung des Originals auf der x -Achse; im Bild sind die Modellsymbiose und das Original fast deckungsgleich. Gleichzeitig wird deutlich, dass bei zunehmender Modellgenauigkeit bzw. abnehmender Unschärfe im Originalbereich sich die Modellfunktion außerhalb des Fensterbereiches $[x_1, x_2]$ der x -Achse annähert.⁸ Dies entspricht nicht dem realen Verlauf von $f(x)$ in der Umgebung des Originals und ist nach den obigen Darlegungen ein Zeichen dafür, dass der Modellierungsrahmen durch die Verwendung vieler irrelevanter oder wenig relevanter Merkmale vergleichsweise große Modellfehler hervorgerufen hat; tatsächlich befinden sich in $n \in [0, 20]$ bereits mehrere recht kleine Fourier-Koeffizienten. Dass die Ausblendung des Fensters $[x_1, x_2]$ aus $f(x)$ bzw. der Modellierungsrahmen besonders durch die Fourier-Koeffizienten der höheren Frequenzen spezifische Abgrenzungsfehler hervorruft, verdeutlicht das Bild 7.1-6. Dort ist neben dem Spektrum des Originals $f_0(x)$ auch das Spektrum der ungefensterten Funktion $f(x)$ angegeben.⁹ Im Spektrum des Originals $f_0(x)$ sind zwar die meisten der insgesamt 500 berechneten Koeffizienten sehr klein, dafür aber beinahe alle Koeffizienten ungleich Null, Bild 7.1-6 links. Dagegen ist das Spektrum von $f(x)$ für $n > 75$ nahezu identisch Null, Bild 7.1-6 rechts.

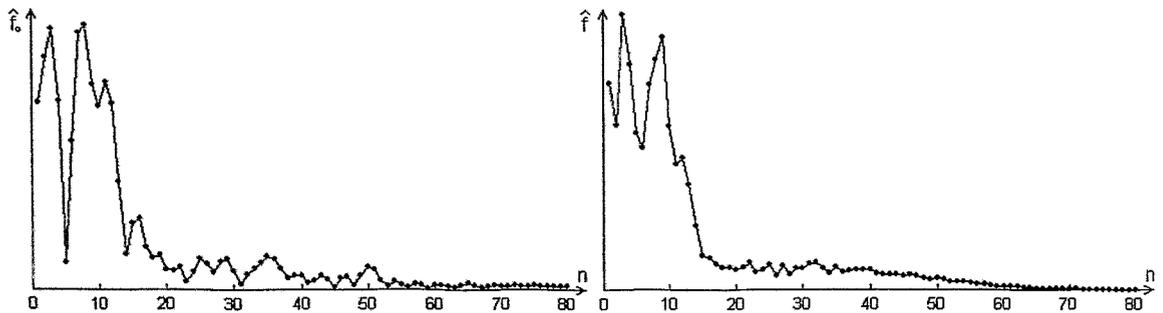


Bild 7.1-6: Beträge der Spektren, links vom Original $f_0(x)$ und rechts von einem vergleichsweise breiten Abschnitt der ungefensterten Funktion $f(x)$

Die Abgrenzungsfehler zeigen sich an den Enden des Fensterbereiches. Um sie zu unterdrücken liegt es deshalb nahe, die dortigen Flanken abzuflachen oder abzurunden. Dies lässt sich erreichen, indem im Frequenzbereich statt einer abrupten Bandbegrenzung eine

⁸ Die im Bild 7.1-5 außerhalb des Fensterbereiches allmählich abnehmenden Oszillationen sind eine Erscheinungsform des sog. Gibbs'schen Phänomens. Dieses erscheint bei spektralen Bandbegrenzungen und führt speziell an sprunghaften Übergängen im Originalbereich zu etwa 10%-igem Überschwingen.

⁹ Praktisch wurde das Fenster nur um ein Vielfaches verbreitert.

allmähliche Abschwächung der höherfrequenten Fourier-Koeffizienten vorgenommen und somit eine Tiefpass-Filterung erreicht wird. Dies käme der bereits oben vorgesehenen Einführung einer Unschärfe gleich.

Bevor Unschärfen und ihre Auswirkungen weiter erörtert werden, wird die bisherige Originalfunktion $f_o(x)$ zu Vergleichszwecken durch ein Verbundmodell aus anderen Basismodellen abgebildet.

7.2 Modellierung auf der Grundlage der Haar-Wavelet-Transformation

Im Unterschied zu den sinusförmigen Basisfunktionen der Fourier-Transformation, die in $x \in (-\infty, \infty)$ überhaupt nicht lokalisiert sind, können Wavelet-Basen für endliche Ausdehnungen und spezielle Lokalisierungen auf der x -Achse definiert sowie auch sonst weitgehend an die zu beschreibenden Objekte angepasst werden. Ohne von solchen Freiheiten Gebrauch zu machen, wird als Basis-Wavelet nachfolgend einfach das sogenannte Haar-Wavelet [LMR98], s. Bild 7.2-1,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 0,5) \\ -1 & (0,5 \leq x < 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (7.2-1)$$

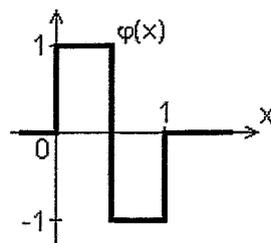


Bild 7.2-1 Das Haar-Wavelet

auf die Originalfunktion $f_o(x)$ aus Bild 7.1-1 angewandt.¹⁰ Dieses Wavelet ist offensichtlich auf $x \in [0, 1]$ lokalisiert. Es wird nun unter Berücksichtigung seiner mögliche Translationen und Dilatationen zunächst so positioniert, dass es die Grenzen des Fensterbereiches $[x_1, x_2]$ nicht schneidet. In diesem Sonderfall können bei der Modellierung des Originals keine Unschärfen hervorrufen werden. Das Bild 7.2-1 verdeutlicht die Wavelet-Transformation von f_o mit dem Haar-Wavelet und die inverse Transformation.

¹⁰ Auf den Zusammenhang der Wavelets mit ihren sogenannten Skalierungsfunktionen wird hier aus Platzgründen und weil dies im weiteren nicht unbedingt erforderlich ist, nicht näher eingegangen.

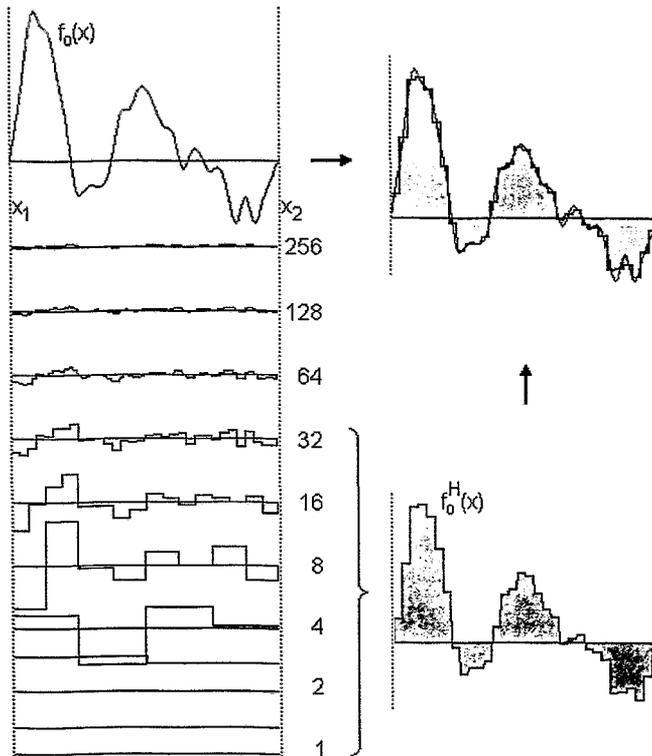


Bild 7.2-1: Haar-Wavelet-Transformation für $f_0(x)$: Links sind unterhalb des Originals f_0 bei abnehmender Auflösung (Skala) die zugehörigen Wavelet-Transformierten dargestellt. Die zu jeder dieser Transformaten gehörende Anzahl von Wavelet-Koeffizienten ist jeweils rechts angegeben. Insgesamt gibt es $256 + 128 + \dots + 1 = 511$ Koeffizienten. Die Superposition bzw. inverse Wavelet-Transformation aller Transformaten ergäbe im Prinzip wieder f_0 . Im Bild erfolgt die Superposition aber nur durch die sechs größten bzw. am wenigsten auflösenden Transformaten mit ihren zusammen $32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$ Koeffizienten und ergibt die im Bild rechts unten dargestellte Stufenfunktion $f_0^H(x)$. Dieses Verbundmodell wird im Bild rechts oben mit dem Original verglichen.

Die Wavelet-Transformierten im Bild 7.2-1 links unten zeigen in graphischer Darstellung (Balken-Höhen) jeweils das Gewicht, mit dem ein Haar-Wavelet von bestimmter Breite an bestimmter Position auf der x -Achse an der Funktion $f_0(x)$ beteiligt ist. Wenn der Fensterbereich $[x_1, x_2]$ beispielsweise in 8 Haar-Wavelets (zu jeweils $1/8$ Fensterbreite) unterteilt ist, dann geht im Bild 7.2-1 aus der vierten Transformaten von unten hervor, dass das Wavelet links außen relativ stark negativ gewichtet ist, das nächste Wavelet stark positiv, das anschließende fast Null usw.

Als vorgegebene Modelle gelten die unterschiedlich positionierten und unterschiedlich gestreckten einzelnen Haar-Wavelets. Deren zugehörige Wavelet-Koeffizienten gelten als Merkmale. Die inverse Wavelet-Transformation besteht analog zur inversen Fourier-Transformation in der Überlagerung der Wavelet-Transformierten. Berücksichtigt werden dabei im vorliegenden Fall nur die größten Wavelets, d.h. diejenigen ab einer gewissen Mindest-Breite. Die Wirkung ist ähnlich wie bei einer Bandbegrenzung auf niedrige Frequenzen im Rahmen der Fourier-Transformation bzw. bei einer Tiefpass-Filterung, vgl. voriger Abschnitt. Die entstandene Stufenfunktion im Bild 7.2-1 rechts unten entspricht einem Verbundmodell. Dieses wird mit der Originalfunktion $f_0(x)$ verglichen, s. rechts oben. Wegen seiner vergleichsweise großen Ähnlichkeit mit f_0 kann das gefundene Verbundmodell als Modellsymbiose aufgefasst werden.

Im Bild 7.2-1 gibt es aufgrund der gewählten Positionierung der Wavelets keine Unschärfe, d.h. die inverse Wavelet-Transformierte endet genau an den Grenzen des Fensterbereiches bzw. ist außerhalb identisch Null. Dies ist als Ausnahme anzusehen oder nur aufgrund entsprechender A-priori-Information über das Original möglich. Allgemein ist über die Position des Originals keine A-priori-Information verfügbar. Dann sind keine zielgerichteten Positionierungen

der Wavelets möglich, folglich können Unschärfen nicht gezielt beeinflusst werden. Statt dessen hängt die konkret auftretende Unschärfe zufällig von der jeweils gewählten Positionierung der Wavelets ab. Mit einer zufälligen Positionierung der Wavelets entstehen analog zum Bild 7.2-1 die Ergebnisse im Bild 7.2-2.

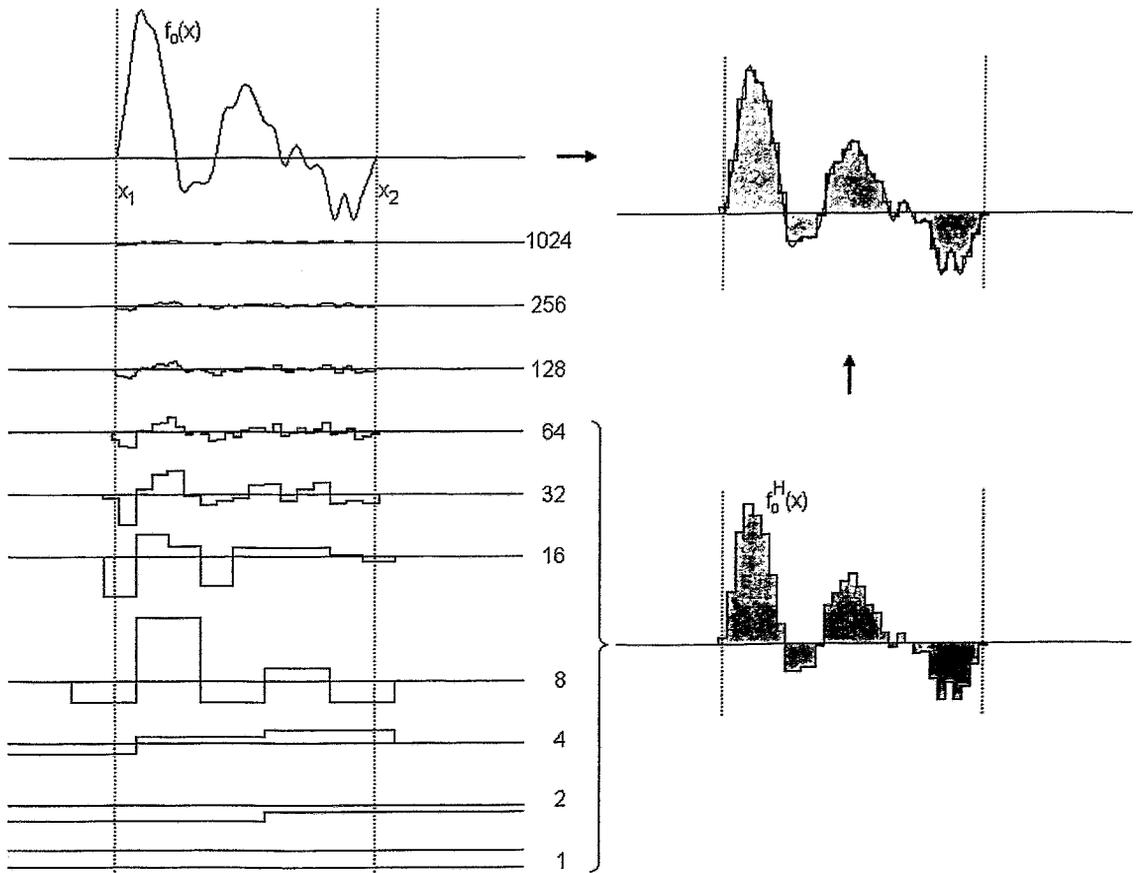


Bild 7.2-2: Die analog zu Bild 7.2-1 vorgenommene Wavelet-Transformation bei lediglich etwas anderer Positionierung der Wavelets führt zu Unschärfe im Verbundmodell.

Die am wenigsten auflösenden bzw. größten Wavelet-Transformierten reichen erheblich über den Fensterbereich $[x_1, x_2]$ hinaus, s. Bild 7.2-2 links unten. Insofern liegt eine weit reichende Unschärfe vor. Die größten Transformaten treten allerdings in der inversen Transformaten und damit im Verbundmodell nur wenig hervor. Das Verbundmodell hat deshalb effektiv nur eine geringe Unschärfe, Bild 7.2-2 rechts. Die Reichweite der Unschärfe wie auch die Auflösung der erzeugten Modellfunktion hängt offensichtlich von der Anzahl der berücksichtigten Wavelet-Transformierten ab. Im Vergleich zu Bild 7.2-2 rechts, wo die sieben größten Transformaten berücksichtigt sind, zeigt das Bild 7.2-3 die inversen Transformaten aus den jeweils 6, 5, 4 und 3 größten Transformaten.

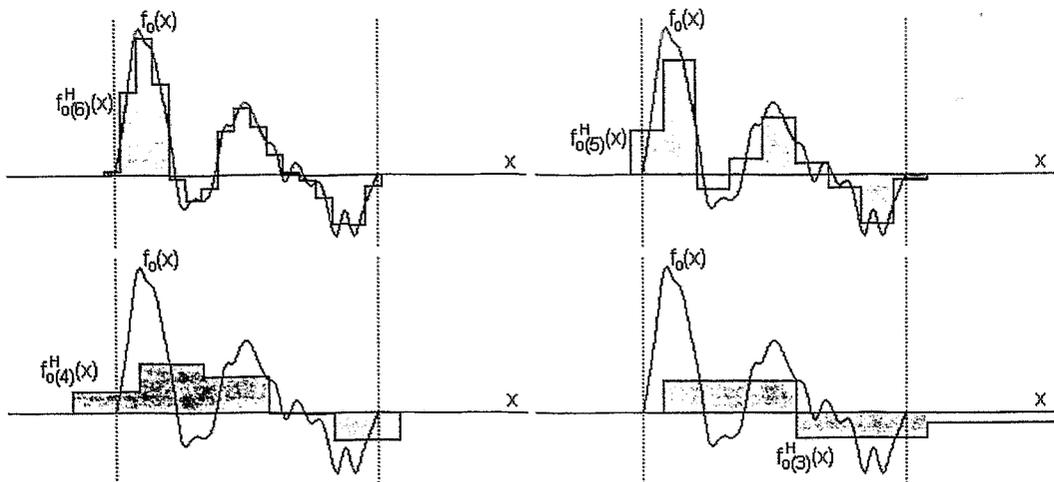


Bild 7.2-3: Verbundmodelle aus den jeweils größten 6, 5, 4 und 3 Wavelet-Transformierten aus Bild 7.2-2, jeweils im Vergleich mit der originalen Funktion

Mit zunehmender Beschränkung auf weniger scharf auflösende Wavelet-Transformierte nimmt offensichtlich die Genauigkeit der Verbundmodelle ab und deren Unschärfe zu. Eine entsprechende Tendenz findet sich im Rahmen der Fourier-Transformation bei der Beschränkung auf niedrigere Frequenzen, vgl. Bilder 7.1-5 und 7.1-4.

7.3 Zusammenhang zwischen Modellunschärfe und Vorhersagefähigkeit

Die obigen Ausführungen zur Fourier- und Wavelet-Transformation zeigen in der Tendenz, dass die Unschärfe einerseits um so geringer ist, je mehr Einzelmodelle in ein Verbundmodell einbezogen werden. Würde jeweils die vollständigen Modellbasis verwendet werden, reichte keines der Verbundmodelle mehr über den Fensterbereich des Originals hinaus. Zum anderen ist ein Verbundmodell um so weniger unscharf, je geringer bereits die Unschärfe der beteiligten Einzelmodelle ist. So sind die trigonometrischen Basismodelle der Fourier-Transformation unschärfer als die Haar-Basismodelle der Haar-Wavelet-Transformation. Entsprechend hat ein Verbundmodell aus Fourier-Basismodellen vergleichsweise mehr Unschärfe und somit mehr Vorhersagefähigkeit als ein Verbundmodell aus Haar-Basismodellen. Zur Verdeutlichung werden noch einmal das Fourier-Verbundmodell $\tilde{f}_{0(4)}$ aus Bild 7.1-4 und das Wavelet-Verbundmodell $f_{0(5)}^H$ aus Bild 7.2-3 betrachtet, s. Bild 7.3-1. Ohne einen speziellen Vergleichsmaßstab für diese beiden Modelle einzuführen, können sie hinsichtlich ihrer Abbildungsgenauigkeit des Originals als annähernd gleichwertig eingeschätzt werden. Ausgehend davon sollen die Unterschiede in der Vorhersagefähigkeit der beiden Verbundmodelle bewertet werden. Dafür werden die im Bild 7.3-1 durch Kreise hervorgehobenen Randbereiche und nahen Umgebungen der Modelle genauer betrachtet.

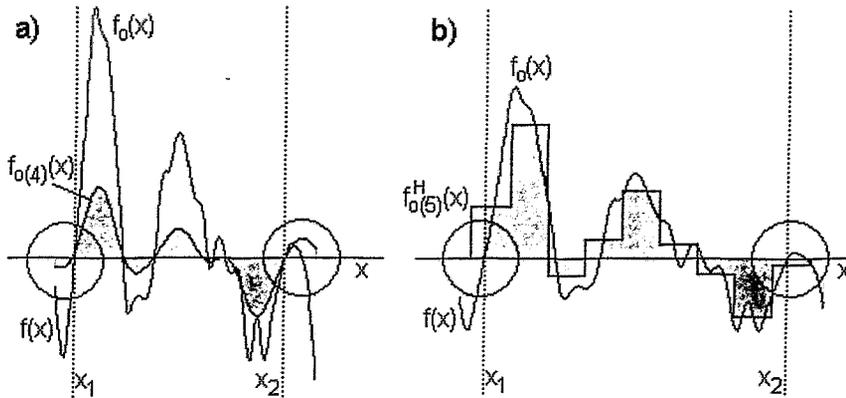


Bild 7.3-1: Verbundmodelle aus a) Bild 7.1-4 und b) Bild 7.2-3 rechts oben, wobei die Randbereiche und nahen Umgebungen des Fensterbereiches besonders hervorgehoben sind

Die Modellfunktion $\tilde{f}_{o(4)}$ im Bild 7.3-1a) zeigt außerhalb des Fensterbereiches deutlich mehr Ähnlichkeit mit der Gesamtfunktion $f(x)$ als die Modellfunktion $\tilde{f}_{o(5)}^H$ im Bild 10b); zu nennen ist insbesondere bei $\tilde{f}_{o(4)}$ und $f(x)$ gleichermaßen ein Unterschwingen links und ein Überschwingen rechts vom Fensterbereich. Vergleichbares ist bei $f_{o(5)}^H$ wie auch bei allen anderen Wavelet-Verbundmodellen nicht feststellbar, vgl. in Bild 7.2-3. Als Gemeinsamkeit zwischen den im Bild 7.2-3 betrachteten Wavelet-Modellen ist allenfalls anzusehen, dass sie links neben dem Fensterbereich größer als Null sind und rechts vom Fenster etwas kleiner als Null. Vergleichbare Eigenschaften hat das Original f_o unmittelbar innerhalb der Fenstergrenzen. Insofern zeigen die Wavelet-Modelle durchaus etwas Unschärfe und damit auch Vorhersagefähigkeit, doch ist diese deutlich weniger ausgeprägt als beim Fourier-Modell. Der festgestellte Trend setzt sich mit noch stärker lokalisierten Basismodellen weiter fort. Werden im Extremfall nur noch Delta-Impulse als Modelle verwendet, gibt es überhaupt keine Unschärfe mehr, z.B. wenn das Original $f_o(x)$ auf eine Basis von äquidistanten Delta-Impulsen $\delta(x - k \cdot \Delta x)$ abgebildet wird, $k \in \mathbb{N}$, Bild 7.3-2.

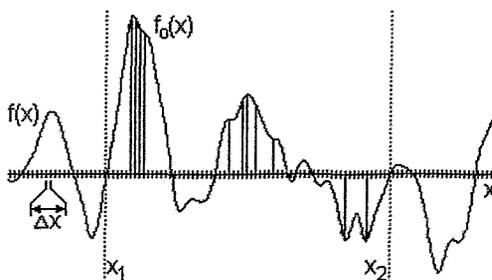


Bild 7.3-2: Beschreibung des Originals $f_o(x)$ durch einige mittels Delta-Impulsen ausgeblendete Funktionswerte

Unabhängig davon, ob sämtliche Abtastwerte von $f(x)$ aus dem Fensterbereich $[x_1, x_2]$ zur Beschreibung des Originals $f_o(x)$ herangezogen werden oder wie im Bild 7.3-2 nur eine Teilmenge davon, gibt es unter Verwendung exakt lokalisierter Modelle keinerlei Unschärfe und damit auch keine Vorhersage. Darin ist vermutlich der Grund dafür zu sehen, dass Impulse im allgemeinen auch nicht als Modelle verwendet werden.

Schlussfolgerung:

Wenn entsprechend der Zielstellung des vorliegenden Beitrages durch ein Zusammenwirken von Modellen eine verbesserte Beschreibung des Originals erreicht und dabei hinsichtlich umfassender Ausnutzung der in den Modellen enthaltenen Objektinformation Vorhersagen getroffen werden sollen, dann müssen die Modelle eine gewisse Unschärfe aufweisen bzw. dürfen nicht zu stark lokalisiert sein.

Unter Verwendung realer Objekte kann eine gewisse Unschärfe durchaus als natürliche Eigenschaft der gegebenen Modelle unterstellt werden. Ob und wie viel Unschärfe dem eventuell noch hinzugefügt werden muss, z.B. durch Filterung oder Glättung, hängt von der Stärke der Kopplungen des jeweiligen Originals mit seiner Umgebung ab; auf solche Kopplungen oder Abhängigkeiten wird im folgenden Abschnitt ausführlicher eingegangen.

7.4 Beziehung zwischen stochastischen Abhängigkeiten des Originals und der Vorhersagefähigkeit eines Modells

Im Unterschied zu praktischen Problemstellungen sind hier die als übergeordnete Realität betrachtete Zufallsgröße $f(x)$ und folglich das Original $f_o(x)$ mit dessen Umgebung vollständig bekannt und können deshalb auf gegenseitige Abhängigkeiten hin untersucht werden. Speziell zur Bestimmung der gegenseitigen Abhängigkeiten zwischen benachbarten Funktionswerten wird die Auto-Korrelationsfunktion

$$K_{xx}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(kT_A) f(kT_A + n) \quad (7.4-1)$$

gebildet, $N = 500$. Sie ist im Bild 7.4-1a) dargestellt. Wie sich erkennen lässt, hat $K_{xx}(n)$ für kleine n noch recht hohe Werte. Folglich sind benachbarte Funktionswerte in $f(x)$ zumindest nicht unabhängig voneinander. Zur Beurteilung der Reichweite der inneren Abhängigkeit werden andere Realisierungen des Zufallsprozesses $f(x)$ hinzugezogen. Fünf verschiedene Realisierungen dieses Prozesses sind im Bild 7.4-2 dargestellt. Deren nach (7.4-1) gebildete Auto-Korrelationen befinden sich im Bild 7.4-1b).

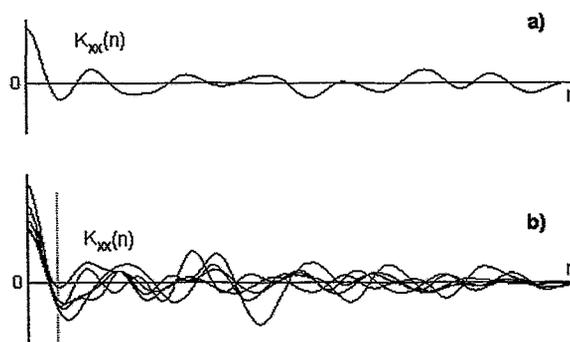


Bild 7.4-1: Auto-Korrelationsfunktionen über N Abtastwerte von a) dem Original $f_o(x)$ und b) den fünf im Bild 7.4-2 dargestellten verschiedenen Realisierungen desselben Zufallsprozesses; ein Ähnlichkeitsbereich ist gepunktet angedeutet.

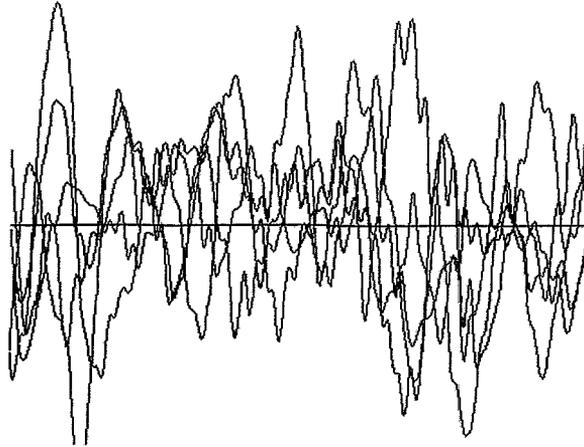


Bild 7.4-2: Gemeinsame Darstellung von 5 Realisierungen des Zufallsprozesses, aus dem auch die Originalfunktion $f_o(x)$ stammt

Die Korrelationsfunktionen im Bild 7.4-1b) ähneln sich im wesentlichen nur in einem Bereich, dessen obere Grenze gestrichelt markiert ist. Dieser Bereich wird im weiteren Ähnlichkeitsbereich genannt, denn benachbarte Funktionswerte der Funktion $f(x)$ sind grob gesehen höchstens über die Breite dieses Bereiches voneinander abhängig. Weil $f(x)$ somit keine weiterreichenden inneren Abhängigkeiten aufweist, können auch Vorhersagen über das Original $f_o(x)$ nicht weiter reichen, d.h. in keine größere Entfernung außerhalb des Fensterbereiches $[x_1, x_2]$.¹¹ Die Vorhersagen, die im Abschnitt 7.1 auf einem Verbundmodell aus vier sinusförmigen Einzelmodellen beruhen, vgl. Bild 7.1-4 oder 7.3-1a), haben ungefähr dieselbe Reichweite. Damit erweisen sich die sinusförmigen Modellfunktionen, obgleich sie einzeln überhaupt nicht lokalisieren, im Verbundmodell als geeignet für realistische Vorhersagen in Bezug auf die Originalfunktion $f_o(x)$. Die lokalisierenden Haar-Wavelet-Modelle erreichen mit einem Verbundmodell, das im Fensterbereich eine ähnliche Genauigkeit wie das sinusbasierte Verbundmodell aufweist, vgl. Bild 7.3-1b), deutlich schlechtere Vorhersagen über die Umgebung des Fensterbereiches.

Realisierungen des gegebenen Zufallsprozesses $f(x)$ können unmittelbar als Modelle definiert und als Einzelmodelle eines Verbundmodells verwendet werden. Im weiteren soll die Vorhersagefähigkeit eines derartigen Verbundmodells eingeschätzt werden. Im Unterschied zu solchen Realisierungen wie denjenigen im Bild 7.4-2, die rein zufällig ausgewählt sind und deshalb nur stochastische Ähnlichkeiten mit der Originalfunktion aufweisen, sollen nun Realisierungen verwendet werden, die auch deterministisch, genauer in ihren äußeren Formen Ähnlichkeiten mit der Originalfunktion $f_o(x)$ aufweisen. Um solche Realisierungen zu finden, werden zwischen dem konkreten Original $f_o(x)$ und zufälligen Realisierungen von $f(x)$ Kreuzkorrelationen gebildet. Realisierungen mit besonders großer Korrelation werden dann als Zufalls-Modelle $f_{mi}(x)$ definiert, $i = 1, 2, 3, \dots$. Zur Bewertung von Ähnlichkeiten zwischen dem Original $f_o(x)$ und den Zufalls-Modellen $f_{mi}(x)$ dienen eigens definierte Ähnlichkeitskoeffizienten

$$g_i = \sum_{k=x_1/T_A}^{x_2/T_A} f_o(kT_A) f_{mi}(kT_A), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (7.4-2)$$

Von insgesamt 10000 zufälligen Realisierungen von $f(x)$ werden die 100 nach (7.4-2) am höchsten bewerteten Realisierungen als Zufalls-Modelle des Originals $f_o(x)$ definiert. Eine

¹¹ Wäre $f(x)$ ein weißes Rauschen, gäbe es keine inneren Zusammenhänge und somit auch keine Korrelation und keinen Ähnlichkeitsbereich. Folglich wäre dann auch keine Vorhersage über das Original $f_o(x)$ möglich; bereits der nächstgelegene Funktionswert außerhalb des Fensterbereiches $[x_1, x_2]$ könnte jeden beliebigen Wert aufweisen.

Auswahl von 25 dieser Modelle ist im Bild 7.4-3 links dargestellt. Damit anhand dieser Modelle weitreichende Unschärfen und damit Vorhersagen möglich sind, erstrecken sie sich analog zu den Basisfunktionen der Fourier-Transformation sowohl weit über den Fensterbereich $[x_1, x_2]$ als auch weit über den Darstellungsbereich im Bild 7.4-3 hinaus.

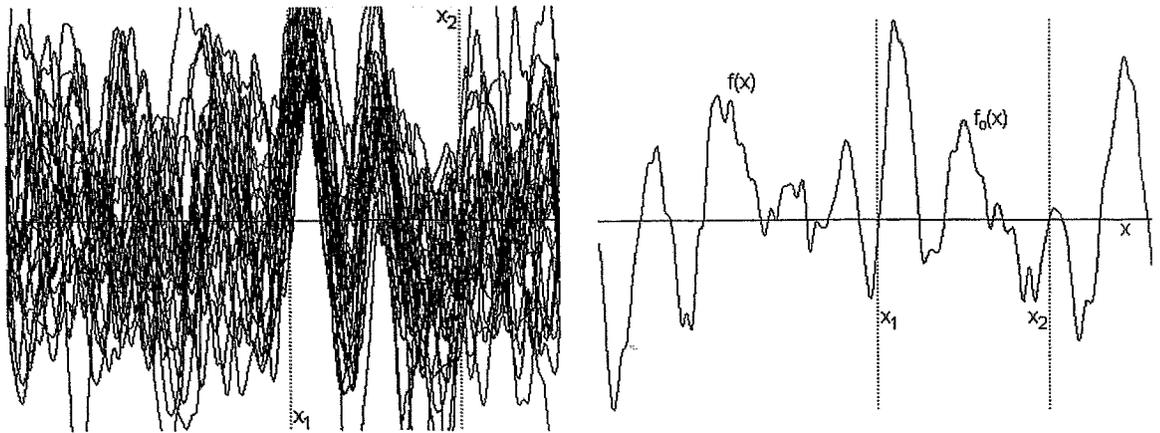


Bild 7.4-3: Gemeinsame Darstellung von 25 Zufalls-Modellen $f_{mi}(x)$, wobei der Fensterbereich des Originals grau unterlegt ist; dort zeigen die Modelle äußerliche Ähnlichkeiten mit dem Original. Rechts ist zum Vergleich noch einmal die Originalfunktion $f_o(x)$ aus Bild 7.1-1 dargestellt

Die Verläufe im Bild 7.4-3 links zeigen im Fensterbereich $[x_1, x_2]$ deutlich erkennbare äußere Ähnlichkeiten mit dem Original $f_o(x)$. Außerhalb des Fensterbereiches bestehen dagegen keine erkennbaren Regelmäßigkeiten. Analog zu den bisher betrachteten Fällen bestehe das Verbundmodell in einer gewichteten Überlagerung bzw. Parallelschaltung der verschiedenen Zufalls-Modelle $f_{mj}(x)$, wobei hier das Gewicht jedes Modells von seiner Ähnlichkeit mit dem Original, d.h. vom Ähnlichkeits-Koeffizienten g_i abhängt:

$$\bar{f}_m(x) = \frac{\sum_{i=1}^{100} g_i f_{mi}(x)}{\sum_{i=1}^{100} g_i} \quad (7.4-3)$$

Aus den vorgegebenen 100 Einzelmodellen entsteht nach (7.4-3) das im Bild 7.4-4 dargestellte Verbundmodell. Zum Vergleich ist auch die Originalfunktion $f_o(x)$ und deren - von $f(x)$ her bekannte - nahe Umgebung angegeben. Die Vorhersagebereiche sind ähnlich wie bereits im Bild 7.3-1 durch Kreise hervorgehoben.

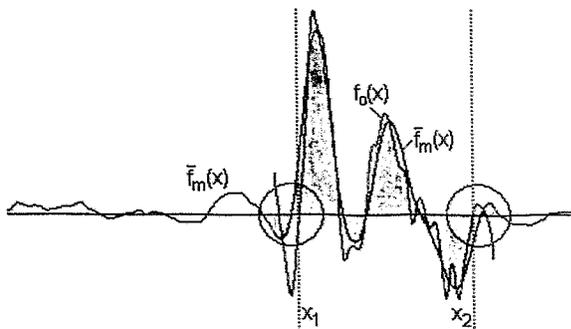


Bild 7.4-4: Aus 100 Einzelmodellen nach (7.4-3) bestimmtes Verbundmodell $f_m(x)$ im Vergleich mit dem Original $f_o(x)$ und dessen naher Umgebung

Die Reichweite der Vorhersage im Bild 7.4-4 kann, da die Zufalls-Modelle den rein stochastischen Charakter der inneren Abhängigkeiten von $f(x)$ adäquat widerspiegeln, als die im gegebenen Fall größtmögliche Reichweite angesehen werden. Eine ähnliche Reichweite wurde auch mit den sinusförmigen Modellen erreicht, vgl. Bild 7.3-1a). Diese Reichweite im Bild 7.4-4 entspricht außerdem - wie leicht einzusehen ist - etwa der Breite des Ähnlichkeitsbereiches im Bild 7.4-1. Weil die verwendeten Zufalls-Modelle die inneren Abhängigkeiten des gegebenen Zufallsprozess $f(x)$ unmittelbar widerspiegeln, kann eingeschätzt werden, dass in diesem Zufallsprozess keine weiter reichende Vorhersagen als die im Bild 7.4-4 dargestellten möglich sind.

Ein Sonderfall liegt dann vor, wenn die gegebenen Einzelmodelle ausschließlich determinierte Zusammenhänge miteinander aufweisen, also keine stochastischen Unsicherheiten. Dann liegt es nahe, die Modelle anhand ihrer gemeinsamen Merkmale direkt zu einem Gesamtmodell zu verbinden, [Ho99], [Ho02].

8 Über die Gewinnung eines verbesserten Einzelmodells aus einer Modellsymbiose

Mit den an einer Modellsymbiose beteiligten Einzelmodellen ist im allgemeinen nicht ausreichend Information verfügbar, aus der eindeutig auf ein besseres Modell des Originals geschlossen werden könnte. Insbesondere sind die Merkmalsmengen, anhand derer die Modellsymbiose betrachtet wird, zu abstrakt und praktisch meistens auch viel zu klein, als dass sie auf ein bestimmtes reales oder ideelles Objekt hinweisen würden. Deshalb sollten statt dessen verschiedene Objekte, die als Modelle des Originals in Betracht kommen oder zumindest daraufhin geprüft werden können, in einem ausreichend großen Vorrat zur Verfügung stehen. Damit kann versucht werden, eine gefundene Modellsymbiose durch ein passendes Einzelmodell zu ersetzen.

Im allgemeinen kann nicht vorausgesetzt werden, dass ein vorrätiges Objekt sich im Merkmalsraum exakt in der Position der Modellsymbiose befindet. Deshalb kann eine gewisse Variation des Objektes erforderlich sein, z.B. in seinen Parametern.

Die Überführung einer Modellsymbiose in ein verbessertes Einzelmodell wird nachfolgend im Bezug auf die bereits oben verwendete Originalfunktion $f_o(x)$ verdeutlicht. Als Modellsymbiose dient dabei das aus vier sinusförmigen Einzelmodellen zusammengesetzte Verbundmodell $\tilde{f}_{o(4)}$, vgl. Bild 7.1-4. In einem Vorrat an Objekten befinde sich z.B. der Polynomansatz

$$f_p(x) = a_8 x^8 + a_7 x^7 + \dots + a_1 x + a_0. \quad (8-1)$$

Um feststellen zu können, ob er sich als Ersatzmodell für die betrachtete Modellsymbiose überhaupt eignet, müssen seine bisher freien Parametern a_i konkrete Werte annehmen. Die Parameterwerte werden dafür weitgehend willkürlich so gewählt, dass die Polynomfunktion $f_p(x)$ innerhalb des Fensterbereiches $[x_1, x_2]$ etwa den gleichen Wertebereich wie das Original $f_o(x)$ überstreicht und dabei jeder einzelne Summand von (8-1) nennenswert zur Funktion $f_p(x)$ beiträgt:

$$\begin{aligned} a_8 = 10^{-19}, a_7 = -10^{-16}, a_6 = 10^{-14}, a_5 = -10^{-12}, a_4 = 10^{-9}, \\ a_3 = -10^{-7}, a_2 = 10^{-4}, a_1 = -0,01, a_0 = 0,1. \end{aligned} \quad (8-2)$$

Die zu diesen Parameterwerten gehörende Funktion $f_p(x)$ ist im Bild 8-1 im Vergleich mit der zu beschreibenden Originalfunktion $f_o(x)$ dargestellt.

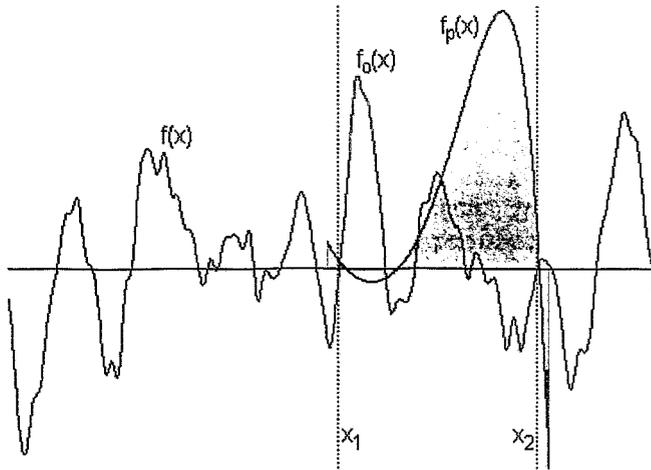


Bild 8-1: Der Polynomansatz (8-1) für den Parametersatz (8-2) im Vergleich mit der Originalfunktion aus Bild 7.1-1

Die Graphen der Funktionen $f_p(x)$ und $f_o(x)$ im Bild 8-1 sind sich innerhalb des Fensterbereiches zumindest in zweierlei Hinsicht wenigstens ähnlich: Zum einen sind die Auslenkungen ihrer Funktionswerte ähnlich weit und zum anderen kommen die Anzahlen ihrer Nulldurchgänge einander nahe. Damit erscheint es möglich, dass der Modellansatz (8-1) auch noch weiter an das Original $f_o(x)$ angepasst werden kann.

Das Polynom-Ersatzmodell $f_p(x)$ nach (8-1) und die Modellsymbiose $\tilde{f}_{o(4)}(x)$ werden im Merkmalsraum betrachtet, speziell in den oben als Merkmale definierten Fourier-Koeffizienten, vgl. Abschnitt 7.1. Die zur Modellsymbiose gehörenden vier Koeffizienten sind bereits aus dem Bild 7.1-2 bekannt; sie sind dort speziell hervorgehoben. Für $f_p(x)$ mit ihren Parametern (8-2) und über den Fensterbereich $[x_1, x_2]$ betrachtet ergibt die Fourier-Transformation nach (7.1-4) die Fourier-Koeffizienten im Bild 8-2. Analog zu Bild 7.1-2 sind diejenigen Koeffizienten, in denen der Vergleich mit der Modellsymbiose durchgeführt werden kann, auch im Bild 8-2 hervorgehoben ($n = 3, 7, 11, 16$).

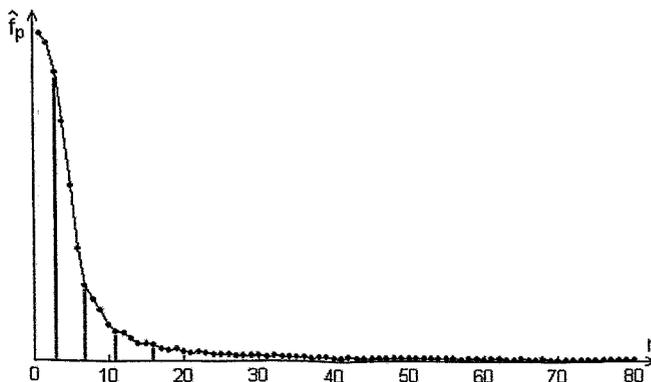


Bild 8-2: Beträge der Fourier-Koeffizienten von $f_p(x)$ mit den Parametern (8-2); die vier hervorgehobenen Frequenzen sind auch die Basisfrequenzen der hier betrachteten Modellsymbiose

Wie das Bild 8-2 erkennen lässt, kommen die Frequenzen der in der Modellsymbiose $\tilde{f}_{o(4)}$ verwendeten Sinusfunktionen auch in der Funktion $f_p(x)$ vor, jedoch mit anderen Werten der betreffenden Fourier-Koeffizienten. Versucht wird nun, den Modellansatz (8-1) durch die Va-

riation seiner Parameter a_i an die Modellsymbiose $\tilde{f}_{o(4)}$ anzupassen.¹² Dies erfolgt durch Minimierung des quadratischen Modellfehlers:

$$\left(f_p(x) - \tilde{f}_{o(4)}(x) \right)^2 = \text{Min!}_{a_0, \dots, a_8} \quad (8-3)$$

Aus (8-1) geht nach (8-3) die optimale Modellfunktion $f^*(x)$ hervor. Sie ist das gesuchte Ersatzmodell und hat die Parameter

$$a_8 = 1,31 \cdot 10^{-16}, a_7 = -1,54 \cdot 10^{-13}, a_6 = 7,26 \cdot 10^{-11}, a_5 = -1,70 \cdot 10^{-8}, a_4 = 1,20 \cdot 10^{-6}, \\ a_3 = -9,11 \cdot 10^{-5}, a_2 = -1,39 \cdot 10^{-3}, a_1 = 0,18, a_0 = -0,58. \quad (8-4)$$

Ob $f^*(x)$ auch ein verbessertes Modell des Originals $f_o(x)$ ist, d.h. besser als die an der Modellsymbiose $\tilde{f}_{o(4)}$ beteiligten Einzelmodelle, ist damit allerdings noch nicht sicher.

Die optimierte Modellfunktion $f^*(x)$ ist im Bild 8-3 gemeinsam mit der Originalfunktion $f_o(x)$ dargestellt.

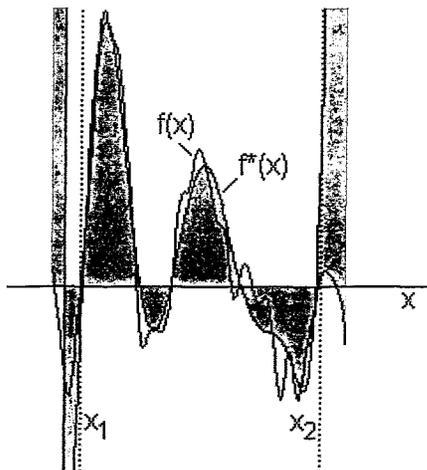


Bild 8-3: Die optimierte polynomiale Modellfunktion $f^*(x)$ im Vergleich mit der Originalfunktion $f_o(x)$ zuzüglich der nahen Umgebung

Wie der Vergleich des Bildes 8-3 mit dem Bild 7.1-4 verdeutlicht, ist die optimale Modellfunktion $f^*(x)$ innerhalb des Fensterbereiches $[x_1, x_2]$ sogar noch genauer als die Modellsymbiose $\tilde{f}_{o(4)}$. Somit ist mit $f^*(x)$ tatsächlich ein verbessertes Einzelmodell für den Ersatz der Modellsymbiose gefunden worden.

Im Bild 8-3 ist in der nahen Umgebung des Fensterbereiches $[x_1, x_2]$ zwar eine tendenziell richtige Vorhersage durch $f^*(x)$ zu erkennen, allerdings ist diese erheblich schlechter als bei $\tilde{f}_{o(4)}$ im Bild 7.1-4. Der Grund dafür sind die Terme höherer Ordnung von (8-1). Im Unterschied zu den Sinusfunktionen der Modellsymbiose wachsen diese Terme außerhalb des Fensterbereiches im Betrag steil an. Für Vorhersagen ist das Polynommodell somit weniger geeignet.

¹² Dieser Optimierungsprozess ist vergleichsweise aufwendig. Er wird deshalb erst vorgenommen, nachdem bereits grundsätzlich nachgewiesen ist, dass sich das betreffende Objekt als Ersatzmodell für die Modellsymbiose eignet.

9 Anwendungsbeispiele

Die bisherigen methodischen Betrachtungen zu der Problemstellung, vorgegebene Einzelmodelle zu einer Modellsymbiose zu verbinden und diese dann zur Bildung eines verbesserten Einzelmodells heranzuziehen, werden nun durch verschiedene Anwendungsbeispiele ergänzt. Da die entwickelte Methodik sehr allgemein ist, d.h. nicht an ein spezielles Fachgebiet gebunden, sind die Beispiele sehr verschiedenartiger Natur.

9.1 Exponentialfunktion mit Rechteck-Modellen

Das zu modellierende originale Objekt soll mit Hilfe vorgegebener Modelle durch eine Modellsymbiose beschrieben werden. Information über das Original ist dabei nur aus diesen Modellen verfügbar; in seiner Gesamtheit ist das Original nicht bekannt. Im betrachteten Beispiel wird das Original allerdings vorgegeben, um an ihm abschließend die entwickelte Modellsymbiose messen zu können.

Das Original ist die Exponentialfunktion

$$f_o(x) = e^{-ax} \quad \text{mit } a = 0,001, x \in [0, 10000]. \quad (9.1-1)$$

Als Modelle werden sieben Rechteck-Funktionen unterschiedlicher Breite und Höhe vorgegeben:

$$f_{mi}(x) = \begin{cases} a_i & \text{für } 0 \leq x \leq x_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, 7 \quad (9.1-2)$$

mit $a_1 = 0,79, a_2 = 0,63, a_3 = 0,52, a_4 = 0,43, a_5 = 0,37, a_6 = 0,32, a_7 = 0,28,$
 $x_1 = 500, x_2 = 1000, \dots, x_7 = 3500$

Sie sind in ihrer Höhe a_i so optimiert, dass entlang ihrer Breite $[0, x_i]$ ihr integraler quadratischer Fehler gegenüber dem Original $f_o(x)$ minimal ist. Die Modellfunktionen $f_{mi}(x)$ sind im Vergleich mit dem Original $f_o(x)$ im Bild 9.1-1 dargestellt.

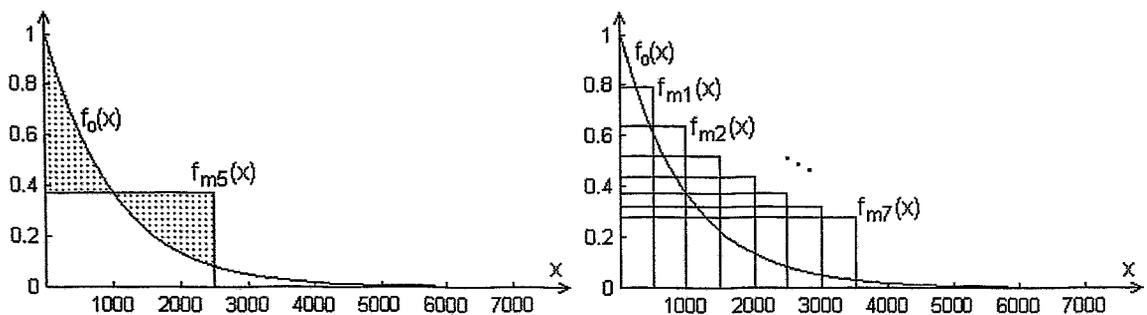


Bild 9.1-1: Links: Das Original $f_o(x)$ nach (9.1-1) gemeinsam mit der Modellfunktion $f_{m5}(x)$ nach (9.1-2); die markierte Differenz (Punkte) ist im quadratischen Mittel gleich Null. Rechts: Das Original gemeinsam mit allen sieben Modellen

Die Rechtecke sind augenscheinlich keine guten Näherungen für die originale Exponentialfunktion. Allerdings lässt die Darstellung im Bild 9.1-1 rechts vermuten, dass diese Modellfunktionen im Zusammenwirken bzw. in einem Verbundmodell eine verbesserte Beschreibung des Originals herbeiführen könnten.

Als Merkmale dienen, wie bereits im Abschnitt 7.1, ausgewählte Fourier-Koeffizienten. Von den hier insgesamt 5000 Frequenz-Stützstellen werden lediglich von 80 Frequenzen aus dem niederfrequenten Teil des Spektrums die Fourier-Koeffizienten als Merkmale verwendet. Die betreffenden Frequenzen bilden, wie im Bild 9.1-2 dargestellt, ein etwas lückenhaftes Frequenzband. Die Nutzung nur weniger ausgewählter Frequenzen des verfügbaren Spektrums ist insofern realistisch, als dass bei realen Problemstellungen aus praktischen Gründen ebenfalls nur eine endliche Anzahl von faktisch unbegrenzt vielen denkbaren Merkmalen genutzt werden kann. Des weiteren soll, wie im Abschnitt 7 begründet wurde, durch die eingeschränkte Merkmalsanzahl eine gewisse Unschärfe und damit Vorhersagefähigkeit des zu bildenden Verbundmodells bzw. der Modellsymbiose sichergestellt werden.

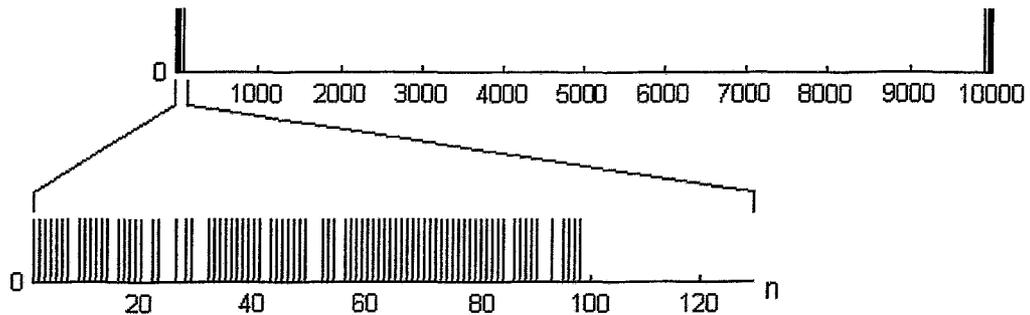


Bild 9.1-2: Aus dem verfügbaren Frequenzbereich mit $n \in [0, 5000]$ werden bestimmte Frequenzen ausgewählt (unten im Bild hervorgehoben). Deren zugehörige Fourier-Koeffizienten gelten als Merkmale. (Das Spektrum ist symmetrisch und mit der Periode von 10000 Frequenzstützstellen periodisch.)

Durch die Fourier-Transformation entstehen aus den vorgegebenen Rechteck-Modellen $f_{mi}(x)$ Formen der bekannten si-Funktion $\sin(n)/n$. Von diesen Spektren $f_{mi}(n)$ werden nur die als Merkmale definierten Fourier-Koeffizienten betrachtet. Deren Beträge sind im Bild 9.1-3 für die gegebenen sieben Modelle dargestellt.

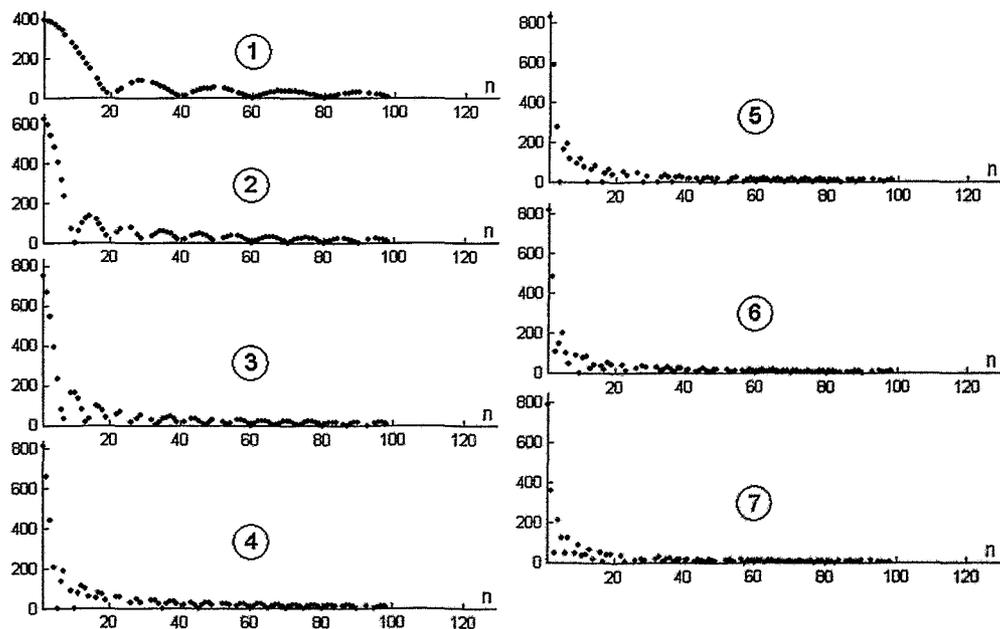


Bild 9.1-3: Die Beträge der als Merkmale definierten Fourier-Koeffizienten der vorgegebenen sieben Modelle

Zusatzinformation über das Original geht lediglich aus den Unterschieden zwischen den Merkmals-Darstellungen der vorgegebenen Modelle hervor. Im Bild 9.1-3 fällt im oberen Teil des dargestellten Spektrums bzw. für etwa $n > 20$ auf, dass vom Modell $f_{m1}(n)$ zum Modell $f_{m7}(n)$ hin, also von ① nach ⑦ die Merkmalsbeträge tendenziell abnehmen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die im Originalbereich breiteren (weniger lokalisierten) Rechteck-Funktionen entsprechend schmalere (stärker lokalisierte) Spektren aufweisen. Die Merkmale befinden sich somit an entsprechend unterschiedlichen Positionen des Merkmalsraumes. Dieser ist allerdings vergleichsweise hochdimensional und daher grafisch nicht darstellbar.

Geprüft wird nun, inwiefern die gewählten Merkmale für das vorliegende Modellierungsproblem tauglich sind. Gegenüber (9.1-2) bedeutet die gewählte Merkmalsdarstellung der Modelle einen Informationsverlust. Um dies zu verdeutlichen, wird für das zur Modellfunktion $f_{m5}(x)$ gehörende Spektrum, vgl. Bild 9.1-3 ⑤, die inverse Fourier-Transformierte $\tilde{f}_{m5}(x)$ gebildet; beide Funktionen sind im Bild 9.1-4 dargestellt.

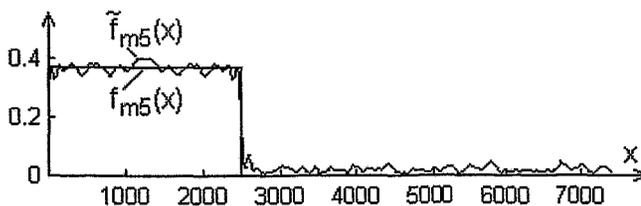


Bild 9.1-4: Zur Verdeutlichung des mit dem Übergang zur Merkmalsdarstellung eines Rechteckmodells verbundenen Informationsverlustes, Darstellung im Originalbereich, s. Text

Im Bild 9.1-4 wird der aus dem Informationsverlust resultierende Fehler offenkundig. Wegen der aber trotzdem noch erheblichen Ähnlichkeit von $\tilde{f}_{m5}(x)$ mit $f_{m5}(x)$ besteht im vorliegenden Fall die Aussicht, bereits anhand der Merkmalsdarstellungen der vorgegebenen Modelle eine Modellsymbiose für das Original (9.1-1) herstellen zu können. Im allgemeinen kann eine Symbiose aber erst mit den vorgegebenen Modellen gebildet werden.

Das Verbundmodell soll in der Parallelität der Modelle bestehen, vgl. Abschnitt 5.2. Die Modelle werden dabei im Merkmalsraum hier nach der Beziehung

$$\bar{f}_m(n) = \sum_{i=1}^7 g_i f_{mi}(n), \quad g_i: \text{frei wählbare Gewichte} \quad (9.1-3)$$

miteinander verbunden. Zu seiner Bewertung wird das Verbundmodell $\bar{f}_m(n)$ durch die inverse Fourier-Transformation in den Originalbereich überführt, wo dann der quadratische Fehler gegenüber der Originalfunktion $f_o(x)$ bestimmt und durch die Variation der Gewichte g_i minimiert wird.

Die Bildung einer kontinuierlichen Fehlerfunktion über dem Merkmalsraum, wie sie oben für die Lokalisierung der Originals allgemein vorgesehen wurde, ist in dem vorliegenden besonders einfachen Fall nicht erforderlich. Hier genügt es, die Gewichte g_i systematisch so lange zu verändern, bis die inverse Fourier-Transformierte von $\bar{f}_m(n)$ den minimalen quadratischen Fehler gegenüber dem Original aufweist. Die aus dieser Suche hervorgehenden optimalen Gewichte sind

$$g_1 = 0,34, g_2 = 0,11, g_3 \approx 0, g_4 = 0,15, g_5 = 0,25, g_6 \approx 0, g_7 \approx 0. \quad (9.1-4)$$

Sie sind der Übersichtlichkeit halber mit den Parameterwerten a_i aus (9.1-2) normiert, d.h. die g_i in (9.1-4) ersetzen die nach (9.1-3) mit (9.1-2) erforderlichen Produkte $a_i g_i$.

Entsprechend der oben entwickelten Methodik werden die in Merkmalsraum optimierten Gewichte g_i aus (9.1-4) anstelle der Parameter a_i in die Rechteck-Modelle (9.1-2) eingesetzt. Daraufhin werden diese Modelle gemäß (9.1-3) zu einem Verbundmodell $\bar{f}_m(x)$ summiert, Bild 9.1-5.

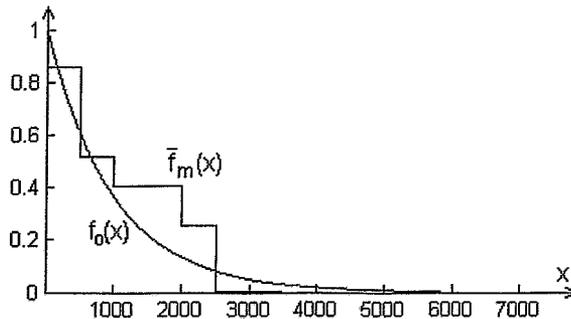


Bild 9.1-5: Aus den Rechteck-Modellen mit Hilfe der optimalen Gewichte g_i aus (9.1-4) gebildetes Verbundmodell im Vergleich mit dem Original

Das gefundene Verbundmodell $\bar{f}_m(x)$ ist deutlich genauer als jedes beteiligte Rechteck-Einzelmodell (9.1-2) für sich allein. Somit kann das Verbundmodell als Modellsymbiose angesehen werden, wenngleich es auffallend ungleichmäßig aus den einzelnen Rechtecken zusammengesetzt ist.

Wie bereits angedeutet wurde, liegt es aufgrund der anhand von Bild 9.1-4 erörterten Ähnlichkeitsbeziehung nahe, ein Verbundmodell im Originalbereich auch dadurch herzustellen, dass von dem im Merkmalsbereich nach (9.1-3) und (9.1-4) bestimmten Verbundmodell $\bar{f}_m(n)$ die inverse Fourier-Transformation vorgenommen wird. Das daraufhin im Originalbereich vorliegende Verbundmodell - kurzerhand ebenfalls mit $\bar{f}_m(x)$ bezeichnet -, ist im Bild 9.1-6 gemeinsam mit der Originalfunktion $f_0(x)$ dargestellt.

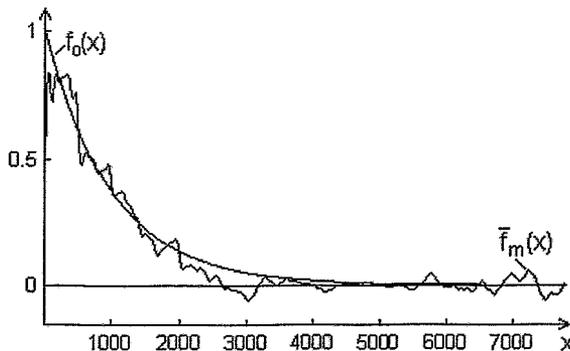


Bild 9.1-6: Aus der Merkmalsdarstellung der Modelle hervorgegangenes optimales Verbundmodell im Vergleich mit dem Original

Auch das Verbundmodell $\bar{f}_m(x)$ im Bild 9.1-6 ist besser als jedes beteiligte Rechteck-Einzelmodell (9.1-2) und kann deshalb gleichfalls als Modellsymbiose gelten. Dieses Verbundmodell ist allerdings nicht mehr aus den vorgegebenen Rechtecken zusammengesetzt, sondern aus den trigonometrischen Basisfunktion der inversen Fourier-Transformation, vgl. (7.1-5). Dies ist als Ausnahme anzusehen und wird deshalb nicht weiter verfolgt.

Ausgehend von der durch (9.1-3) mit (9.1-4) im Merkmalsraum bestimmten Position der Modellsymbiose wird nun nach einem verbesserten Einzelmodell des Originals $f_0(x)$ gesucht.

Wie vorgesehen soll dafür in einem Objektivorrat ein Objekt gefunden werden, welches den Merkmalen der Modellsymbiose möglichst nahe kommt. Vorher wird aber eine zweckmäßige Umformung der Merkmale vorgenommen. Die Modellsymbiose mit ihren einzelnen Merkmalen ist im Bild 9.1-7 links dargestellt. Für die Suche eines verbesserten Einzelmodells des Originals sollen hingegen die reziproken Merkmalswerte der Modellsymbiose verwendet werden, Bild 9.1-7 rechts.

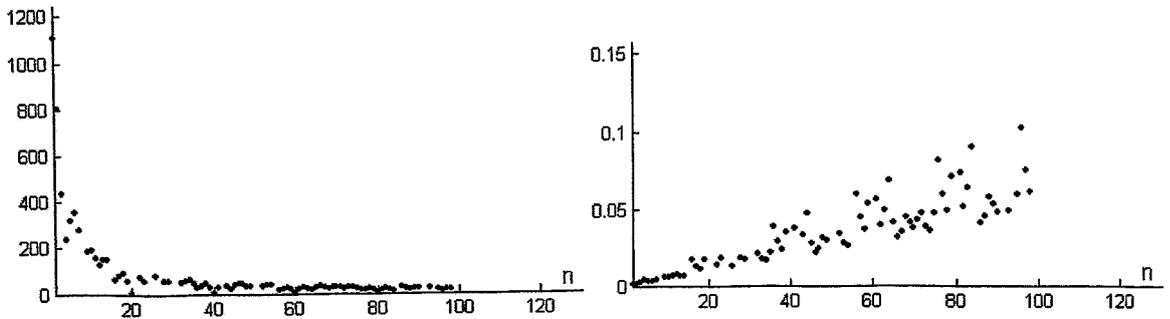


Bild 9.1-7: Beträge der Merkmale der Modellsymbiose (9.1-3) mit (9.1-4), links die direkten und rechts die reziproken Werte

Die Punktfolge im Bild 9.1-7 rechts kann augenscheinlich recht gut durch eine Gerade approximiert werden. Eine solche Regressionsgerade würde sich auf der Suche nach einem verbesserten Modell des Originals als Zwischenschritt oder Hilfsmodell eignen. Als kompakte Darstellungsform der Modellsymbiose kann dieses Hilfsmodell leichter und damit zielsicherer mit den vorrätigen Objekten verglichen werden. Ein Objekt aus dem Objektivorrat¹³ sei die Sprungfunktion

$$\underline{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (9.1-5)$$

Deren Fourier-Transformierte in reziproker Form

$$\frac{1}{F\{\underline{1}(x)\}} = j2\pi n \quad \text{für } n > 0 \quad (9.1-6)$$

ist über n eine durch den Ursprung gehende Gerade und passt dadurch gut zu dem eingeführten Hilfsmodell. Daher schient die Sprungfunktion (9.1-5) durchaus als ein verbessertes Modell der originalen Exponentialfunktion (9.1-1) in Betracht zu kommen. Dies erscheint auch insofern plausibel, als dass (9.1-1) bei Verkleinerung des Parameters a tatsächlich der Sprungfunktion annähert:

$$\lim_{a \rightarrow 0} e^{-ax} = \underline{1}(x) \quad (9.1-7)$$

Zur Überprüfung, inwieweit sich die Sprungfunktion wirklich als verbessertes Modell eignet, wird vom Original (9.1-1) die reziproke Fourier-Transformierte gebildet:

$$\frac{1}{F\{e^x\}} = 1 + j2\pi n \quad (9.1-8)$$

¹³ Dieser Vorrat kann z.B. in elementaren mathematischen Funktionen bestehen. Die genannte Regressionsgerade kann bereits als ein Objekt aus einem solchen Objektivorrat angesehen werden.

Zum Vergleich mit den reziproken Merkmalswerten aus Bild 9.1-7 rechts ist die Funktion (9.1-8) im Bild 9.1-8 dargestellt.

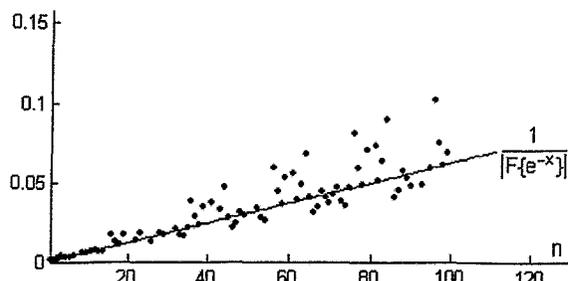


Bild 9.1-8: Beträge der reziproken Fourier-Transformierten des Originals (9.1-1) im Vergleich mit den reziproken Merkmalswerten aus Bild 9.1-7 rechts

Wie das Bild 9.1-8 erkennen lässt, nähert sich der Betrag der Funktion (9.1-8) für wachsende n wirklich einer durch den Ursprung gehenden Geraden, welche die Punktfolge der reziproken Merkmalswerte approximiert. Allerdings sollte der zwischen (9.1-6) und (9.1-8) für kleine n bestehende Unterschied nicht vernachlässigt werden. Dieser Unterschied kann anhand der Punktfolge im Bild 9.1-7 links besser verdeutlicht werden. Diese Folge nähert sich nämlich bei abnehmendem n nur mit endlichem Anstieg an die Stelle $n = 0$ an, wohingegen diese Stelle nach dem Geraden-Hilfsmodell singulär ist und deshalb überhaupt nicht erreicht werden dürfte. Aufgrund dieser Diskrepanz ist die Sprungfunktion letztlich doch keine gute Näherung der originalen Exponentialfunktion (9.1-1). Die Sprungfunktion kann sogar, wie noch zu sehen sein wird, nicht einmal als nennenswerte Verbesserung gegenüber den einzelnen Rechteck-Modellen (9.1-2) angesehen werden.

Im vorliegenden Beispiel kann eine Modellsymbiose bzw. ein Verbundmodell auch unmittelbar mit den vorgegebenen Rechteck-Modellen $f_{mi}(x)$ aus (9.1-2) gebildet werden. Die Einzelmodelle werden dazu gemäß (9.1-3), jedoch diesmal direkt im Originalbereich zusammengefasst:

$$\bar{f}_m(x) = \sum_{i=1}^7 g_i f_{mi}(x) \quad (9.1-9)$$

Die Gewichte g_i werden hierbei wiederum durch Minimierung des quadratischen Modellfehlers optimiert. Im Unterschied zu (9.1-4) entstehen nunmehr die optimalen Gewichte

$$g_1 = 0,31, g_2 = 0,19, g_3 = 0,11, g_4 = 0,069, g_5 = 0,042, g_6 = 0,026, g_7 = 0,039, \quad (9.1-10)$$

erneut normiert mit den a_i aus (9.1-2). Bild 9.1-9 zeigt das daraus hervorgehende Verbundmodell $\bar{f}_m(x)$. Dieses ist offensichtlich wieder eine Modellsymbiose, weist dabei aber wesentlich mehr innere Regelmäßigkeit auf als die vermittels des Merkmalsraumes hergestellte Modellsymbiose im Bild 9.1-5.

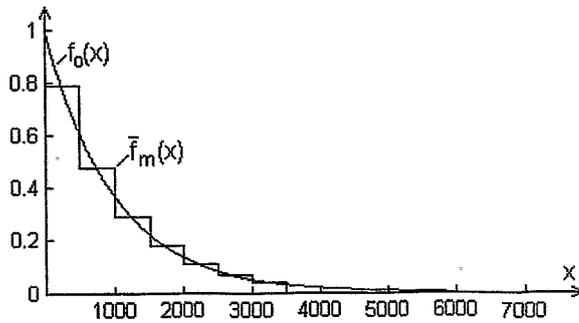


Bild 9.1-9: Unmittelbar aus den vorgegebenen Rechteck-Modellen gebildete Modellsymbiose im Vergleich mit dem Original

Die Merkmale der neuen Modellsymbiose befinden sich analog zu Bild 9.1-7 im Bild 9.1-10, zuzüglich der bereits im Bild 9.1-8 benutzten inversen Fourier-Transformierten der originalen Exponentialfunktion (9.1-1).

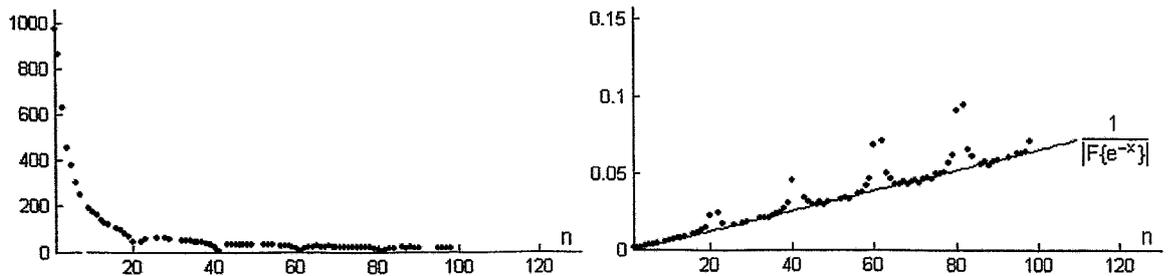


Bild 9.1-10: Beträge der Merkmale der Modellsymbiose aus Bild 9.1-9, links direkt und rechts reziprok sowie mit dem Betrag der inversen Fourier-Transformierten des Originals

Im Vergleich mit Bild 9.1-8 wäre es für die Punktfolge im Bild 9.1-10 rechts deutlich leichter möglich, eine geeignete Approximationsfunktion und somit ein verbessertes Modell des Originals zu suchen. Dies zeigt sich insbesondere im Bereich kleiner n , welcher im Bild 9.1-11 hervorgehoben ist. Dort besitzt nämlich die Folge der reziproken Merkmalswerte eine ähnliche Krümmung wie das reziproke Spektrum des Originals. Somit ist anzunehmen, dass aus der Modellsymbiose im Bild 9.1-9 heraus leichter auf ein verbessertes Modell des Originals geschlossen werden könnte als aus der Modellsymbiose im Bild 9.1-5.

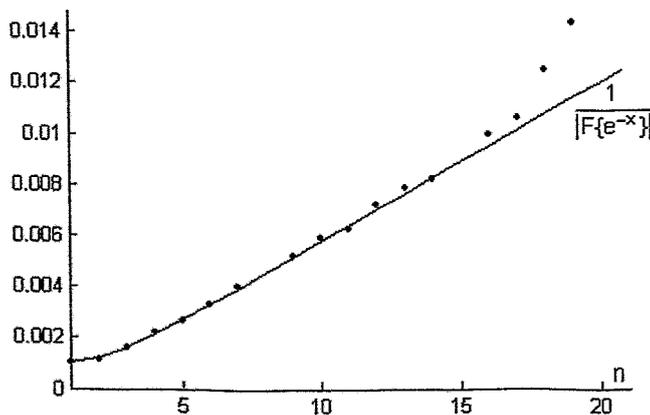


Bild 9.1-11: Details aus Bild 9.1-10 rechts

Möglicherweise kann eine Modellverbesserung mit Hilfe anderer Merkmale ebenfalls oder sogar noch leichter erreicht werden. Dies ließe sich an dem vorliegenden rein theoretischen Beispiel leicht untersuchen, worauf hier jedoch verzichtet wird.

9.2 Regelung des Kalt-Heiß-Wasseranteils in einer Dusche

Im Unterschied zu dem vorigen sehr theoretischen Beispiel wird nun ein Modellverbesserungs-Problem an einem mehr alltäglichen praktischen Gegenstand behandelt, nämlich am Einstellen der Wassertemperatur in einer Dusche. Während der Einstellphase ist dabei ein Regelkreis wirksam. Der dabei agierende (menschliche) Regler stützt sich notwendigerweise auf ein Modell bzw. gewisse Modellvorstellungen oder allgemein gewisser A-priori-Information über den zu regelnden Prozess; anderenfalls wäre eine Regelung unmöglich. Erfahrungsgemäß beherrscht der Mensch mit zunehmender Erfahrung im Umgang mit einer Dusche den Einstellvorgang immer präziser. Er verbessert also allmählich seine Modellvorstellungen darüber. Nachfolgend wird der Versuch unternommen, diesen Vorgang der Modellverbesserung nachzuvollziehen.

In getrennten Zuleitungen steht kaltes und heißes Wasser zur Verfügung. Daraus soll in der Dusche eine gewünschte Wassertemperatur gemischt werden. Die Dusche selbst besteht aus einer Mischstelle, welche das heiße und das kalte Wasser in einem einstellbaren Verhältnis zu einem einzigen Wasserstrom zusammenführt, weiterhin aus einem Schlauch zur Weiterleitung des Mischwassers und schließlich aus einem Duschkopf, aus dem das Wasser letztlich austritt.

Die Wassertemperatur unmittelbar hinter der Mischstelle wird als Steuergröße $u(t)$ aufgefasst. Die Temperatur des aus dem Duschkopf austretenden Wassers sei die Regelgröße $x(t)$. Der Transportweg von der Misch- zur Austrittsstelle des Wasser bewirkt eine Totzeit bzw. Transportzeit T_t . Zusätzliche Durchmischung entlang des Transportweges, die z.B. von Turbulenzen verursacht werden kann, wird durch eine Verzögerung 1. Ordnung mit der Zeitkonstanten T_1 ausgedrückt. Die prinzipielle Sprungantwort dieses Systems zeigt das Bild 9.2-1: Eine sprunghafte Temperaturänderung an der Mischstelle wird am Duschkopf zunächst gar nicht und dann nur allmählich (nicht sprunghaft) wirksam.

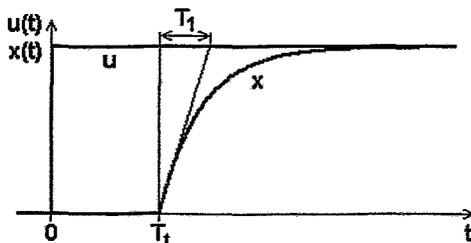


Bild 9.2-1: Prinzipielle Sprungantwort der Dusche

Die Temperaturen des zufließenden heißen und kalten Wassers werden $u_h(t)$ und $u_k(t)$ genannt. Sie sind - im großen Zeitmaßstab betrachtet - nicht konstant, sondern schwanken mit zufälligen Abweichungen $d_h(t)$ und $d_k(t)$ um ihre Mittelwerte u_{h0} und u_{k0} , also

$$u_h(t) = u_{h0} + d_h(t), \quad u_k(t) = u_{k0} + d_k(t). \quad (9.2-1)$$

Im kleinen Zeitmaßstab sind u_h und u_k dagegen näherungsweise konstant. Die Mischstelle enthält zwei Ventile, s. Bild 9.2-2, welche der Einfachheit halber so miteinander gekoppelt sind, dass am Austritt der Mischstelle immer ein konstanter Durchfluss vorliegt. Die Ventil-Austrittstemperaturen $u_H(t)$ und $u_K(t)$ werden nur formal eingeführt, denn sie vereinigen sich praktisch sofort zur Mischtemperatur $u(t)$.

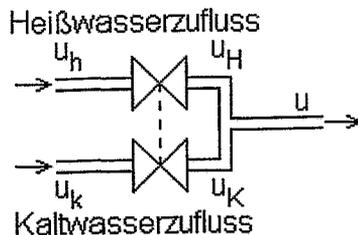


Bild 9.2-2: Schema der Mischstelle

Ziel ist ein günstiges Führungsverhalten, d.h. der Fehler zwischen der Regelgröße $x(t)$ und einer Führungsgröße bzw. einem Sollwert w , $u_k < w < u_h$, soll nach einem noch zu konkretisierenden Fehlerkriterium minimal sein, d.h. möglichst soll $x(t) \equiv w(t)$ sein. Gesucht wird ein dafür geeignetes Reglerverhalten und, als Voraussetzung dafür, eine entsprechende Modellvorstellung über die Regelstrecke Dusche.

Angenommen wird, dass elementare Modelle der Strecke bereits vorhanden sind. Diese Annahme erscheint insofern gerechtfertigt, als dass auch der Mensch, wenn er eine Dusche zum ersten Mal benutzt, (üblicherweise) ein gewisses Mindest-Vorwissen über ihr Verhalten hat. So weiß er zumindest, dass bei zu kalt empfundenen Duschwasser das Heißwasserventil (weiter) geöffnet werden muss und bei zu heißem Duschwasser das Kaltwasserventil. Entsprechend sind über das Verhalten der Regelstrecke, welche in diesem Fall das originale Objekt darstellt, die folgenden einander ergänzenden Modelle vorgegeben:

- Das Heißwasserventil sei vollständig offen, wenn die Regelgröße $x(t)$ kleiner als der Sollwert w ist. Anderenfalls ist der Zufluss Null und deshalb die Ventil-Austrittstemperatur u_H unbestimmt, also

$$u_H = \begin{cases} u_h = u_{h0} + d_h & \text{für } x < w \\ \text{unbestimmt} & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.2-2a)$$

- Das Kaltwasserventil sei offen, wenn die Regelgröße $x(t)$ größer oder gleich dem Sollwert w ist. Anderenfalls ist der Zufluss Null und die Ventil-Austrittstemperatur u_K unbestimmt, also

$$u_K = \begin{cases} u_k = u_{k0} + d_k & \text{für } x \geq w \\ \text{unbestimmt} & \text{sonst} \end{cases} \quad (9.2-2b)$$

- Die beiden Zuflüsse bilden die Steuergröße

$$u = u_H + u_K. \quad (9.2-3)$$

Aus diesen vorgegebenen Modellen soll letztlich ein verbessertes Modell der Regelstrecke hervorgehen, welches als Grundlage des Reglers ein verbessertes Führungsverhalten des Regelkreises erreicht.

Die zwei Modelle (9.2-2a) und (9.2-2b) könnten im Prinzip auch getrennt voneinander verwendet werden, obwohl dies praktisch kaum Sinn hätte. Um dies kurz zu verdeutlichen wird angenommen, dass allein das Modell (9.2-2a) bekannt ist. Dann wird im Falle einer Regelabweichung $x - w < 0$ das Heißwasser zugeschaltet und entsprechend der wirksamen Transport- und Verzögerungszeit so lange fließen, bis am Austritt die Ungleichung $x - w > 0$ erfüllt ist. Der Zufluss bleibt daraufhin so lange unterbrochen, bis sich die Wassertemperatur $x(t)$ infolge einer Umgebungstemperatur $< w$ von selbst wieder unter den Sollwert w abkühlt. Dies kann vergleichsweise viel Zeit beanspruchen. Sobald $x < w$ ist, wird wieder das Heißwasser zugeschaltet usw. Äquivalent verhielte es sich, wenn allein das Modells (9.2-2b) bekannt wäre. Auch ohne quantitative Betrachtung dieser Vorgänge ist leicht einzusehen, dass in beiden Fällen die Regelabweichung sehr - und für eine Dusche unverträglich - groß wäre.

Die Zusammenfassung der vorgegebenen Modelle (9.2-2a) und (9.2-2b) nebst (9.2-3) zu einem Verbundmodell wird nach dem Prinzip der Modellumschaltung vorgenommen, vgl. Abschnitt 5.2; es entsteht der Zweipunktregler

$$u = \begin{cases} u_h = u_{h0} + d_h & \text{für } x < w \\ u_k = u_{k0} + d_k & \text{für } x \geq w \end{cases} \quad (9.2-4)$$

Nach (9.2-4) werden die beiden Modelle (9.2-2a) und (9.2-2b) abhängig von der Regelgröße $x(t)$ zeitlich abwechselnd wirksam. Die Dauer der Zeitintervalle zwischen den Umschaltungen wird von der Transport- und Verzögerungszeit der Regelstrecke bestimmt. Das Umschaltverhältnis hängt von der Lage des Sollwertes w bezüglich der Werte u_k und u_h ab. Im Regelkreis bilden sich bei festen Zuflusstemperaturen u_h und u_k (kleiner Zeitmaßstab) stationäre Schwingungen in $u(t)$ und $x(t)$ heraus, Bild 9.2-3.

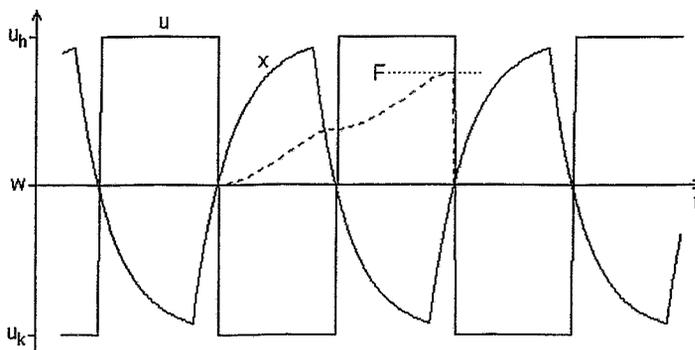


Bild 9.2-3: Regelkreisverhalten bei $w = \text{konst.} = (u_h - u_k)/2$. Der Betrag der Regelabweichung wird über eine Periode integriert (gestrichelt) und bildet im Endwert den Fehler F (gepunktet).

Wegen einer vergleichsweise großen Transport- und Verzögerungszeit ist die Amplitude der Schwingungen der Regelgröße $x(t)$ erheblich; $x(t)$ überstreicht beinahe den maximal möglichen Wertebereich $[u_k, u_h]$. Die Existenz dieser Schwingungen zeigt bereits ohne spezielles Bewertungskriterium deutlich, dass das in Gestalt des Zweipunktreglers vorliegende Verbundmodell der Regelstrecke besser ist als jedes der zwei beteiligten Einzelmodelle (9.2-2a) und (9.2-2b) für sich allein. Insofern kann dieses Verbundmodell als eine Modellsymbiose angesehen werden.

Allerdings bedeutet die ziemlich große Amplitude der x -Schwingungen und damit der große Unterschied zum gewünschten Führungsverhalten $x \equiv w$, dass (9.2-4) bei weitem noch keine sehr gute Beschreibung der Regelstrecke repräsentieren kann. Jedoch ist mit den gegebenen Einzelmodellen (9.2-2) mangels freier Parameter keine weitere Verbesserung der Modellsymbiose möglich. Die damit vorliegende Situation ähnelt derjenigen im Bild 5.2-1, wo durch die Umschaltung zwischen den verschiedenen Einzelmodellen eine begrenzte Hülle nicht verlassen und darum keine weitere Fehlerverringerng erreicht werden kann. Eine Parallelschaltung der Einzelmodelle, welche gemäß Bild 5.2-3 ein Verlassen der Hülle als denkbar erscheinen ließe, kann wiederum mit den hier vorgegebenen Modellen prinzipiell nicht hergestellt werden. Aus diesem Grund wird nachfolgend nicht nach einer noch besseren Modellsymbiose gesucht, sondern in einem noch zu definierenden Merkmalsraum derjenige Punkt, in dem eine noch zu bestimmende Fehlerfunktion minimal ist.

Ein formales Kriterium zur Bewertung des Modellfehlers wird anhand des Zeitverhaltens von $x(t)$ im Bild 9.2-3 hergeleitet. Weil die Regelabweichung $x - w$ beide Vorzeichen annimmt, der Fehler aber nicht negativ sein kann, wird der Betrag $|x - w|$ gebildet. Bei Unterstellung der Periodizität von $x(t)$ wird nur eine einzige Schwingungsperiode berücksichtigt. Damit lautet der zu minimierende Modellfehler

$$F = \frac{1}{\text{Periode}} \int_{\text{Periode}} |x - w| dt. \quad (9.2-5)$$

Die zeitliche Entwicklung des nach (9.2-5) definierten Fehlers F innerhalb einer einzelnen Schwingungsperiode von $x(t)$ ist bereits im Bild 9.2-3 gestrichelt eingezeichnet. Zur Bestimmung von Modellfehlern über dem Merkmalsraum werden nicht die separaten Einzelmodelle (9.2-2a) und (9.2-2b) herangezogen und ggf. variiert, denn nach den obigen Ausführungen zu urteilen befinden sie sich viel zu weit vom Minimum des Modellfehlers und damit vom Original entfernt. Dagegen kann von der Modellsymbiose (9.2-4) angenommen werden, dass sie sich vergleichsweise nahe am Original befindet. Da diese nicht selbst variiert werden kann, werden statt dessen die zufälligen, im großem Zeitmaßstab in Erscheinung tretenden zufälligen Schwankungen der Zuflusstemperaturen u_h und u_k berücksichtigt. Daran orientiert werden die Differenzen $u_h - w$ und $u_k - w$ als Merkmale definiert. Mit diesen Merkmalen soll das im Steuergrößenintervall $u_k < u < u_h$ zu erwartende Minimum des Fehlers F nachgewiesen werden.

Zur Erschließung ausreichend vieler Fehlerwerte wird der Modellfehler nach (9.2-5) in ausreichend großen Zeitabständen über jeweils eine Periode der Regelgröße $x(t)$ bestimmt und dies in drei getrennten Untersuchungsserien für die Sollwerte

$$w = (u_{k0} + u_{h0})/2, \quad w = (7u_{k0} + u_{h0})/8 \quad \text{und} \quad w = (u_{k0} + 7u_{h0})/8 \quad (9.2-6)$$

über je 1000 Einzelmessungen; jeweils im Mittel ist dabei die Gesamttemperatur $u_h + u_k = \text{konst.}$ Im Ergebnis liegen über dem Merkmalsraum drei annähernd diagonal angeordnete Cluster mit Fehlerwerten vor. In diese Cluster sollen - analog zu Darstellungen im Abschnitt 5.1 - Niveaulinien eingetragen werden. Dahingehend sind im Bild 9.2-4 nur diejenigen Fehlerwerte bzw. Clusterpunkte eingetragen, die zu einer Folge äquidistanter Wertintervalle gehören. Die restlichen Clusterpunkte sind im Bild weggelassen.

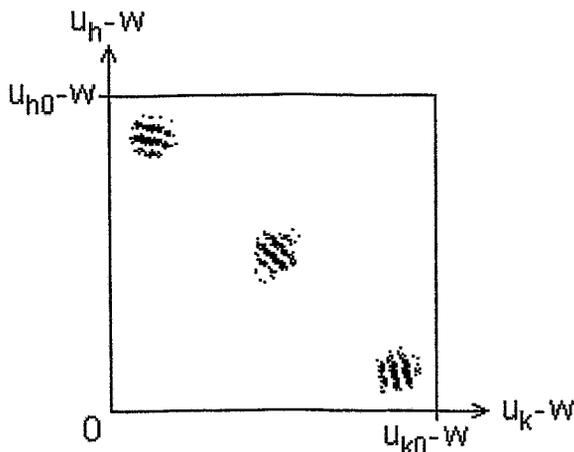


Bild 9.2-4: Ergebnis dreier Experimente zur Bestimmung des Modellfehlers, s. Text

Wie im Bild 9.2-4 auch ohne entsprechende Hilfslinien erkennbar ist, weisen die Senkrechten über den Niveaulinien deutlich zum Nullpunkt ($u_k - w = 0, u_h - w = 0$). Daraus folgt zwar zunächst $u_k = w$ und $u_h = w$, da jedoch entsprechend (9.2-4) der Heiß- und der Kaltwasserzufluss nur abwechselnd wirksam sind und weil beide Zuflüsse gemäß (9.2-3) vereinigt werden, lautet das eigentliche Ergebnis $u = w$. Das Fehlerminimum im Merkmalsraum liegt somit dann vor, wenn die Stellwert u dem Sollwert w gleich oder allgemeiner, wenn die Stellgröße $u(t)$ der Führungsgröße $w(t)$ identisch folgt.¹⁴

¹⁴ Aus regelungstechnischer Sicht ist dies selbstverständlich eine triviale Erkenntnis. Wesentlich ist jedoch hier, dass diese Erkenntnis nach der entwickelten Methodik gewonnen werden konnte.

Der entwickelten Methodik folgend, muss nunmehr aus einem Objektivorrat ein Objekt gesucht werden, welches die Regelgröße $x(t)$ möglichst nahe am Sollwert w sein lässt. Unter dem Einfluss von Störgrößen, die bisher zwar noch nicht berücksichtigt wurden, mit denen aber unter realen Bedingungen immer gerechnet werden muss, kann aber nur eine möglichst weitgehende Annäherung von $x(t)$ an w verlangt werden. Im vorliegenden Fall kann das benötigte Objekt nur ein Regler sein.

Das obige Ergebnis $u = w$ oder allgemeiner $u(t) \equiv w(t)$ entspricht einer offenen Steuerung. Diese wird als Grundstruktur beibehalten. Ihr wird die erforderliche Regelung einfach nur überlagert, wobei nachfolgend ein P-Regler mit einer statischen Verstärkung k vorgesehen wird, Bild 9.2-5:

$$u = w + k(w - x) \quad (9.2-6)$$

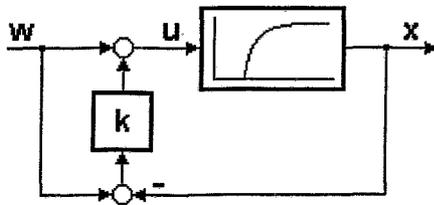


Bild 9.2-5: Steuerung mit überlagelter Regelung entsprechend (9.2-6)

Wegen der Transport- und Verzögerungszeit in der Regelstrecke neigt der im Bild 9.2-5 vorliegende Regelkreis in seinem Verhalten zu Schwingungen. Die Sprungantwort des Systems abhängig von einigen ausgewählten Reglerverstärkungen k zeigt das Bild 9.2-6; die ebenfalls dargestellte Entwicklung des Fehlers F (gestrichelt) erfolgt im Unterschied zu (9.2-5) durch eine fortlaufende Integration.

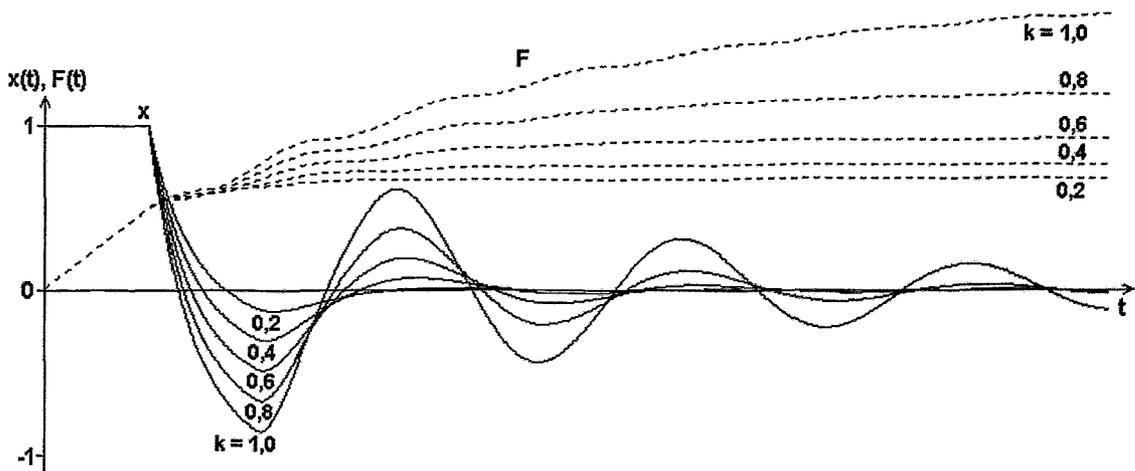


Bild 9.2-6: Sprungantwort der Regelung aus Bild 9.2-5 bei unterschiedlichen Reglerverstärkungen k

Im Vergleich zum Verhalten der vorherigen Zweipunktregelung, vgl. Bild 9.2-3, nehmen nach (9.2-6) die Schwingungen im jetzigen Regelkreis allmählich ab, wobei der Fehler F nur begrenzte anwächst. In der Zweipunktregelung würde dieser Fehler dagegen unbegrenzt zunehmen, nämlich pro Schwingungsperiode um den im Bild 9.2-3 dargestellten Betrag. Die P-Regelung realisiert somit eine deutlich bessere Modellsymbiose als die vorherige Zweipunktregelung.

9.3 System aus parallelen Übertragungsgliedern

Ähnlich wie im Abschnitt 9.1 wird von einem bekannten Original ausgegangen, das diesmal aber vorerst nicht genannt wird. Bekannt sei von ihm zunächst nur, dass es sich um ein Übertragungsglied G mit der Eingangsgröße $u(t)$ und der Ausgangsgröße $x(t)$ handelt, welches für die beiden Eingangssprünge

$$u_a(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad u_b(t) = \begin{cases} -0,4 & \text{für } t \geq 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases} \quad (9.3-1)$$

die im Bild 9.3-1 dargestellten Antworten $x_a(t)$ und $x_b(t)$ hervorruft, wobei $x_a = -x_b \rightarrow \frac{2}{3}$ für $t \rightarrow \infty$ ist.

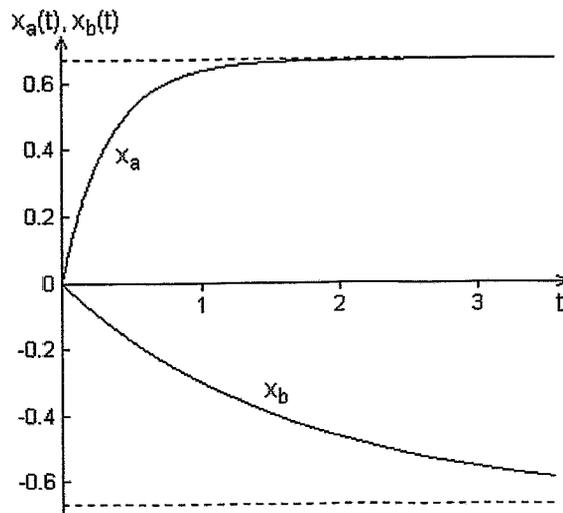


Bild 9.3-1: Sprungantworten des originalen Übertragungsgliedes G (Zeit normiert)

Ausgehend von diesen Sprungantworten wird ein Modell für G gesucht. Nach der äußeren Erscheinung jeder einzelnen Sprungantwort zu urteilen eignet sich dafür der PT_1 -Ansatz, d.h. das lineare zeitinvariante Verzögerungsglied 1. Ordnung. Da sich allerdings die beiden im Bild 9.3-1 befindlichen Sprungantworten signifikant voneinander unterscheiden, müssen sich zwei Lösungen mit unterschiedlichen Parametern und somit zwei unterschiedliche PT_1 -Modelle ergeben. Dies bedeutet, dass G nach dem PT_1 -Ansatz zwar in zwei dargestellten Sonderfällen richtig beschrieben wird, jedoch nicht insgesamt.

Die beiden zu den Sprungantworten im Bild 9.3-1 gehörenden Modelle gelten im weiteren als vorgegeben und lauten konkret

$$G_a: T_a \dot{x}_a + x_a = K_a u_a, \quad G_b: T_b \dot{x}_b + x_b = K_b u_b \quad (9.3-2a,b)$$

mit $T_a = \frac{1}{3}$, $T_b = \frac{5}{3}$: Zeitkonstanten (normiert) und
 $K_a = \frac{1}{3}$, $K_b = \frac{5}{3}$: statische Verstärkungen
 $t \geq 0$, $x_a(0) = 0$, $x_b(0) = 0$.

Diese Modelle beschreiben ihre betreffenden $x(t)$ -Verläufe im Bild 9.3-1 exakt. Für andere mögliche Sprungantworten wie auch für Antworten auf sonstige Anregungen von G stellen diese Modelle bestenfalls Näherungen dar. Dies soll am Beispiel einer sinusförmigen Anregung

$$u(t) = 0,3 \sin(0,01\pi t) \quad (9.3-3)$$

verdeutlicht werden. Bei ihr entstehen im eingeschwungenen Fall die im Bild 9.3-2 dargestellten Ausgangsgrößen x , x_a , x_b von G , G_a , G_b sowie die dabei auftretenden Fehler $x - x_a$ und $x - x_b$, Bild 9.3-2.

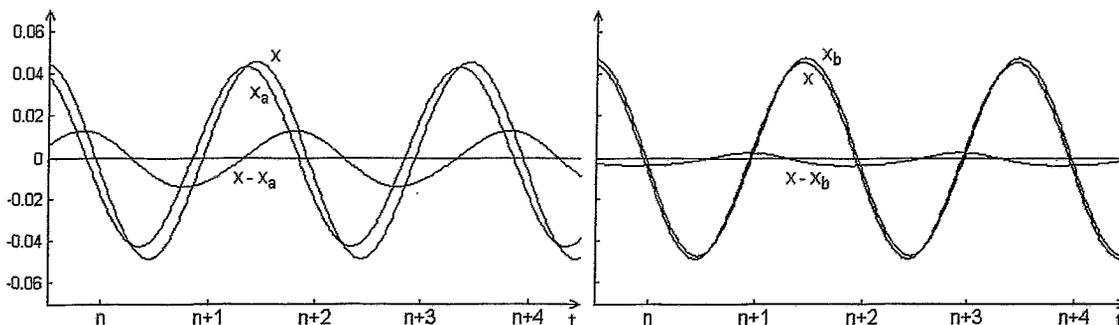


Bild 9.3-2: Eingeschwungene Antworten sowohl des Originals G als auch seiner vorgegebenen Modelle G_a und G_b auf die Anregung (9.3-3), $n \in \mathbb{N}$

Aus den zwei vorgegebenen Modellen (9.3-2) soll nun ein Verbundmodell gebildet werden, welches speziell für die sinusförmige Anregung (9.3-3) eine genauere Beschreibung des Verhaltens von G erreicht. Gewählt wird wieder die parallele Verbindung der Modelle, s. Abschnitt 5.2.

Nach Bild 9.3-2 rechts ist offensichtlich G_b das genauere der beiden vorgegebenen Modelle. Diese Erscheinung lässt bereits gewisse Rückschlüsse zu. Sie könnte nämlich damit zusammenhängen, dass $u(t)$ für (9.3-3) im Mittel praktisch Null ist und sich dieser Mittelwert näher am Wert der nach (9.3-1) zum Modell G_b gehörenden Sprunghöhe $-0,4$ befindet als am Wert der zum Modell G_a gehörenden Sprunghöhe 2 . Von daher ist zu erwarten, dass in der parallelen Verbindung der beiden Modelle das Einzelmodell G_b letztlich das größere Gewicht erhalten wird.

Die zwei vorgegebenen Modelle werden also parallel verbunden zum Verbundmodell, vgl. Bild 9.3-3,

$$G_v = c_a G_a + c_b G_b \quad (9.3-4)$$

mit c_a, c_b : (Wichtungs-)Parameter und $c_a + c_b = 1$ als Nebenbedingung

und mit der Ausgangsgröße

$$x_v = c_a x_a(t) - c_b x_b(t). \quad (9.3-5)$$

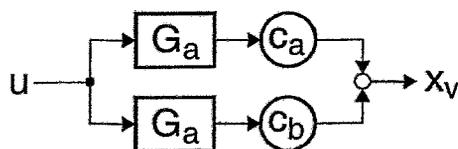


Bild 9.3-3: Gewichtete Parallelschaltung der beiden vorgegebenen Modelle G_a und G_b

Das Verbundmodell G_v wird nach dem Fehlerfunktional

$$F = \int x_v^2(t) dt \quad (9.3-6)$$

bewertet. Ein Merkmalsraum kann hier mit den Parametern c_a und c_b definiert werden, da beide jedoch voneinander abhängen, braucht der Fehler F nur über einem dieser Parameter dargestellt zu werden. Um das Fehlerminimum zu finden, wird c_a im Intervall $[0, 1]$ schrittweise variiert. Der aus vielen Einzelerperimenten hervorgehende qualitative Verlauf des Modellfehlers F ist als Funktion von c_a im Bild 9.3-4 dargestellt.

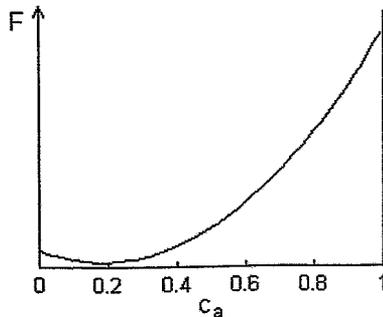


Bild 9.3-4: Der Fehler F des Verbundmodells G_v bei Variation des Gewichtes c_a

Am linken Ende des im Bild 9.3-4 dargestellten Bereiches, d.h. für $c_a = 0$ ($c_b = 1$) und damit $G_v = G_b$ wird ein kleinerer Fehlerwert als am oberen Ende bzw. $G_v = G_a$ erreicht. Zum Fehlerminimum gehört jedoch das Gewicht

$$c_a = 0,19 \quad \text{bzw.} \quad c_b = 1 - c_a = 0,81. \quad (9.3-7)$$

Mit den Werten aus (9.3-7) ist das Einzelmodell G_b wie erwartet mit dem größeren Gewicht am Verbundmodell G_v beteiligt. Wegen des vergleichsweise kleinen verbliebenen Fehlers F kann das Verbundmodell als Modellsymbiose gelten. Die zu den optimalen Konstanten (9.3-7) gehörenden eingeschwungenen Ausgangsverläufe von G und G_v sowie deren Differenz zeigt das Bild 9.3-5.

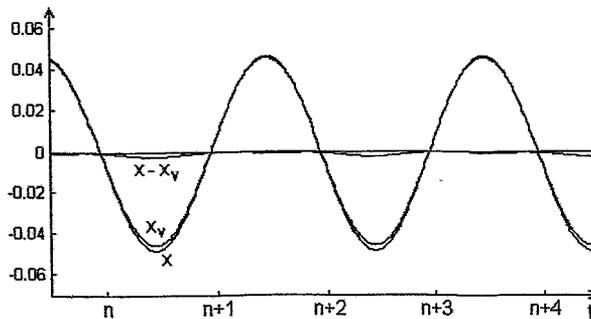


Bild 9.3-5: Eingeschwungene Antworten des Originals G und des nach (9.3-4) mit (9.3-7) bestimmten Verbundmodells G_v auf die Anregung (9.3-3)

Entsprechend der entwickelten Methodik soll jetzt in einem Merkmalsraum nach der Position eines (weiter) verbesserten Einzelmodells des Originals gesucht werden. Dafür wird zunächst ein neuer, auf Merkmalen von Verzögerungsgliedern 1. Ordnung basierender Merkmalsraum eingeführt. Damit neben den beiden vorgegebenen Modelle (9.3-2) auch die Modellsymbiose (9.3-4) in diesem Merkmalsraum erscheinen kann, muss dieses ebenfalls als Verzögerungsglied ausgedrückt werden: Die Modellsymbiose (9.3-4) hat unter Berücksichtigung von (9.3-2) die folgende Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned}
G_v(s) &= G_a(s) + G_b(s) \\
&= \frac{K_a c_a}{1 + sT_a} + \frac{K_b c_b}{1 + sT_b} \\
&= \frac{K_a c_a + K_b c_b + s(K_a c_a T_b + K_b c_b T_a)}{1 + s(T_a + T_b) + s^2 T_a T_b}
\end{aligned} \tag{9.3-8}$$

Eine Darstellung von (9.3-8) als PT₁-Glied

$$G_v(s) = \frac{K_v}{1 + sT_v} \tag{9.3-9}$$

ist nur näherungsweise möglich. Verlangt wird dafür, dass die Näherung im Kurz- und im Langzeitverhalten, also für $t \rightarrow 0$ und $t \rightarrow \infty$ mit (9.3-8) exakt übereinstimmt. Nach dem 2. Grenzwertsatz der Laplace-Transformation folgt aus (9.3-8) und (9.3-9) die statische Verstärkung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_v(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_v(s) = K_a c_a + K_b c_b = K_v. \tag{9.3-10}$$

Nach dem 1. Grenzwertsatz der Laplace-Transformation folgt aus (9.3-8) und (9.3-9)

$$x_v(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG_v(s) = \frac{K_a c_a T_b + K_b c_b T_a}{T_a T_b} = \frac{K_v}{T_v}. \tag{9.3-11}$$

Weil nach (9.3-2) konkret $K_a T_b = K_b T_a = T_a T_b = \frac{5}{9}$ ist, sowie nach (9.3-7) $c_a + c_b = 1$, folgt aus (9.3-11) und (9.3-10)

$$T_v = K_v = 1,41.$$

Zum Vergleich der Übertragungsfunktion (9.3-8) mit ihrer Näherung (9.3-9) sind die zugehörigen Sprungantworten $x_v(t)$ für (9.3-8) und $\tilde{x}_v(t)$ für (9.3-9) sowie deren Differenz im Bild 9.3-6 angegeben.

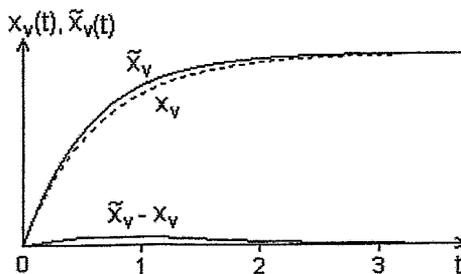


Bild 9.3-6: Sprungantworten zur Einschätzung der Näherung (9.3-9), s. Text

Nach der erkennbaren Ähnlichkeit der beiden Sprungantworten wird die gefundene PT₁-Näherung der Modellsymbiose für die weiteren Betrachtungen als ausreichend eingeschätzt.

Die zwei charakteristischen Parameter eines PT₁-Gliedes, nämlich die Zeitkonstante T und die statische Verstärkung K werden jetzt als Merkmale aufgefasst. Auffälligerweise haben K und T in (9.3-2) modellintern jeweils übereinstimmende und nur zwischen den Modellen unterschiedliche Werte, nämlich $K_a = T_a = \frac{1}{3}$, $K_b = T_b = \frac{5}{3}$. Aufgrund dieser Abhängigkeit werden T und K vereinfachend als ein einziges Merkmal aufgefasst.

Da sich die beiden vorgegebenen Modelle (9.3-2) ursächlich wegen der unterschiedlichen Anregungen in u nach (9.3-1) des Originals G voneinander unterscheiden, soll auch die Eingangsgröße $u(t)$ durch ein Merkmal dargestellt werden. Weil sich $u(t)$ als Zeitfunktion dafür nicht unmittelbar eignet, wird sie auf einen skalaren Wert abgebildet; das folgende Funktional erzeugt ein fortan mit U bezeichnetes Merkmal:

$$U = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt. \quad (9.3-12)$$

Aus (9.3-12) und den Sprunghöhen aus (9.3-1) folgen für die beiden Modelle G_a und G_b die Merkmalswerte $U_a = 2$ und $U_b = -0,4$. Aus dem Mittelwert von (9.3-3) folgt für das Verbundmodell G_v der Merkmalswert $U_v = 0$.

Mit $T = K$ und U liegt ein zweidimensionaler Merkmalraum vor. Die Positionen der drei Modelle G_a , G_b und G_v in diesem Merkmalraum zeigt das Bild 9.3-7.

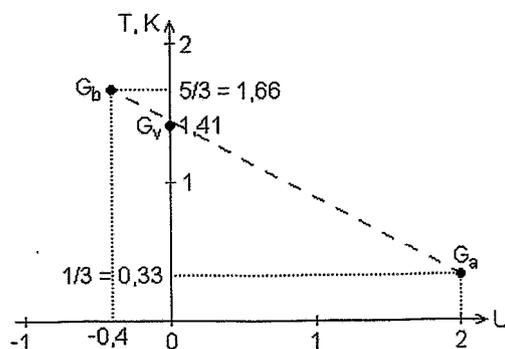


Bild 9.3-7: Die Positionen der Einzelmodelle G_a und G_b sowie des Verbundmodells G_v in dem durch $T = K$ und U definierten Merkmalraum

Da sich die Modelle G_a , G_b und G_v im Bild 9.3-7 annähernd auf einer Linie (gestrichelt) befinden, liegt es nahe, das globale Minimum des Modellfehlers F und mit ihm das Original G ebenfalls auf dieser Linie oder in deren Nähe zu vermuten. Die konkrete Position von G hängt dabei von der jeweiligen Eingangsgröße $u(t)$ ab. Im Unterschied zu allen bisherigen Betrachtungen und Anwendungsbeispielen hat das Original hiermit keine feste Position im Merkmalraum.

Weil der hier verwendete Merkmalraum nach Maßgabe eines PT_1 -Gliedes definiert ist, werden aus ihm hervorgehende Modelle verständlicherweise ebenfalls die PT_1 -Struktur aufweisen. Aus diesem Grund braucht hier im Unterschied zum allgemeinen Fall zur Modellverbesserung nicht auf irgendwelche andere bekannte Strukturen bzw. bevorratete Objekte zurückgegriffen werden.

Der Anstieg der gestrichelten Geraden im Bild 9.3-7 ist aus der Differenz zwischen G_a und G_b bestimmbar. Dies ist insbesondere deshalb zweckmäßig, weil diese beiden Modelle für ihre zugehörigen u -Verläufe (9.3-1) exakt sind. Als Anstieg der Geraden ergibt sich $(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}) / (2 - (-0,4)) = -\frac{4}{9} = -0,555$. Die Gerade hat für $U = 0$ den Wert $T = K = \frac{13}{9} = 1,44$; dies ist etwas mehr als der oben für G_v berechnete Wert 1,41. Damit gilt die Geradengleichung

$$T = K = -0,555 U + 1,44. \quad (9.3-13)$$

Gemäß (9.3-2) mit (9.3-13) und mit der allgemeinen Eingangsgröße u lautet das anhand des Merkmalraumes gewonnene neue Objekt

$$G^*: (-0,555u + 1,44) \dot{x}_a + x_a = (-0,555u + 1,44)u. \quad (9.3-14)$$

Inwieweit sich diese neue Objekt als verbessertes Model des Originals G eignet, muss ich erweisen. Weil in (9.3-14) die bisherigen Konstanten T und K durch u -abhängige Variable ersetzt sind, stellt G^* ein bilineares und damit auch strukturell neues bzw. hier bisher nicht vorgesehenes Übertragungsglied dar.

Die aus G^* hervorgehende Ausgangsgröße, sie wird fortan x^* genannt, ist für die sinusförmige Anregung nach (9.3-3) im Vergleich mit der Ausgangsgröße x des Originals im Bild 9.3-8 dargestellt. Auf eine zusätzliche Betrachtung der u -Sprünge nach (9.3-1) wird verzichtet, denn wie leicht nachzuvollziehen ist, wäre dann ohnehin $x^* \equiv x$.

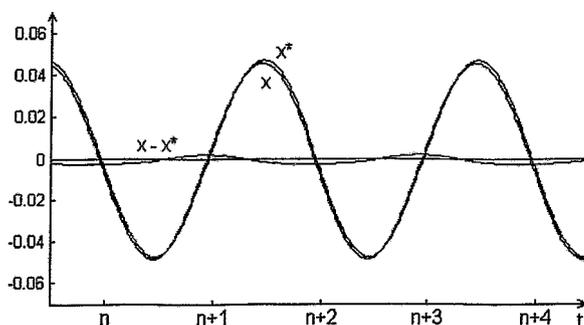


Bild 9.3-8: Antwort des neuen Objektes (9.3-14) auf die sinusförmige Anregung (9.3-3)

Der Fehler der Ausgangsgröße x^* im Bild 9.3-8 ist nicht auffallend geringer als der bereits recht kleine Fehler der G_v -Ausgangsgröße x_v im Bild 9.3-5. Demgegenüber lässt sich zeigen, dass x_v im Falle beliebiger sprungförmiger Anregungen von G_v im allgemeinen stark fehlerbehaftet ist, x^* aber sogar exakt.

Zur weiteren Überprüfung werden x aus dem Original G , x_v aus der Modellsymbiose G_v (9.3-9) und x^* aus dem neuen Objekt (9.3-14) jeweils aus dem Nullzustand heraus für eine rechteckförmig-periodische Anregung betrachtet, Bild 9.3-9. Die Anregungsfunktion u schaltet dabei zwischen $0,8 \cdot (-0,4) = -0,32$ und $0,8 \cdot 2 = 1,6$ um und liegt damit zwischen ihren Werten aus (9.3-1).

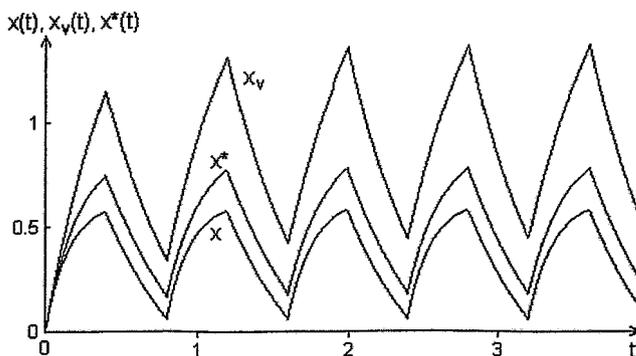


Bild 9.3-9: Ausgangsgrößen bei beginnender periodischer Rechteck-Anregung, s. Text

Nach Bild 9.3-9 ist die Differenz $x^* - x$ deutlich kleiner als die Differenz $x_v - x$. Das neues Objekt (9.3-14) eignet sich somit durchaus als ein verbessertes Einzelmodell des Originals G . Trotzdem ist gemäß Bild 9.3-9 der absolute Fehler zwischen G^* und G noch erheblich. Zur strukturellen Einschätzung des verbesserten Modells G^* wird es nun mit der wahren Struktur des Originals G verglichen.

Das Original ist die folgende bilineare Differentialgleichung:

$$\dot{x} + (1+u)x = u \quad \text{bzw.} \quad (9.3-15)$$

$$G: \quad \frac{1}{1+u} \dot{x} + x = \frac{1}{1+u} u$$

Für den darin enthaltenen Quotienten gilt die Näherung

$$\frac{1}{1+u} \approx 1-u \quad \text{für } |u| \ll 1. \quad (9.3-16)$$

Diese Näherung entspricht strukturell dem in (9.3-14) enthaltenen Term

$$-0,555u + 1,444 = 0,555(2,6 - u). \quad (9.3-15)$$

Demnach ist das verbesserte Modell G^* dem Original G strukturell verwandt. Zum Vergleich wird (8.3-15) in der Merkmalsraumdarstellung aus Bild 9.3-7 dargestellt, wobei $K = T = 1/(1+u)$ gesetzt wird, Bild 9.3-10.

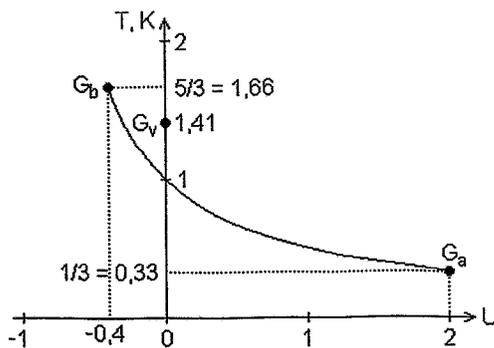


Bild 9.3-10: Mögliche Orte des Originals G im Merkmalsraum

Wie bereits oben festgestellt wurde und nun auch aus Bild 9.3-10 hervorgeht, stimmt das Original G für $u = 2$ und $u = -0,4$ exakt mit den Modellen G_a und G_b überein. Jedoch anders als im Bild 9.3-7 erwartet befindet sich zwischen den Positionen von G_a und G_b im Merkmalsraum keine Gerade. Dieser Unterschied macht u.a. die im Bild (9.3-9) verbliebene erhebliche Differenz $x^* - x$ verständlich.

9.4 Überdeckung von Flächen

Als Original wird diesmal eine geometrische Fläche gewählt, die zunächst als unbekannt angenommen wird. Diese und alle weiteren Flächen-Objekte sind der Einfachheit halber in sich zusammenhängend, d.h. ihr Rand bildet jeweils eine einzige in sich geschlossene Linie. Zudem sind alle Objekte innerhalb eines quadratischen Rahmens angeordnet und dort flächenzentriert angeordnet. Als Modelle des Originals werden ein gleichseitiges Dreieck und ein Kreis vorgegeben, Bild 9.4-1.

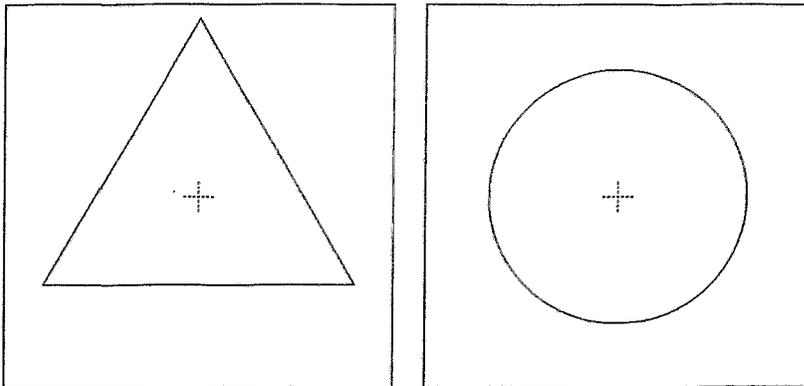


Bild 9.4-1: Vorgegebene Modelle des Originals

Der Modellfehler ergibt sich aus den Flächendifferenzen zwischen dem Original und seinen Modellen und dabei insbesondere aus den die auf die Flächenmitte bezogenen Differenzen zwischen den Flächenrändern. Bewertet wird der quadratische radiale Abstand zwischen dem Rand des Originals und dem Rand des jeweiligen Modells integral über alle Winkel, vgl. Bild 9.4-2:

$$F = \int_0^{2\pi} (r_M(\varphi) - r_O(\varphi))^2 d\varphi \quad (9.4-1)$$

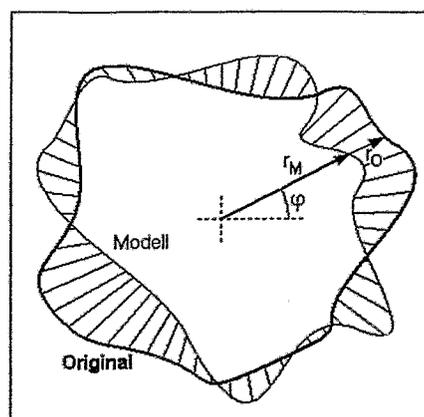


Bild 9.4-2: Zur Verdeutlichung des Bewertungskriteriums (9.4-1) an willkürlichen Flächen-Objekten; $r_O(\varphi)$, $r_M(\varphi)$: Radiusdifferenz zwischen den Rändern des Originals und des Modells abhängig vom Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$

Bei den zwei vorgegebenen Modellen im Bild 9.4-1 ist der nach (9.4-1) bestimmte Fehler minimal, nämlich beim Dreieck $F = 3393$ und beim Kreis $F = 284$ (normiert). Nach diesen Fehlerwerten ist der Kreis dem Original bedeutend ähnlicher als das Dreieck.

Ein Verbundmodell wird durch ein (im Sinne von Parallelität) anteiliges Nebeneinander der beiden Einzelmodelle herbeigeführt, vgl. Abschnitt 5.2, speziell indem die jeweils zum gleichen Winkel φ gehörenden Radien - r_D für das Dreieck und r_K für den Kreis - mit Hilfe eines Wichtungsfaktors k zum Radius des Verbundmodells wie folgt zusammengesetzt werden:

$$r_V(\varphi) = kr_K(\varphi) + (1-k)r_D(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi] \quad (9.4-2)$$

Das Verbundmodell (9.4-2) bedeutet, dass die Punkte z.B. der Kreislinie bei jeweils gleichbleibendem Radius zum Dreieck hin oder davon weg verschoben werden. Das Bild 9.4-3 verdeutlicht diese Verschiebung für $k \in [0,5; 1,5]$. Mit dem gleichen Ergebnis könnte das Dreieck in Richtung Kreis verschoben werden.

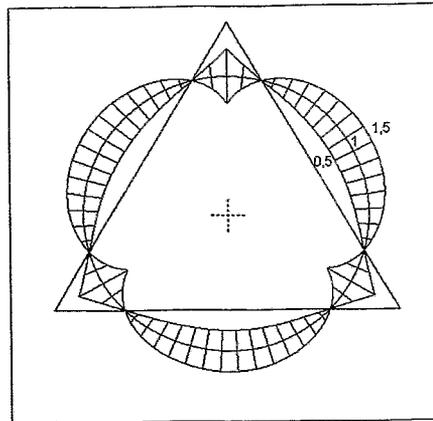


Bild 9.4-3: Variation des Kreises in Richtung Dreieck im Rahmen des Verbundmodells (9.4-2) zwischen den Werten $k = 0,5$ und $k = 1,5$

Für das Gewicht $k = 1,04$ ist der nach (9.4-1) bestimmte Modellfehler mit $F = 282$ minimal. Obgleich dieser Fehler nur wenig kleiner als beim Kreis ist, kann das Verbundmodell dann trotzdem als Modellsymbiose gelten. Für den optimalen Fehlerwert erhält der Radius r_D in (9.4-2) ein negatives Vorzeichen. Insofern befindet sich die Modellsymbiose nicht wie bei den bisherigen Beispielen zwischen den beteiligten Modellen oder allgemein nicht innerhalb der konvexen Hülle, welche die Modelle umschließt, sondern gemäß Bild 5.2-3 außerhalb derselben. Die gefundene optimale Modellsymbiose weicht nur wenig von der Kreisform ab, praktisch höchstens um Strichdicke; auf eine separate grafische Darstellung wird hierbei verzichtet.

Entsprechend der allgemeinen Methodik wird für die Suche nach einem verbesserten Einzelmodell des Originals nun ein Merkmalsraum benötigt. Als ein vergleichsweise abstraktes Merkmal wird die Kreis-Ähnlichkeit des jeweiligen Objektes gewählt. Folglich kommen aus einem Objektivorrat vorzugsweise solche Objekte in Betracht, die einem Kreis ähnlich sind. Die Wahl wird dabei vereinfachend auf regelmäßige Vielecke eingeeengt; ein Kreis kann als Grenzfall eines regelmäßigen Vielecks aufgefasst werden. Aus der Menge der regelmäßigen Vielecke wird schließlich das Achteck im Bild 9.4-4 ausgewählt. Nachdem dieses Objekt in seiner Größe gemäß (9.4-1) optimiert ist, hat es den Fehler $F = 257$. Weil dieser Fehler deutlich kleiner ist als die bisherigen Fehlerwerte, bestätigt er das Achteck als ein gegenüber den vorgegebenen Modellen Dreieck und Kreis als ein verbessertes Modell des Originals.

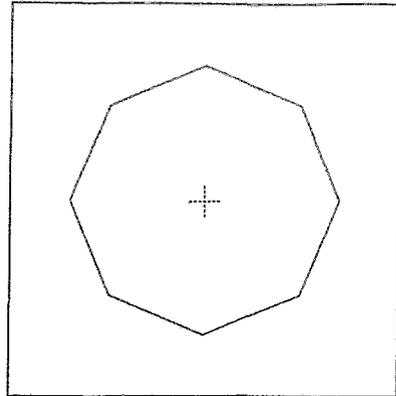


Bild 9.4-4: Verbessertes Modell des Originals

Trotzdem beträgt der Modellfehler des gefundene Achteck immerhin noch $257/284 \approx 90\%$ des Fehlers beim Kreis. Deshalb ist das Achteck noch keine entscheidend verbesserte Beschreibung des Originals. Das Achteck erscheint eher dem Einzelmodelle Kreis gleichrangig. In einem weiteren Vorgehen könnten deshalb der Kreis und das Achteck für die Bildung eines neuen Verbundmodells vorgegeben werden. Dies wird hier aber nicht weiter erörtert.

Das Original ist ein Quadrat. Dieses ist im Vergleich mit den vorgegeben Modellen Dreieck und Kreis sowie mit dem verbesserten Modell Achteck im Bild 9.4-5 dargestellt, wobei der Flächenunterschied grau hervorgehoben ist. Wenngleich der Flächenunterschied dem Fehler nach (9.4-1) nur näherungsweise entspricht, so bestätigt er doch zum einen anschaulich den vergleichsweise großen Fehler des Dreiecks. Zum anderen wird durch die anderen einander sehr ähnlichen Flächendifferenzen deutlich, wieso das Achteck keine wesentliche Verbesserung gegenüber dem Kreis darstellt. Wie sich zeigen lässt, hängt der etwas größere Fehler des Kreises wesentlich damit zusammen, dass die Radiusdifferenzen des Kreises im Bereich der Ecken des originalen Quadrates größere Werte aufweist, als solche Differenzen beim Achteck überhaupt vorkommen. Weil diese Differenzen in (9.4-1) quadratisch gewertet werden, erscheint der Kreis entsprechend schlechter.

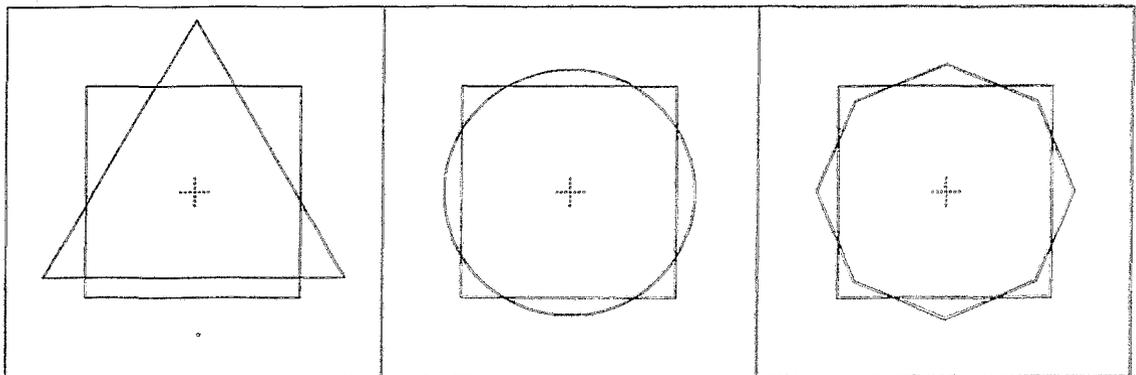


Bild 9.4-5: Die vorgegebenen Modelle Dreieck und Kreis sowie das verbesserte Modell Achteck im Vergleich mit dem originalen Quadrat

10 Symmetrien in einer Symbiose zwischen Original und Modell

Die bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf Symbiosen zwischen Objekten, die jeweils als Modelle eines originalen Objektes vorgegeben sind. Das Original selbst gilt dabei als nicht verfügbar, d.h. es kann oder darf nicht aktiv darauf eingewirkt oder damit experimentiert werden.

Praktisch besteht eine so strenge Einschränkung nicht immer. Wenn nämlich das Original z.B. eine Regelstrecke ist, dann wirkt ein Regler aktiv darauf ein. Selbst wenn diese Regelstrecke nur unvollständig oder ungenau bekannt ist und dadurch nicht das bestmögliche Regelkreisverhalten erreicht wird, so doch vielleicht ein zufriedenstellendes Verhalten, vgl. die Regelung im Bild 9.2-5.

Praktisch kann es auch vorkommen, dass sich die vorgegebenen Modelle zu wenig voneinander unterscheiden, so dass effektiv nur ein einziges Modell wirksam ist. Möglicherweise ist überhaupt nur ein einziges Modell vorhanden. Dann kann es nicht wie oben aus den vorgegebenen heraus einen Modellierungsrahmen geben, aus dem heraus relevante Merkmale bestimmt werden können.

Prinzipiell sind Symbiosen zwischen beliebigen Objekten möglich, also auch zwischen einem Modell und seinem Original. Das Original muss dafür wenigstens teilweise verfügbar sein. Damit liegt es nahe, mittels einer Symbiose zwischen dem Original und seinem Modell zusätzliche Information über das Original und im besonderen relevante Merkmale zu gewinnen. Diese etwas eigenständige Problematik wird nachfolgend nur kurz an einem Beispiel erörtert.

Betrachtet wird eine modellbasierte Messung. Das Messglied und das Messobjekt sind dabei als Übertragungsglieder in Reihe geschaltet, das Messglied hinter dem Messobjekt. Das Messglied realisiert ein inverses Modell des Übertragungsverhalten des als Original aufgefassten Messobjektes. Das verwendete Beispiel entstammt der Problematik der Reaktivitätsmessung an Forschungs-Kernreaktoren, d.h. Kernreaktoren kleiner Geometrie. Grundlage ist dabei ein sogenanntes punktkinetisches Kernreaktormodell, hier in einer Version aus [Ho88] in vereinfachter Form.

Formal hat eine Reihenschaltung aus einem Übertragungsglied und seinem inversen Modell unabhängig von eventuellen inneren Vorgängen nach außen hin lineares statisches Übertragungsverhalten mit der Verstärkung Eins. Insofern ist der Ausgang der Reihenschaltung mit deren Eingang identisch. Die beiden in Reihe geschalteten Objekte kompensieren somit nach außen hin ihre Wirkungen gegenseitig. In Anbetracht vorkommender Ungenauigkeiten des Modells wird dieser Idealfall praktisch nicht erreicht. Trotzdem kann die Reihenschaltung dann von außen gesehen wenigstens ein einfacheres, unkomplizierteres, weniger komplexes u.ä. Verhalten zeigen als jedes der zwei beteiligten Objekte (Modell und Original) einzeln.

Das Ziel der Modell-Original-Symbiose sei die Bestimmung von relevanten Merkmalen. Merkmalsrelevanz kann hierbei allerdings nicht wie oben durch die Gemeinsamkeit von Merkmalen zwischen unterschiedlichen Modellen und dem Original definiert sein, denn gemeinsame Merkmale zwischen einem einzigen Modell und dem Original sind für eine Modellierung möglicherweise auch irrelevant.¹⁵ Folglich ist zur Bestimmung relevanter Merkmale in Modell-Original-Symbiosen ein anderes Kriterium erforderlich. Ausgehend von der soeben beschriebenen gegenseitigen Kompensation von Wirkungen soll dieses Kriterium darin bestehen, dass in der bestehenden Modell-Original-Symbiose Merkmals-Symmetrien nachgewiesen werden. Darunter sei zu verstehen, dass ein qualitativ gemeinsames Merkmal von Original und Modell zwischen diesen beiden Objekten quantitativ diametral um den gleichen Betrag von einem zugehörigen Bezugswert abweicht. Der Bezug ist dabei durch die jeweilige Umgebung bestimmt, in der sich das Original und sein Modell befinden. Beispielsweise bei

¹⁵ In dem bereits genannten Beispiel eines Fußballs als Original und eines Apfels als dessen Modell gibt es z.B. das gemeinsame Merkmal, dass beide eine träge Masse zu besitzen. Dieses Merkmal kann, da es praktisch überall in der Welt vorkommt, kaum relevant für die Beschreibung des Fußballs sein.

einem autonomen, d.h. keinen äußeren Einwirkungen unterliegenden asymptotisch stabilen dynamischen System ist der Bezug durch den Nullzustand des Systems bestimmt. Im Merkmalsraum ausgedrückt befindet sich die Modell-Original-Symbiose in einem bestimmten Punkt im Merkmalsraum und die beiden beteiligten Objekte (Modell und Original) symmetrisch dazu in entgegengesetzten Richtungen. Eine Merkmalsymmetrie besteht ggf. nur in einem Teilraum eines definierten Merkmalraumes. Die zu einer bestehenden Merkmalsymmetrie gehörenden Merkmale werden als relevant für die Modellierung und folglich auch für die Suche nach einem verbesserten Modell des Originals aufgefasst.

Das Original O bestehe in einem linearen dynamischen Übertragungsglied, das in seiner Gesamtheit vorerst als unbekannt angenommen wird. Von diesem Original ist ein vereinfachtes Modell M bekannt, welches als inverses Modell die folgende Übertragungsfunktion besitzt, vgl. Bild 10-1:

$$M^{-1}(s) = \frac{v(s)}{y(s)} = \frac{k}{1 + k(G_1(s) + G_2(s))} = \frac{k}{1 + k \left(\frac{\omega_1}{(s + a_1)^2 + \omega_1} + \frac{\omega_2}{(s + a_2)^2 + \omega_2} \right)} \quad (10-1)$$

$k = 10$: Verstärkungsfaktor

G_1, G_2 : Teilübertragungsglieder (Schwingungsglieder mit Dämpfung)

$\omega_1 = 20, \omega_2 = 30$: Eigenfrequenzen (normiert) der Teilübertragungsglieder

$a_1 = -0,035, a_2 = -0,055$: Abklingfaktoren der Schwingungs-Modi

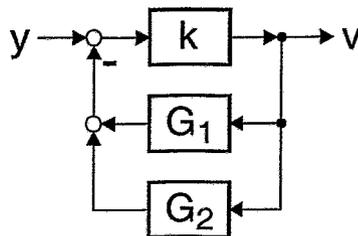


Bild 10-1: Strukturbild des inversen Modells nach (10-1)

Das Original wird mit seinem inversen Modell in Reihe geschaltet, Bild 10-2. Das inverse Modell ist dabei im Sinne eines Messgliedes nachgeschaltet.

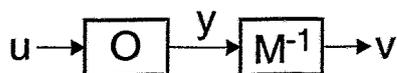


Bild 10-2: Reihenschaltung des Originals mit seinem inversen Modell

Dieses System wird am Eingang u des Originals durch einen Zufallsprozess angeregt, welcher im gewählten Betrachtungsmaßstab einem weißen Rauschen nahekommt, Bild 10-3 links.

Als Merkmale dienen ähnlich wie im Abschnitt 7.1 ausgewählte Fourier-Koeffizienten der vorkommenden Größen. Die Fourier-Koeffizienten des eingangsseitigen Zufallsprozesses sind im Bild 10-3 rechts dargestellt; das Spektrum ist auf denjenigen Frequenzbereich begrenzt, der für die Dynamik des betrachteten Systems wesentlich ist.

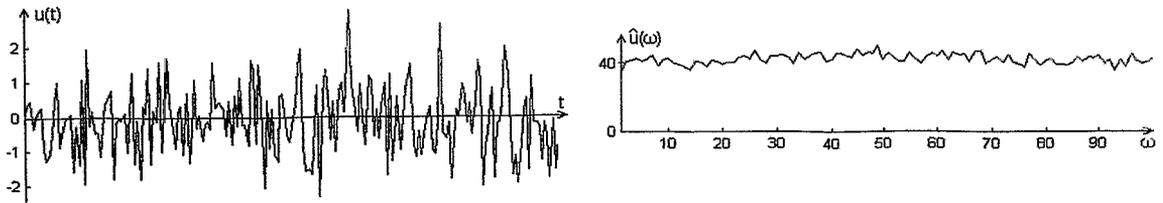


Bild 10-3: Die Eingangsgröße u des Systems im Zeit- und Frequenzbereich (Betrags-Spektrum)

Den Verlauf der Ausgangsgröße $y(t)$ des Originals zeigt das Bild 10-4 links. Verglichen mit dem nahezu konstanten Spektrum der Eingangsgröße $u(t)$ im Bild 10-3 rechts ist das Spektrum von $y(t)$ im Bild 10-4 rechts in den unteren Frequenzen deutlich angehoben. In dieser Anhebung widerspiegelt sich die Dynamik des Originals O . Die Wirkung der Dynamik von O umfasst offensichtlich das Intervall $\omega \in [0, \approx 60]$. Wegen des annähernd konstanten Spektrums $\hat{u}(j\omega)$ entspricht das Spektrum $\hat{y}(j\omega)$ dem Frequenzgang des Originals, d.h. $F_O(j\omega) = y(j\omega)/u(j\omega)$. Die Ausgangsgröße $v(t)$ des Systems ist im Bild 10-5 dargestellt.

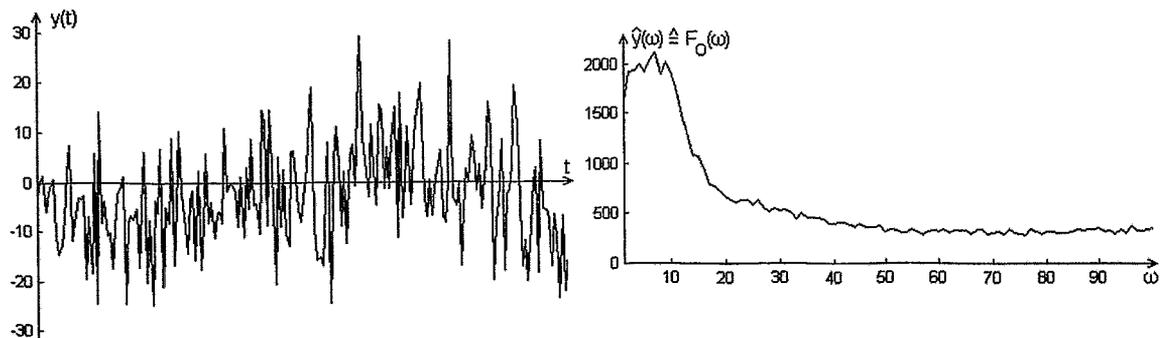


Bild 10-4: Die Ausgangsgröße y des Originals im Zeit- und Frequenzbereich

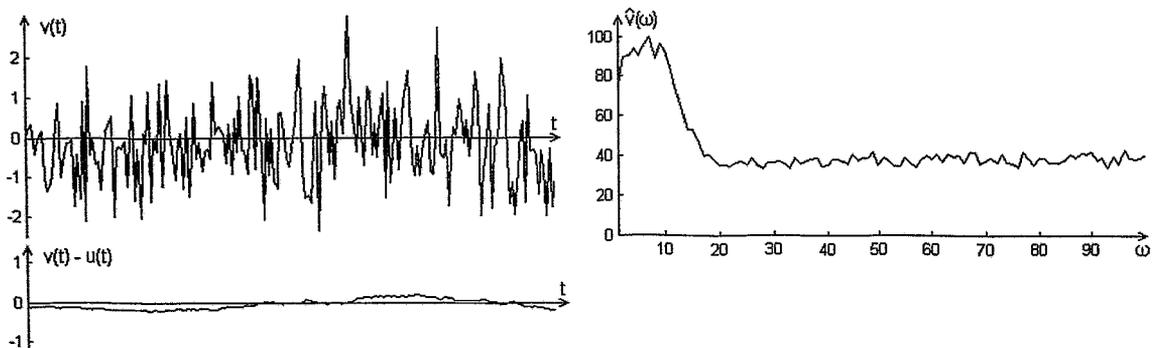


Bild 10-5: Die Ausgangsgröße v des Systems im Zeit- und Frequenzbereich sowie in einem Vergleich mit der Eingangsgröße u

Wie aus Bild 10-5 rechts hervorgeht, wurde die vom Original O hervorgerufene spektrale Anhebung durch das inverse Modell M^{-1} offensichtlich nur teilweise kompensiert, nämlich nur etwa für $\omega > 20$. Dies bestätigt, dass das Modell M nur eine ungenaue Beschreibung des Originals O ist. Der verbliebene Unterschied ist aber insgesamt, d.h. für $\omega \in [0, \infty)$ nur klein; dies äußert sich im Originalbereich in dem nur vergleichsweise geringen Unterschied zwischen der Systemausgangsgröße $v(t)$ und der Eingangsgröße $u(t)$ im Bild 10-5 links unten. Der Modellfehler betrifft somit im wesentlichen den niedrigen Frequenzbereich $\omega \in [0, 20]$. Dort bzw. in den betreffenden Merkmalen sind folglich gewisse Asymmetrien zwischen dem

Original und seinem inversen Modell zu erwarten. Die gesuchten Merkmalsymmetrien müssen dagegen in $\omega > 20$ nachweisbar sein. Zur besseren Verdeutlichung dieser Symmetrien wird der Frequenzgang des inversen Modells, also $F_M(j\omega) = v(j\omega)/y(j\omega)$ separat betrachtet, Bild 10-6.

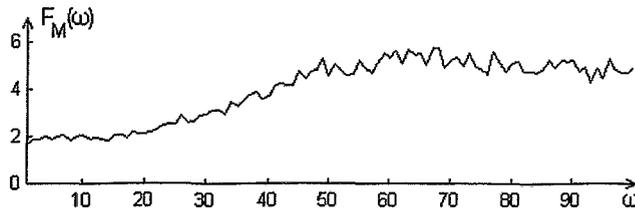


Bild 10-6: Betrag des Frequenzganges des inversen Modells M^{-1}

Der Frequenzgang $F_M(j\omega)$ im Bild 10-6 ist verständlicherweise genau in denjenigen Frequenzen abgesenkt, in denen der Frequenzgang des Originals $F_O(j\omega)$ angehoben ist, vgl. Bild 10-4 rechts, nämlich etwa in $\omega < 60$. Als Bezug für die Merkmals-Symmetrie wird das (annähernd konstante) Spektrum der Eingangsgröße u gewählt. Die beiden Frequenzgänge $F_M(j\omega)$ und $F_O(j\omega)$ sind im Vergleich mit dem Spektrum $\hat{u}(j\omega)$ in einem logarithmischen Maßstab im Bild 10-7 dargestellt, wobei die Merkmals-Symmetrien zwischen dem Original und seinem inversen Modell in dem für die Beschreibung der Dynamik des Originals wesentlichen Frequenzbereich durch Pfeile besonders hervorgehoben sind.

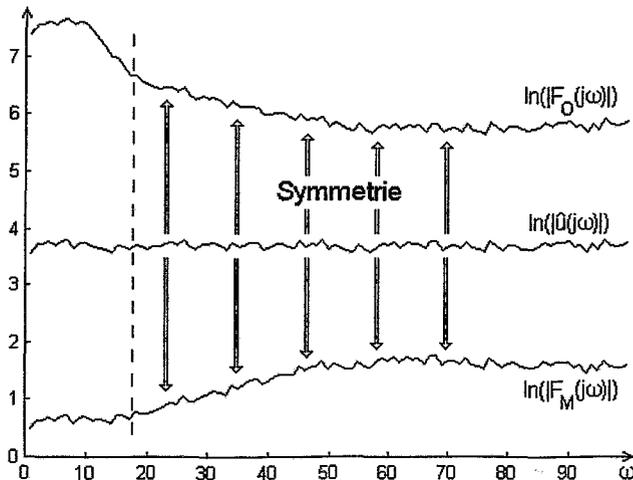


Bild 10-7: Zur Verdeutlichung der Merkmals-Symmetrie zwischen dem Original und seinem inversen Modell, s. Text

Die Merkmale zu den im Bild 10-7 hervorgehobenen Symmetrien können bezüglich des Bezugswertes als relevante Merkmale eingeschätzt werden. Mit ihrer Hilfe könnte im weiteren versucht werden, ein verbessertes Modell des Originals zu finden. Darauf wird jedoch hier verzichtet.

Ein willkürlicher Einfluss auf die Bestimmung relevanter Merkmale, so wie er weiter oben durch die Vorgabe eines Modellierungsrahmens erreicht werden konnte, ist bei den Merkmalsymmetrien durch die Vorgabe des Bezugswertes oder allgemein des Bezuges möglich.

Das Original ist bekannt und erscheint in seinem (exakten) inversen Modell dadurch, dass im bisherigen ungenauen inversen Modell (10-1) ein Parallelzweig mit der Übertragungsfunktion

$$G_0(s) = \frac{\omega_0}{(s + a_0)^2 + \omega_0} \quad \text{mit } \omega_0 = 10, a_0 = -0,008. \quad (10-2)$$

hinzugefügt wird. Die Inversion zu der als Original geltenden Übertragungsfunktion erfolgt nach den bekannten Umformungsregeln für Blockschaltbilder. Die Reihenschaltung des Originals mit seinem exakten inversen Modell ist als Strukturbild im Bild 10-8 dargestellt und lautet formal

$$\begin{aligned} O \cdot M^{-1} &= \frac{y(s)}{u(s)} \cdot \frac{v(s)}{y(s)} \\ &= \left(\frac{1}{k} + G_0(s) + G_1(s) + G_2(s) \right) \cdot \frac{k}{1 + k(G_0(s) + G_1(s) + G_2(s))} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (10-3)$$

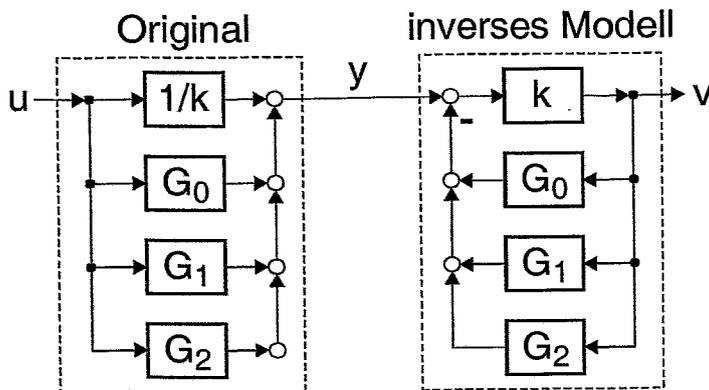


Bild 10-8: Das Original in Reihenschaltung mit seinem exakten inversen Modell

Die symmetrischen Merkmale lassen keine unmittelbaren Rückschlüsse auf das exakte Modell zu, sie können jedoch wie bereits bei den Modellsymmetrien die Suche danach erleichtern.

11 Zusammenfassung

Entwickelt wurde eine Methode, die es auf der Grundlage unterschiedlicher vorgegebener Modelle eines originalen Objektes möglich macht, Merkmale eines verbesserten Modells dieses Originals zu bestimmen bzw. vorherzusagen. Aus den gefundenen Merkmalen kann im allgemeinen noch nicht eindeutig auf ein bestimmtes Objekt geschlossen werden, welches als verbessertes Modell in Betracht kommt. Allerdings kann in umgekehrter Schlussweise versucht werden, einen vorsorglich bereitgestellten Vorrat an Objekten nach einem Objekt zu durchsuchen, welches den gewünschten Merkmalen am besten entspricht. Die entwickelte Methode geht davon aus, die vorgegebenen Modelle in einem Merkmalsraum darzustellen. Bevorzugt werden dabei Merkmale, von denen erwartet werden kann, dass sie auch im Original vorkommen und deswegen für eine Modellierung relevant sind. Solche Merkmale gehen insbesondere aus den Überschneidungen der Merkmalsmengen der vorgegebenen Modelle hervor. Den Positionen der Modelle im Merkmalsraum werden die Fehler zugeordnet, welche die Modelle gegenüber dem Original aufweisen. Anhand der

damit vorliegenden Stützstellen wird dann versucht, eine kontinuierliche Fehlerfunktion über dem Merkmalsraum zu bestimmen. Die Position, welche das globale Minimum dieser Fehlerfunktion im Merkmalsraum aufweist, wird als die vermutliche Position des Originals aufgefasst. Folglich gelten die zum Fehlerminimum gehörenden Merkmale als die gesuchten Merkmale eines verbesserten Modells.

In der Praxis ist die Anzahl der vorgegebenen Modelle oftmals zu gering, um anhand ihrer Stützstellen im Merkmalsraum die benötigte Fehlerfunktion ausreichend genau bestimmen zu können. Zwar können die Modelle variiert werden, z.B. in ihren Parametern, doch lassen sich zusätzliche Stützstellen auf diese Weise meistens nur in kleinen und untereinander nicht zusammenhängenden Umgebungen der bisherigen Modellpositionen bestimmen. Ausgedehntere Gebiete des Merkmalsraumes werden deshalb durch ein symbioseartiges Zusammenwirken der vorgegebenen Modelle zugänglich gemacht, da eine solche Modellsymbiose vergleichsweise weitreichend variiert werden kann. Gegebenenfalls kann die Modellsymbiose sogar direkt ins Fehlerminimum gebracht werden.

Wie an einem Beispiel gezeigt wurde, lassen sich die für eine Modellierung des Originals relevanten Merkmale auch anhand von Merkmals-Symmetrien bestimmen.

Literatur

- [GRS97] Girod, B., Rabenstein, R., Stenger, A.: Einführung in die Systemtheorie. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1997
- [Bl98] Blatter, C.: Wavelets – Eine Einführung. Braunschweig, Wiesbaden; Vieweg, 1998
- [Ho88] Hoppe, D.: Rechnergeführte Anfahrsteuerung von Kernreaktoren. Dissertation, TU Dresden, 1988
- [Ho99] Hoppe, D.: Die Verknüpfung von Teilmodellen auf der Grundlage der Dimensionsanalyse. Wissenschaftlich-Technischer Bericht, Forschungszentrum Rossendorf, FZR-263, 1999
- [Ho02] Hoppe, D., Hoppe, D.: Eine algebraische Methode zur Synthese von Modellstrukturen. Eingereicht bei Automatisierungstechnik (at), Oldenbourg-Verlag, 2002
- [LMR98] Louis, A. K.; Maaß, P., Rieder, K. : Wavelets – Theorie und Anwendungen. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1998
- [Wo89] Woschni, E.-G.: Zur Bedeutung der A-priori-Information speziell in der Meßtechnik. msr, Berlin 32 (1989) 6, S. 271
- [Vö82] Völz, H.: Information I. Akademie-Verlag, Berlin, 1982